

# 北京邮电大学 2017—2018 学年第二学期

## 《概率论与数理统计》期末考试试题标准答案 A

考试注意事项：学生必须将答案内容做在试题答题纸上，做在试题纸上一律无效

一、填空题（本题共 40 分，每小题 4 分）

1. 设口袋中有白球黑球共 9 个，其中有 3 个白球。现不放回地连续任取 3 个，则第一次取得白球，第二次取得黑球，第三次取得白球的概率为  $\frac{1}{14}$ 。

2. 设每次贝努里试验中事件  $A$  发生的概率为  $\frac{1}{5}$ 。现进行 100 次贝努里试验，设事件  $A$  发生的次数记为  $X$ ，事件  $\bar{A}$  发生的次数记为  $Y$ ，则相关系数  $\rho_{XY} = -1$ 。

3. 设随机变量  $X$  的分布函数为  $F(x)$ ，概率密度函数为  $f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$ ，则

$$F(2) = 1 - e^{-6}。$$

4. 某人到达办公室的时间均匀分布在 8~12 时，他的秘书到达办公室的时间均匀分布在 7~9 时，设两人到达的时间相互独立，则他们到达办公室的时间相差不超过 5 分钟的概率为  $\frac{1}{48}$ 。

5. 设随机变量  $X \sim N(2, 1)$ ， $Y \sim B(10, 0.5)$ ，且  $X, Y$  不相关，则  $D(4X + 2Y - 2) = 26$ 。

6. 设随机变量序列  $\{X_i, i=1, 2, \dots\}$  独立同分布，概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad \text{则当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ 依概率收敛到 } 1。$$

7. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自正态总体  $N(0, 1)$  的样本，令  $Y = \bar{X}^2 - \frac{S^2}{n}$ ，其中  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ，

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad \text{则 } E(Y) = 0。$$

8. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自正态总体  $N(\mu, 1)$  的一个样本， $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  为来自正态



总体  $N(\mu, 2^2)$  的一个样本,  $\mu$  的一个无偏估计有形式  $T = a \sum_{i=1}^n X_i + b \sum_{j=1}^m Y_j$ , 则  $a$  和  $b$

应满足条件  $an+bm=1$ 。

9. 设  $X_1, X_2, \dots, X_{15}$  是来自正态总体  $N(0, 4)$  的样本, 则统计量

$Y = \frac{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{10}^2}{2(X_{11}^2 + X_{12}^2 + \dots + X_{15}^2)}$  服从  $F(10, 5)$  分布。(给出分布类型及参数)

10. 已知某种材料干燥时间  $X$  服从  $N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\mu, \sigma^2$  未知, 随机抽查容量为  $n$  的样本,

测得样本均值为  $\bar{X}$ , 样本标准差为  $S$ , 则  $X$  的期望  $\mu$  的置信度等于  $1-\alpha$  的双侧置

信区间为  $\left( \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) \right)$ 。

二、(8分) 设顾客在某银行窗口等待服务的时间  $X$  (分钟) 服从指数分布, 其概率密度函数为:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-\frac{x}{5}}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

顾客在窗口等待服务, 若超过 10 分钟就离开。他一个月要到银行 5 次, 以  $Y$  表示一个月内他未等到服务而离开窗口的次数。

(1) 写出  $Y$  的分布律, (2) 求  $P(Y \geq 1)$ 。

解: (1) 该顾客“一次等待服务未成而离去”的概率为

$$P(X > 10) = \int_{10}^{+\infty} f_X(x) dx = \frac{1}{5} \int_{10}^{+\infty} e^{-\frac{x}{5}} dx = -e^{-\frac{x}{5}} \Big|_{10}^{+\infty} = e^{-2}$$

因此  $Y \sim B(5, e^{-2})$ ,  $Y$  的分布律为  $P(Y = k) = C_5^k e^{-2k} (1 - e^{-2})^{5-k}, k = 0, 1, \dots, 5$  (6分)

(2) 由  $Y$  的分布律, 有

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - (1 - e^{-2})^5. \quad (2 \text{分})$$

三、(10分) 已知函数  $F(x) = \begin{cases} Ae^x, & x < 0, \\ B - Ae^{-x}, & \text{其它}, \end{cases}$  为连续型随机变量  $X$  的分布函数,

求(1)常数  $A, B$ , (2)  $X$  的概率密度函数, (3) 概率  $P\{-1 < X < 2\}$ 。



解. (1) 由分布函数的性质知  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ , 从而  $B=1$ ,

又由连续型随机变量的分布函数的连续性知  $F(x)$  在  $x=0$  处有  $F(0-0) = F(0)$ ,

即  $A=1-A$ , 所以  $A=1/2$ 。(4分)

(2)  $X$  的概率密度函数为  $f(x) = F'(x) = e^{-|x|}/2, -\infty < x < +\infty$ 。(3分)

(3)  $P\{-1 < X < 2\} = F(2) - F(-1) = 1 - e^{-2}/2 - e^{-1}/2$ 。(3分)

四、(10分) 设  $A$  和  $B$  为两个随机事件, 且  $P(A) = \frac{1}{4}, P(B|A) = \frac{1}{3}, P(A|B) = \frac{1}{2}$ ,

$$\text{令 } X = \begin{cases} 1, & A \text{ 发生} \\ 0, & A \text{ 不发生} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & B \text{ 发生} \\ 0, & B \text{ 不发生} \end{cases}$$

求 (1)  $X$  与  $Y$  的联合分布律和边缘分布律,

(2)  $Z = X^2 + Y^2$  的分布律。

解:  $P\{X=1, Y=1\} = P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{12},$

$$P\{X=1, Y=0\} = P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = \frac{1}{6}$$

$$P\{X=0, Y=1\} = P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB) = \frac{1}{12}$$

$$P\{X=0, Y=0\} = P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

$X$  与  $Y$  联合分布律和边缘分布律

$X \backslash Y$	1	0	$X$ 边缘分布律
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$
$Y$ 边缘分布律	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	

(6分)

$$(2) P\{Z=0\} = \frac{2}{3}, P\{Z=1\} = \frac{1}{4}, P\{Z=2\} = \frac{1}{12}$$

$Z$  的分布律为

$Z$	0	1	2
-----	---	---	---



$P$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$
-----	---------------	---------------	----------------

(4分)

五、(12分) 设随机变量  $(X, Y)$  的联合概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-y}, & 0 < x < y < +\infty, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 求  $f_{X|Y}(x|y)$ , (2) 求  $P\{X < 1|Y = 1\}$ , (3) 判断  $X$  与  $Y$  是否独立?

解: (1)  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} y^2 e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$

$$y > 0, f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{2x}{y^2}, & 0 < x < y < +\infty, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (4 \text{分})$$

(2) 由条件密度的性质知  $P\{X < 1|Y = 1\} = \int_{-\infty}^1 f_{X|Y}(x|1) dx,$

又  $f_{X|Y}(x|1) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ , 故  $P\{X < 1|Y = 1\} = \int_0^1 2x dx = 1$  (4分)

(3)  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} xe^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$

由于  $f(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$ , 故不独立. (4分)

六、(12分) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X$  的样本, 总体  $X$  服从参数为  $\lambda$  的泊松分布, 求 (1)  $\lambda$  的最大似然估计  $\hat{\lambda}_1$ , (2)  $\lambda$  的矩估计  $\hat{\lambda}_2$ , (3)  $\hat{\lambda}_1$  和  $\hat{\lambda}_2$  是否是  $\lambda$  的无偏估计。

解: (1) 似然函数为  $L(\lambda) = \prod_{i=1}^n \left[ \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \right] = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n (x_i!)} e^{-n\lambda}$



取对数得  $\ln L(\lambda) = (\sum_{i=1}^n x_i) \ln \lambda - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!) - n\lambda$

两边求导得似然方程  $\frac{d \ln L}{d \lambda} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n x_i - n = 0$

故最大似然估计为  $\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$  (4分)

(2) 因为  $E(X) = \lambda$ ,

故矩估计为  $\hat{\lambda} = A_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}$  (4分)

(3) 因为  $E(\bar{X}) = E(X) = \lambda$ , 所以  $\hat{\lambda}_1$  和  $\hat{\lambda}_2$  都是  $\lambda$  的无偏估计。 (4分)

七、(8分)(1) 某材料质量  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  (单位: kg)。 已知  $\sigma = 8$  kg, 现从

该厂生产的一大批产品中随机抽取 16 个样品, 测得样本均值  $\bar{x} = 575.2$  kg。

问: 这批材料的平均质量可否认为是 570 kg ?

(显著性水平  $\alpha = 5\%$ , 检验假设  $H_0: \mu = 570, H_1: \mu \neq 570$  )

(2) 某材料质量在正常条件下服从正态分布  $N(\mu, 0.048^2)$ 。 某日抽取 5 个样品, 测得其质量为: 1.31, 1.55, 1.34, 1.40, 1.45。

问: 这天的材料质量的总体方差是否正常?

(显著性水平  $\alpha = 10\%$ , 检验假设  $H_0: \sigma^2 = 0.048^2, H_1: \sigma^2 \neq 0.048^2$  )

解: (1) 要检验的假设为  $H_0: \mu = 570, H_1: \mu \neq 570$

$$\text{检验用的统计量 } Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1),$$

$$\text{拒绝域为 } |Z| \geq z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96. \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{由计算知 } |Z| = \frac{575.2 - 570}{8 / \sqrt{16}} = 0.65 \sqrt{16} = 2.6 > 1.96, \text{ 落在拒绝域内,}$$



故拒绝原假设  $H_0$ ，即不能认为这批材料的平均质量为 570 kg. (2 分)

(2) 要检验的假设为  $H_0: \sigma^2 = 0.048^2$ ,  $H_1: \sigma^2 \neq 0.048^2$

$$\text{检验用的统计量 } \chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{\sum_{i=1}^5 (X_i - \bar{X})^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1),$$

$$\text{拒绝域为 } \chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1) = \chi_{0.05}^2(4) = 9.488 \quad \text{或}$$

$$\chi^2 \leq \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) = \chi_{0.95}^2(4) = 0.711 \quad (2 \text{ 分})$$

$$\bar{x} = 1.41$$

由计算知  $\chi_0^2 = 0.0362 / 0.0023 = 15.739 > 9.488$ ，落在拒绝域内，

故拒绝原假设  $H_0$ ，即认为这天的材料质量的总体方差不正常。(2 分)

附表：标准正态分布数值表       $\chi^2$  分布数值表

$z_{0.025} = 1.96$	$\chi_{0.05}^2(4) = 9.488$
$z_{0.05} = 1.65$	$\chi_{0.95}^2(4) = 0.711$
$t_{0.05}(15) = 1.75$	$\chi_{0.05}^2(5) = 11.071$
$t_{0.025}(15) = 2.13$	$\chi_{0.95}^2(5) = 1.145$



$(-\infty, -2.776)$  或  $(2.776, +\infty)$ . .... 1 分

(IV) 由给定的样本值, 计算得

$$\bar{X} = 1259, \quad S^2 = \frac{570}{4}, \quad \text{于是} \quad \left| \frac{\hat{T}}{T} \right| = \left| \frac{1259 - 1277}{\sqrt{570/(4 \times 5)}} \right| = 3.37 \quad \dots 1 \text{ 分}$$

(V) 由于  $\left| \frac{\hat{T}}{T} \right| > 2.776$ , 从而否定  $H_0$ , 认为  $\mu \neq 1277$ , 即该仪器测温度有系统误差. ... 1 分

(2) 设连续随机变量  $X$  的  $r$  绝对矩  $E(|X|^r)$  存在 ( $r > 0$ ), 证明对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 有

$$P\{|X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E(|X|^r)}{\varepsilon^r}.$$

证明: 设随机变量的密度函数为  $f(x)$ , 则

$$P\{|X| \geq \varepsilon\} = \int_{|x| \geq \varepsilon} f(x) dx \leq \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{|x|^r}{\varepsilon^r} f(x) dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|^r}{\varepsilon^r} f(x) dx = \frac{E(|X|^r)}{\varepsilon^r},$$

即  $P\{|X| \geq \varepsilon\} \leq \frac{E(|X|^r)}{\varepsilon^r}$ . 每一步正确给 1 分。

