

Día 2: Números Cíclicos

Resumen del enunciado

Determinar el mínimo número de cifras que hay que añadir al principio o al final de un número para que satisfaga la siguiente propiedad: al mover la última cifra al principio se obtiene un múltiplo del número original.

- *Autor: Cesc Folch Aldehuelo*
- Primera solución con 100 puntos: Ninguna hasta la congelación del marcador.

Día 2: Números Cíclicos

Solución:

Primero, estudiemos qué pasa con los números $\overline{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_0}$ que satisfacen

$\overline{a_0a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1} = k \times \overline{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_0}$ fijando los valores de $2 \leq k \leq 9$ y $1 \leq a_0 \leq 9$.

Si realizamos el algoritmo de la multiplicación, se nos va generando una secuencia (b_i, c_i) , donde b_i es el i -ésimo dígito del resultado (y queremos que $a_{i+1} = b_i$) y c_i es la llevada en el i -ésimo dígito. Si empezamos con un a_0, k fijos y vamos generando el número con $a_{i+1} = b_i$, llegaremos a un número con la propiedad deseada cuando la secuencia (b_i, c_i) llegue a $(a_0, 0)$, es decir, al punto inicial.

Por tanto, al ser esta secuencia cíclica, todos los números con la propiedad con ese par (a_0, k) fijos serán una repetición de un generador una o más veces.

Día 2: Números Cíclicos

Podemos obtener todos los generadores probando todos los pares k, a_0 (y descartando los que empiecen por 0). Entonces reducimos el problema a un problema de *strings*

Problema reformulado

Dado un conjunto S de strings y una string t , encontrar el mínimo número de caracteres que hay que añadir al principio o al final de t para que sea una repetición de copias de una misma string de S .

Este problema se puede resolver con *tries*. Pero existe una solución más fácil.

Día 2: Números Cíclicos

Fijamos el valor de k (para cada caso, probaremos todos los valores de k y retornaremos el mínimo valor)

Si nos dan el fragmento de número $a_{i+j} \dots a_i$ que es parte de un número con la propiedad más grande $a_{n-1}a_{n-2} \dots a_0$, vemos que el valor de c_i queda únicamente determinado. A partir de ahí podemos ir generando la secuencia, y tenemos como candidatos de primer número los $c_\ell = 0$ con $\ell > i + j$.

Como los generadores no son muy grandes, para comprobar si un candidato es válido no tenemos que hacer muchas iteraciones, ni tampoco tenemos que generar una secuencia muy larga de números para encontrar todos los candidatos óptimos.

Día 2: Goulash

Resumen del enunciado

Dados $A, B, C, N \leq 10^8$, debes decir si existen enteros $0 \leq x \leq A, 0 \leq y \leq B, 0 \leq z \leq C$ tales que $4x + 5y + 6z = N$.

- Autor: Félix Moreno Peñarrubia
- Primera solución con 100 puntos: Luis Gutiérrez Garrido

Solución:

- Paridad de N implica paridad de $y \implies$ se puede reducir el problema a que los coeficientes sean $(2, 3, 5)$.
- Usando que $2 + 3 = 5$, la solución que maximiza el número de 5s o bien usa todos los 5s o bien no usa de uno de los otros dos.
- Se reduce a una ecuación con dos incógnitas, donde es más fácil calcular hasta qué valores se tiene que iterar para determinar si se puede. También se pueden iterar unos pocos valores desde el principio con las 3 incógnitas, pero es más difícil justificarlo y hay que ser más cuidadoso.

Día 2: Prisión

Resumen del enunciado

Hay n llaves en fila y una de ellas, con índice k , abre la prisión (k es secreto). Hay un entero $0 \leq x \leq \frac{n}{2}$ y puedes hacer consultas del tipo $|i - k| \leq x$, siendo i el índice de cualquiera de las llaves. Encuentra x .

- Autor: Manuel Torres Cid
- Primera solución con 100 puntos: Sergio Domínguez Alonso

Solución:

- Para el i -ésimo bit, si preguntamos por la j -ésima posición, necesitamos que $d(k, j) \pmod{2^{i+1}} \geq 2^i$, coloreamos estas posiciones.
- Sea k la mayor potencia de dos menor o igual que n , observemos que si preguntamos por $0, k-1, n-1, n-k$, coloreamos todas las posiciones de todos los bits.

Día 2: Cuchicheo

Resumen del enunciado

Dado un grafo ($|V|, |E| \leq 10^5$) y dos vértices A, B , dado un camino P decimos que la puntuación de un vértice V es el número de vecinos de V que están en el interior P (contándose V a sí mismo como vecino en caso de que esté en P). Encuentra un camino P entre A y B que minimice la máxima puntuación entre todos los vértices.

- Autor: Félix Moreno Peñarrubia
- Primera solución con 100 puntos: Innokentiy Kaurov

Solución:

- El camino más corto funciona (hacer un BFS). El nivel máximo es $\min(3, \text{distancia} - 1)$.
- Demostración: En el camino más corto no hay aristas interiores entre vértices del camino y si hay un vértice externo al camino con 4 vecinos del camino se puede construir un camino más corto a través de él.

Día 2: Lista

Resumen del enunciado

Dados $v \leq 10^6$ y $k \leq 10^{15}$, encuentra la k -ésima lista de enteros positivos en orden lexicográfico que tiene $v = n + \sum_{i=1}^{n-1} |a_i - a_{i+1}|$, donde n es la longitud de la lista.

- Autor: Félix Moreno Peñarrubia
- Primera solución con 100 puntos: Innokentiy Kaurov

Solución:

- Calculamos el número de listas con valor v que empiezan con un número determinado con una PD sencilla.
- Si v es grande, usamos que los primeros términos van a ser todos 1.
- Si k es grande y v pequeño, usamos que el número de listas que empiezan con un número $> v$ es el mismo que el número de listas que empiezan con v y con el resto de la división sabemos por qué número empezar.