

《概率论与数理统计》试题 (A)

考试注意事项: 学生必须将答题内容做在答题纸上, 做在试题纸上一律无效

一. 填空题 (每小题 4 分, 共 40 分):

1. 设 A, B, C 为三个随机事件, $A \supset C, B \supset C, P(A)=0.7, P(A-C)=0.4, P(AB)=0.5$, 则 $P(AB-C)=$ 0.2.
2. 袋中有 3 个红球, 2 个白球, 不放回地取两次, 每次取一个球, 则第二次取到红球的概率为 $\frac{3}{5}$.
3. 设二随机变量 $X \sim U(0,2), Y=X^2$, 则 Y 的概率密度函数

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{y}}, & y \in (0,4) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

4. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合分布律为

X \ Y	0	1	2
0	0.1	0.2	0
1	0.3	0.1	0.1
2	0.1	0	0.1

则 $P(XY=0)=$ 0.7.

5. 设 $X \sim N(-1,4), Y \sim N(1,3)$, 且 X 与 Y 相互独立, 则 $Z=X+2Y-1$ 的概率密度函数

$$f_Z(z) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{32}}, \quad z \in (-\infty, +\infty).$$

6. 设 $X \sim \pi(9), Y \sim b(16,0.5)$, X 与 Y 相互独立, 则 $D(X-2Y+1)=$ 25.
7. 随机地抽取其中炮弹 9 发做试验, 测得炮口速度的样本方差 $S^2=11(m/s)^2$, 设炮口速度服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则此种炮弹炮口速度的方差 σ^2 的置信度为 90% 的置信区间为 (5.675, 32.199).
8. 在假设检验中, 显著性水平 α 是指 犯第一类错误的 $(P\{\text{拒绝 } H_0 | H_0 \text{ 真}\} = \alpha)$ 的概率.

9. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1, (\theta > 0) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

设 X_1, \dots, X_n 是来自总体 X 的一个样本, 则参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$.

10. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 独立同分布于 $N(0, \sigma^2)$, 若有

$$P\left\{\left(\frac{X_1+X_2}{X_3-X_4}\right)^2 < c\right\} = 0.90, \text{ 则 } c = \underline{39.86}.$$

$$(\chi_{0.90}^2(8) = 3.490, \chi_{0.95}^2(8) = 2.733, \chi_{0.10}^2(8) = 13.362, \chi_{0.05}^2(8) = 15.507 \\ F_{0.1}(1,1) = 39.86, F_{0.1}(2,2) = 9)$$

二. (10 分) 设一电路装有三个同种元件, 其工作状态相互独立且无故障工作时间均服从以 $\lambda (>0)$ 为参数的指数分布. 当三个元件都无故障时, 电路正常工作, 否则整个电路不能正常工作. 求电路正常工作时间 T 的概率密度函数 $f_T(t)$.

解:

设 T_i : 第 i 个元件无故障工作时间, $i=1, 2, 3$

$$T = \min(T_1, T_2, T_3), \quad T_i \text{ 独立}$$

$$\text{又 } \because f(t_i) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t_i}, & t_i > 0 \\ 0, & t_i \leq 0 \end{cases} \quad (2 \frac{1}{2})$$

$$\therefore F(t_i) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t_i}, & t_i > 0 \\ 0, & t_i \leq 0 \end{cases} \quad (2 \frac{1}{2})$$

$$\text{当 } t \leq 0 \text{ 时, 有 } F(t) = P\{T \leq t\} = 0$$

$$\text{当 } t > 0 \text{ 时, } F(t) = P\{T \leq t\} = 1 - P\{T > t\} = 1 - (1 - P\{T_i \leq t\})^3 = 1 - (1 - (1 - e^{-\lambda t}))^3 = 1 - e^{-3\lambda t}$$

$$\therefore f(t) = \begin{cases} 3\lambda e^{-3\lambda t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \quad (4 \frac{1}{2})$$

$$\text{则 } f(t) = \begin{cases} 3\lambda e^{-3\lambda t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}, \text{ 即 } T \sim E(3\lambda) \quad (2 \frac{1}{2})$$



三. (20分) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} cx, & 0 < x < 1, 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 确定常数 c , 并求 $P\{Y \geq X^2\}$;

(2) 求 $f_X(x)$ 及 $f_{X|Y}(x|y)$;

(3) 讨论 X 与 Y 的独立性;

(4) 求 $Z = X - Y$ 的概率密度函数.

解:

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = c \int_0^1 x^2 dx \int_0^x dy = \frac{c}{3} = 1$$

$$\therefore c = 3$$

$$P\{Y \leq X^2\} = \iint_{y \leq x^2} f(x, y) d\sigma = 3 \int_0^1 x \int_0^{x^2} dy = 3 \int_0^1 x^3 dx = 3 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} \quad (3 \text{分})$$

$$(2) f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-y^2), & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

\therefore 当 $0 < y < 1$ 时, 有

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{2x}{1-y^2}, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(3) \because f(x, y) \neq f_X(x) f_Y(y) \quad \forall (x, y) \in (-\infty, +\infty)$$

$\therefore X$ 与 Y 不独立

$$(4) \because F_Z(z) = P\{Z \leq z\} = P\{X - Y \leq z\} = \iint_{x-y \leq z} f(x, y) dx dy$$

\therefore 当 $z < 0$ 时, $F_Z(z) = 0$

$$\text{当 } 0 \leq z < 1 \text{ 时, } F_Z(z) = \int_0^z \int_0^{x+z} 3x dx dy + \int_z^1 \int_{x-z}^x 3x dx dy = \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}z^3$$

当 $z \geq 0$ 时, $F_Z(z) = 1$

$$\therefore F_Z(z) = \begin{cases} \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}z^3, & 0 \leq z < 1 \\ 1, & z \geq 1 \end{cases}$$

(3分)

$$\text{则 } f_Z(z) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-z^2), & 0 \leq z < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2分)

四. (10分) 设二维随机变量 (X, Y) 的分布律为

	Y	0	1
X			
0		0.1	a
1		b	0.4

已知 $P(X=1|Y=1) = \frac{2}{3}$, 求:

(1) a, b 的值;

(2) $\text{Cov}(X, 2Y)$.

解:

$$(1) \because P(X=1|Y=1) = \frac{P(X=1, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{0.4}{a+0.4} = \frac{2}{3}$$

(3分)

$$\therefore a = 0.2$$

$$\text{又 } 0.1 + 0.2 + b + 0.4 = 1$$

$$\therefore b = 0.3$$

(2分)

$$(2) \text{Cov}(X, 2Y) = 2\text{Cov}(X, Y) = 2(E(XY) - E(X)E(Y))$$

(1分)

\therefore

XY	0	1
P	0.6	0.4

(1分)

且

X	0	1
P	0.3	0.7

(1分)



扫描全能王 创建

Y	0	1
P	0.4	0.6

(1分)

$$\therefore E(XY) = 0.4, E(X) = 0.7, E(Y) = 0.6$$

$$\text{则 } \text{Cov}(X, 2Y) = 2(0.4 - 0.7 \times 0.6) = -0.04$$

(1分)

五. (10分) 设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-2}{\theta}}, & x \geq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 为未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的样本

(1) 求参数 θ 的最大似然估计;

(2) 问 θ 的最大似然估计是否为 θ 的无偏估计?

解:

$$(1) \text{ 似然函数 } L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i - 2n}{\theta}} \quad x_i > 0, i=1 \dots n \quad (2分)$$

$$\therefore \ln L(\theta) = -n \ln \theta - \frac{\sum_{i=1}^n x_i - 2n}{\theta}$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i - 2n}{\theta^2} = 0$$

$$\therefore \theta \neq 0$$

$$\text{有 } -n + \frac{\sum_{i=1}^n x_i - 2n}{\theta} = 0$$

(3分)

$$\text{即 } \theta = \bar{X} - 2 \text{ (唯一驻点)}$$

则有 $\hat{\theta} = \bar{X} - 2$ 是 θ 的最大似然估计

(2) \therefore

$$E(\hat{\theta}) = E(\bar{X} - 2) = E(\bar{X}) - 2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx - 2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-2) f(x) dx$$

$$\text{令 } y = x - 2$$

(3分)

$$\text{上式} = \int_0^{+\infty} y \cdot \frac{1}{\theta} e^{-\frac{y}{\theta}} dy = - \int_0^{+\infty} y d e^{-\frac{y}{\theta}} = - y e^{-\frac{y}{\theta}} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{y}{\theta}} dy = - \theta e^{-\frac{y}{\theta}} \Big|_0^{+\infty} = \theta$$

(2分)

$$\therefore E(\hat{\theta}) = \theta$$

故 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计

六. (10分) 对 5 个正常人和 6 个矽肺病患者分别测量肺活量。设正常人的肺活量及矽肺病人的肺活量分别服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 和 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 。由试验数据计算得样本均值及样本方差如下:

$$\text{正常人的肺活量: } \bar{x} = 2.8, S_1^2 = 0.05$$

$$\text{矽肺病人的肺活量: } \bar{y} = 2.5, S_2^2 = 0.10$$

(1) 试检验 $H_0: \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$; (显著性水平 $\alpha = 0.05$)

(2) 能否认为正常人与矽肺病人的肺活量有显著性差异? (显著性水平 $\alpha = 0.05$)

(3) 求肺活量平均值之差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 0.95 的置信区间。

$$(F_{0.025}(5, 4) = 9.36, F_{0.025}(4, 5) = 7.39, t_{0.025}(9) = 2.262)$$

解:

$$(1) H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2, H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

$$\therefore F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{0.05}{0.10} = 0.5$$

(2分)

$$\text{而 } F_{0.025}(4, 5) = 7.39$$

$$F_{0.025}(4, 5) = \frac{1}{F_{0.025}(5, 4)} = \frac{1}{9.36}$$

$$\therefore \frac{1}{9.36} < F < 7.39$$

(2分)

故接受 H_0

$$(2) H_0: \mu_1 = \mu_2, H_1: \mu_1 \neq \mu_2, \alpha = 0.05$$

$$T = \frac{|\bar{X} - \bar{Y}|}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{0.3}{\frac{1}{3} \cdot \sqrt{0.7 \times \frac{11}{30}}} \approx \frac{0.3}{\frac{1}{3} \cdot 0.5} = 1.8$$

(2分)



扫描全能王 创建

$$\text{其中 } S_w = \sqrt{\frac{4S_1^2 + S_2^2}{9}} = \sqrt{\frac{4 \times 0.05 + 5 \times 0.10}{9}} = \sqrt{\frac{0.7}{9}} = \frac{1}{3} \sqrt{0.7}$$

$$\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{6}} = \sqrt{\frac{11}{30}}$$

$$\text{又 } \because t_{0.025}(9) = 2.262$$

$$\therefore |T| < t_{0.025}(9)$$

(2分)

故接受 H_0 ，认为没有显著性差异

(3) $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 0.95 的置信区间为

$$(\bar{X} - \bar{Y} \pm S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \cdot t_{\frac{\alpha}{2}}(9)) = 0.3 \pm 0.377$$

(2分)

$$\text{即 } (-0.077, 0.667)$$

七. 选做题(10分) 设随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^n}{n!} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\text{求证: } P\{0 < X < 2(n+1)\} \geq \frac{n}{n+1}$$

证明:

$$(1) E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{x^n}{n!} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{(n+1)x^{n+1}}{(n+1)!} e^{-x} dx = n+1 \quad (2分)$$

$$\because D(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

$$\therefore D(X) = (n+2)(n+1) - (n+1)^2 = n+1 \quad (3分)$$

(2) 由切比雪夫不等式可知, $\forall \varepsilon > 0$

$$\text{有 } P\{|X - E(X)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \quad (1分)$$

当 $E(X) = n+1$ 时, 取 $\varepsilon = n+1$, 有

(2分)

$$P\{0 < X < 2(n+1)\} \geq 1 - \frac{(n+1)}{(n+1)^2} = \frac{n}{(n+1)}$$

(2分)

