

## Macierze

**Zad 1.** Wykonaj działania:

$$(a) 2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 \\ 9 & 3 & -9 \\ 3 & 0 & 12 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad (c) 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix};$$

**Zad 2.** Dane są macierze:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Wylczyć:

$$(a) A \cdot B; \quad (b) B \cdot A; \quad (c) A \cdot C; \quad (d) C \cdot A; \quad (e) B^T \cdot C; \quad (f) C \cdot B; \\ (g) (3A + B)^T \cdot C; \quad (h) (2A - B) \cdot C^T; \quad (i) C^3; \quad (j) A^T B^T - (BA)^T;$$

**Zad 3.** Wylicz:

$$(a) [1 \quad -1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot [1 \quad -1 \quad 0]; \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix};$$

**Zad 4.** Rozwiązać równanie macierzowe:

$$(a) X + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left( X - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \right); \quad (b) 3 \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -i & 0 \end{bmatrix} + X \right) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ i & 4 \end{bmatrix} = X;$$

$$(c) 2Y \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + Y \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

**Zad 5.** Rozwiązać układ równań macierzowych:

$$(a) \begin{cases} X + Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ X - Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}; \quad (b) \begin{cases} X + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X + Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{cases};$$

**Zad 6.** Obliczyć wyznacznik:

$$(a) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}; \quad (c) \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & -4 \end{vmatrix}; \quad (d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}; \quad (e) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix};$$

**Zad 7.** Obliczyć wyznacznik:

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad (c) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad (d) \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z \end{vmatrix};$$

$$(e) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad (f) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 8 & 7 & 4 & 2 \\ 8 & 9 & 7 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad (g) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}; \quad (h) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix};$$

$$(i) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ a & b & c & d \end{vmatrix}; \quad (j) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -5 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix};$$

**Zad 8.** Rozwiązać równanie:

$$(a) \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0; \quad (b) \begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} = 0; \quad (c) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 5+x \end{vmatrix} = 0;$$

**Zad 9.** Rozwiązać nierówność:

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & x+2 \\ 3 & x \end{vmatrix} < \begin{vmatrix} x & 2 \\ -3 & x \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0; \quad (c) \begin{vmatrix} 2x-5 & x-2 & x-3 \\ 3x-1 & x-1 & x+2 \\ 3x+2 & x-1 & 2x+3 \end{vmatrix} > 0;$$

**Zad 10.** Wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad (d) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(e) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}; \quad (f) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad (g) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad (h) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

**Zad 11.** Rozwiązać równania macierzowe:

$$(a) X \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix};$$

$$(c) 3X + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} X; \quad (d) \left( \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} + 4X \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix};$$

$$(e) \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}; \quad (f) \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{bmatrix};$$

$$(g) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}; \quad (h) X \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 6 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(i) X \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} - 2X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix};$$

**Zad 12.** Wyznaczyć rząd macierzy:

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 15 \end{bmatrix}; \quad (d) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$(e) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}; \quad (f) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & -4 & 4 \end{bmatrix}; \quad (g) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 5 & -3 \end{bmatrix}; \quad (h) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & 4 \\ -3 & -1 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix};$$

**Zad 13.** Wyznaczyć wartości własne i wektory własne macierzy:

$$(a) \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (d) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(e) \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix};$$

## Macierze - odpowiedzi

Zad 1.

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 7 & 11 & 3 \\ -5 & 2 & 14 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix};$$

Zad 2.

$$(a) \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{7}{2} & \frac{9}{2} & -1 \\ -4 & \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & 6 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{2} & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -3 & -\frac{3}{2} & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}; \quad (d) \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 5 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 8 \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix};$$

$$(e) \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -4 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} \\ -7 & \frac{3}{2} & 8 \end{bmatrix}; \quad (f) \begin{bmatrix} -2 & -\frac{7}{2} & -7 \\ -6 & -\frac{1}{2} & -4 \\ -3 & \frac{9}{4} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}; \quad (g) \begin{bmatrix} -6 & -\frac{1}{2} & \frac{13}{2} \\ 5 & -3 & \frac{23}{2} \\ -1 & \frac{21}{2} & -4 \end{bmatrix}; \quad (h) \begin{bmatrix} -16 & -5 & -2 \\ -\frac{21}{2} & -\frac{33}{2} & -\frac{13}{4} \\ 8 & 13 & 8 \end{bmatrix};$$

$$(i) \begin{bmatrix} -11 & \frac{17}{2} & 7 \\ -6 & \frac{1}{2} & \frac{27}{2} \\ \frac{13}{2} & \frac{1}{4} & \frac{11}{2} \end{bmatrix}; \quad (j) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

Zad 3.

$$(a) [3] \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Zad 4.

$$(a) X = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -8 & 0 \end{bmatrix}; \quad (b) X = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ i & -2 \end{bmatrix}; \quad (c) Y = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix};$$

Zad 5.

$$(a) \begin{cases} X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}; \quad (b) \begin{cases} X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases};$$

Zad 6.

$$(a) -2; \quad (b) 19; \quad (c) 58; \quad (d) 1; \quad (e) 12;$$

Zad 7.

$$(a) 0; \quad (b) -289; \quad (c) -10; \quad (d) -ayz - bxz - cxy; \quad (e) -45; \quad (f) 8; \quad (g) 275; \quad (h) 0;$$

$$(i) -25d - 25c + 25a; \quad (j) -108d + 48c - 24b - 60a;$$

Zad 8.

$$(a) [x_{1,2} = -2, x_3 = 1]; \quad (b) [x_1 = -6, x_2 = -4]; \quad (c) [x_1 = -2, x_2 = 1];$$

Zad 9.

$$(a) x \in \mathbb{R}; \quad (b) x \in (-6, -4); \quad (c) x \in \left(-\infty, -\frac{3\sqrt{5}+3}{2}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{5}-3}{2}, 2\right);$$

Zad 10.

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}; \quad (b) \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 17 & -1 & -5 \\ -7 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & \frac{4}{3} & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{bmatrix};$$

$$(d) \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; \quad (e) \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}; \quad (f) \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$(g) \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{6}{7} & -1 & -\frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & 1 & \frac{1}{7} \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}; \quad (h) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix};$$

**Zad 11.**

$$(a) X = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ -24 & -7 \end{bmatrix}; \quad (b) X = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (c) X = \begin{bmatrix} -\frac{17}{32} & -\frac{9}{32} \\ \frac{11}{32} & \frac{19}{32} \end{bmatrix}; \quad (d) X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{7}{8} & \frac{3}{8} \end{bmatrix};$$

$$(e) X = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 4 \\ 2 & 6 & -6 \\ 2 & \frac{11}{2} & -5 \end{bmatrix}; \quad (f) X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad (g) X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad (h) X = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 0 \\ 6 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix};$$

$$(i) X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ \frac{3}{7} & 1 & \frac{12}{7} \end{bmatrix};$$

**Zad 12.**

(a) 2; (b) 3; (c) 1; (d) 4; (e) 2; (f) 3; (g) 2; (h) 4;

**Zad 13.**

- (a)  $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = 1, \vec{v}_1 = [-1, 2], \vec{v}_2 = [1, 1];$   
 (b)  $\lambda_1 = -2\sqrt{2}, \lambda_2 = 2\sqrt{2}, \vec{v}_1 = [\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1), 1], \vec{v}_2 = [\frac{1}{2}(-1 - \sqrt{2}), 1];$   
 (c)  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1, \vec{v}_1 = [1, 1, 1], \vec{v}_2 = [-2, 1, 1], \vec{v}_3 = [0, -1, 1];$   
 (d)  $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0, \vec{v}_1 = [-3, -3, 1], \vec{v}_2 = [-1, 1, 1], \vec{v}_3 = [0, 0, 1];$   
 (e)  $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -2, \vec{v}_1 = [-1, 1, 2], \vec{v}_2 = [1, -1, 1], \vec{v}_3 = [1, 1, 0];$