

北京邮电大学 2016—2017 学年第二学期

《概率论与数理统计》期末考试试题 (A 卷)

考试注意事项: 学生必须将答案内容做在试题答题纸上, 做在试题纸上一律无效

一、单项选择题 (本题共 20 分, 每小题 4 分)

1. 对于任意二事件 A 和 B , 下列说法正确的是 (C)

(A) 若 $AB = \phi$, 则 A, B 一定不独立. (B) 若 $AB = \phi$, 则 A, B 一定独立.

(C) 若 $AB \neq \phi$, 则 A, B 有可能独立. (D) 若 $AB \neq \phi$, 则 A, B 一定独立.

2. 设 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 且 $P(B|A) + P(\bar{B}|\bar{A}) = 1$, 则必有 (C)。

(A) $P(A|B) = P(\bar{A}|B)$. (B) $P(A|B) \neq P(\bar{A}|B)$

(C) $P(AB) = P(A)P(B)$. (D) $P(AB) \neq P(A)P(B)$.

3. 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则概率 $P\{X \leq 1 + \mu\}$, (D)

(A) 随 μ 的增加而变大. (B) 随 σ 的增加而不变.

(C) 随 μ 的增加而减小. (D) 随 σ 的增加而减小.

4. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.1\Phi(x) + 0.9\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 $E(X) =$ (C)

(A) 0. (B) 0.1. (C) 0.9. (D) $\sqrt{\pi}$.

5. 设 n 个随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 独立同分布,

$D(X_1) = \sigma^2$, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 则 (C)

(A) S 是 σ 的无偏估量. (B) S 是 σ 的最大似然估计.

(C) S 是 σ 的相合估计量. (D) S^2 与 \bar{X} 相互独立.



二、填空题 (本题共 20 分, 每小题 4 分)

1. 从数 1, 2, 3, 4 中任取一个数, 记为 X , 再从 $1, 2, \dots, X$ 中任取一个数, 记为 Y , 则

$$P\{Y=2\} = \underline{13/48}.$$

2. 设二维随机变量 (X, Y) 在 xOy 平面上由曲线 $y=x$ 与 $y=x^2$ 所围成的区域上服从

$$\text{均匀分布, 则概率 } P\left\{0 < X < \frac{1}{2}, 0 < Y < \frac{1}{2}\right\} = \underline{\quad\quad\quad} 0.5.$$

3. 设随机变量 X 的密度函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2+2x-1}, -\infty < x < +\infty$, 则 $EX = \underline{\quad\quad\quad} 1$,

$$DX = \underline{\quad\quad\quad} 0.5.$$

4. 设随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 相互独立同服从参数为 2 的指数分布, 即

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad \lambda = 2,$$

则当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 依概率收敛于 $\underline{\quad\quad\quad} 0.5$.

5. 设随机变量 X_1, X_2, \dots, X_n 取自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单样本, 其中 μ, σ^2 未知, 记

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, Q^2 = \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2, \text{ 则假设 } H_0: \mu = 0 \text{ 的 } t \text{ 检验使用统计量}$$

$$T = \underline{\quad\quad\quad} \frac{\bar{X}}{Q} \sqrt{n(n-1)} \text{ 或者 } \left(\frac{\bar{X} - \mu}{Q} \sqrt{n(n-1)} \right) \text{ 或者 } \frac{\bar{X}}{S} \sqrt{n} \text{ 给 4 分}.$$

三、(12 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} cx^2y, & 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 试求常数 c ;

(2) 求条件密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$.



解：由联合密度函数的性质，有 $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^x cx^2 y dx dy = \frac{c}{2} \int_0^1 x^4 dx = \frac{c}{10}$

所以， $c=10$4 分

(2) 当 $0 < x < 1$ 时， $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^x 10x^2 y dy = 5x^4$ ，所以随机变量 X 的边缘密度函

数为 $f_X(x) = \begin{cases} 5x^4, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 4 分

所以当 $0 < x < 1$ 时，

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{2y}{x^2}, & 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad \text{.....4 分}$$

四、(14 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{21}{4} x^2 y, & x^2 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 求 $E(X)$ ， $E(Y)$ ，以及 $E(XY)$ ；

(2) 分别求出 X 与 Y 的边缘密度函数；

(3) 判断随机变量 X 与 Y 是否相关，是否互相独立？

解： $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, y) dx dy = \frac{21}{4} \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 x^3 y dy = \frac{21}{8} \int_{-1}^1 x^3 (1 - x^4) dx = 0$ ，2 分

$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} yf(x, y) dx dy = \frac{21}{4} \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 x^2 y^2 dy = \frac{7}{4} \int_{-1}^1 x^2 (1 - x^6) dx = \frac{7}{9}$ ；2 分

$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y) dx dy = \frac{21}{4} \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 x^3 y^2 dy = \frac{7}{4} \int_{-1}^1 x^3 (1 - x^6) dx = 0$ ；2 分

(2) 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时， $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \frac{21}{4} \int_{x^2}^1 x^2 y dy = \frac{21}{8} x^2 (1 - x^4)$ ，随机变量 X 的边缘



$$\text{密度函数为 } f_X(x) = \begin{cases} \frac{21}{8}x^2(1-x^4), & -1 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

当 $-1 \leq y \leq 1$ 时, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \frac{21}{4} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} x^2 y dx = \frac{7}{2} y^{\frac{5}{2}}$; 随机变量 Y 的边缘密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{7}{2} y^{\frac{5}{2}}, & 0 \leq y \leq 1; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

(3) 由于 $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0$, 所以 X 与 Y 不相关.....2 分

$f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, $x^2 \leq y \leq 1$, 所以 X 与 Y 不独立。.....2 分

五、(12 分)

(1) 设系统由 100 个互相独立的部件组成, 运行期间每个部件损坏的概率为 0.1, 至少有 85 个部件是完好时系统才能正常工作, 求系统正常工作的概率。

(2) 若上述系统由 n 个部件组成, 至少有 80% 的部件完好时系统才能正常工作, 问 n 至少多大才能使系统正常工作的概率不小于 0.95。

附录:

$\Phi(1.645) = 0.95$, $\Phi(1.66) = 0.9525$, 其中 Φ 表示正态分布的分布函数。

解: 设系统中正常工作的部件个数为 X , 则 $X \sim B(100, 0.9)$ 。

(1) 由棣莫佛-拉普拉斯中心极限定理知

$$\begin{aligned} P\{X \geq 85\} &= 1 - P\{X < 85\} \\ &= 1 - P\left\{\frac{X - 100 \times 0.9}{\sqrt{100 \times 0.9 \times 0.1}} < \frac{85 - 100 \times 0.9}{\sqrt{100 \times 0.9 \times 0.1}}\right\} \\ &= 1 - P\left\{\frac{X - 90}{3} < -\frac{5}{3}\right\} \approx 1 - \Phi\left(-\frac{5}{3}\right) \dots\dots\dots 6 \text{ 分} \\ &= \Phi\left(\frac{5}{3}\right) = 0.9525. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & P\{X \geq 0.8n\} \geq 1 - P\{X < 0.8n\} \\
 (2) \quad & = 1 - P\left\{\frac{X - 0.9n}{\sqrt{n \times 0.9 \times 0.1}} < \frac{0.8n - 0.9n}{\sqrt{n \times 0.9 \times 0.1}}\right\} \dots\dots\dots 6 \text{ 分 (酌情给分)} \\
 & \approx 1 - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{3}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) \geq 0.95.
 \end{aligned}$$

于是 $\frac{\sqrt{n}}{3} \geq 1.645$, 即 $n \geq 24.35$.

六 (12 分) 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta}}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中 $\theta > 0$ 为待估参数, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的简单随机样本,

(1) 求 θ 的矩估计量;

(2) 求 θ 的最大似然估计量.

解: (1)

$$\begin{aligned}
 \mu_1 = E(X) &= \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\theta} e^{-\frac{x^2}{2\theta}} dx = \frac{\sqrt{2\pi\theta}}{\theta} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{x^2}{2\theta}} dx \\
 &= \frac{\sqrt{2\pi\theta}}{2\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{x^2}{2\theta}} dx = \sqrt{\frac{\pi\theta}{2}}, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}
 \end{aligned}$$

所以 $\theta = \frac{2}{\pi} \mu_1^2$,

故 θ 的矩估计量为

$$\hat{\theta} = \frac{2}{\pi} \bar{X}^2; \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

(2)

样本的似然函数为

$$L(\theta) = \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{\theta^n} e^{-\frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^n x_i^2}, x_1, x_2, \dots, x_n > 0 \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$



$$\ln L(\theta) = -n \ln \theta - \frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n \ln x_i, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

令

$$\frac{d \ln L}{d \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

解得

$$\theta = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n x_i^2, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

所以 θ 的最大似然估计为

$$\hat{\theta} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n x_i^2, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

即得 θ 的最大似然估计量为

$$\hat{\theta} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

七、(10分)

(1) 用仪器间接测量温度 5 次, 温度 ($^{\circ}\text{C}$) 值为: 1250, 1265, 1245, 1260, 1275. 而用另一种精密仪器测得该温度为 1277°C (可看做真值), 问用此仪器测温度有无系统偏差 (测量的温度服从正态分布, 检验水平 $\alpha = 0.05$)? (6 分)

t 分布数值表

$$t_{0.9995}(5) = -6.859, \quad t_{0.9995}(4) = -8.610, \quad t_{0.975}(4) = -2.776, \quad t_{0.975}(5) = -2.571.$$

解: (I) 提出零假设 $H_0 = \mu = 1227$. $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

(II) 选择统计量 $T = \frac{\bar{X} - 1227}{S/\sqrt{n}} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

(III) 由检验水平 $\alpha = 0.05$, 得 $t_{0.975}(4) = 2.776$. 否定域为



$$u_{\frac{\alpha}{2}} = u_{0.025} = 1.96$$

$$\text{经计算得 } |U| = \left| \frac{\bar{x} - 221}{\sigma / \sqrt{n}} \right| = \left| \frac{219 - 221}{5 / \sqrt{10}} \right| \approx 1.265 < 1.96 \quad (3 \text{ 分})$$

故拒绝原假设 H_0 ，认为改变工艺后其拉伸强度有显著变化。 (2 分)

附表：标准正态分布的分位数 $u_{0.025} = 1.96$ ，t 分布的分位数 $t_{0.025}(14) = 2.145$

