DISCRETE LOGIC

TROY UNIVERSITY

HANOI UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

Instructor: TS. Hồ Minh Toàn

Letter Grad	*Final Ex 40%*	*Midterm 30%*	*Assig*	*Quiz*	*Att*	***Total Marks***
A	99	94	10	10	10	**97.8**

Troy University Resources

- Đây là tài liệu tôi đã mang vào thi (môn này được mang tài liệu cả GK lẫn CK), tổng hợp được gần như đầy đủ các kiến thức Toán rời rạc, tuy vậy vẫn còn thiếu nhiều kiến thức do kiến thức đấy quá dễ nên tôi đã tự lược bỏ. Và vì ở các học phần sau này, bạn có thể cần viết báo cáo bằng LaTeX, nên tôi đã convert file này sang LaTeX, bạn có thể lấy mã nguồn LaTeX cùng với thư mục chứa PDF nếu có nhu cầu tinh chỉnh. Feel free to edit any way you want.
- Bắt đầu in từ trang 3 là đẹp ♡. Good luck in this course!!!

I. Logic (Logic)

Logic, hay còn gọi là *lý luận học*, là nền tảng của toán học và khoa học máy tính. Nó cung cấp các quy tắc để suy luận và chứng minh một cách chính xác. Chúng ta sẽ tập trung vào hai phần chính: *mệnh đề* (propositional logic) và *vị từ* (predicate logic).

- **Mệnh đề (Proposition):**
  - Là một câu khẳng định có thể *đúng* (True - T) hoặc *sai* (False - F), nhưng không thể vừa đúng vừa sai.
  - Ví dụ:
    - "Hà Nội là thủ đô của Việt Nam." (Đúng)
    - "2 + 2 = 5." (Sai)
    - "Hôm nay trời đẹp không?" (Không phải mệnh đề - câu hỏi)
    - "Hãy ngồi xuống!" (Không phải mệnh đề - câu mệnh lệnh)
- **Các toán tử logic (Logical Operators):**
  - Dùng để kết hợp các mệnh đề đơn giản thành mệnh đề phức tạp.
  - Các toán tử cơ bản:
    - **Phủ định (Negation - ¬ hoặc ~):** "Không p" (¬p). Đảo ngược giá trị chân lý của mệnh đề.
      - Ví dụ: p: "Trời đang mưa." ¬p: "Trời không mưa."
    - **Và (Conjunction - ∧):** "p và q" (p ∧ q). Chỉ đúng khi cả p và q đều đúng.
      - Ví dụ: p: "Trời đang mưa." q: "Tôi có ô." p ∧ q: "Trời đang mưa và tôi có ô."
    - **Hoặc (Disjunction - ∨):** "p hoặc q" (p ∨ q). Chỉ sai khi cả p và q đều sai.
      - Ví dụ: p: "Tôi sẽ đi xem phim." q: "Tôi sẽ đi ăn tối." p ∨ q: "Tôi sẽ đi xem phim hoặc tôi sẽ đi ăn tối."
    - **Kéo theo (Implication - →):** "Nếu p thì q" (p → q). Chỉ sai khi p đúng và q sai. (p là *điều kiện đủ*, q là *điều kiện cần*).
      - Ví dụ: p: "Trời mưa." q: "Đường ướt." p → q: "Nếu trời mưa thì đường ướt."
    - **Tương đương (Equivalence - ↔):** "p khi và chỉ khi q" (p ↔ q). Đúng khi p và q có cùng giá trị chân lý.
      - Ví dụ: p: "Tam giác ABC là tam giác đều." q: "Tam giác ABC có ba cạnh bằng nhau." p ↔ q: "Tam giác ABC là tam giác đều khi và chỉ khi tam giác ABC có ba cạnh bằng nhau."

Troy University Resources

Bảng chân trị (Truth Table):

- Liệt kê tất cả các trường hợp có thể xảy ra của các biến mệnh đề và giá trị chân lý của mệnh đề phức tạp tương ứng.
- Ví dụ (Bảng chân trị cho các toán tử cơ bản):

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

Let p and q be propositions. The *exclusive or* of p and q, denoted by $p \oplus q$ (or p XOR q), is the proposition that is true when exactly one of p and q is true and is false otherwise.

- **Logic vị từ (Predicate Logic):**
  - Mở rộng của logic mệnh đề, cho phép biểu diễn các mệnh đề liên quan đến *biến* và *tập hợp*.
  - **Vị từ (Predicate):** Một mệnh đề chứa biến, trở thành mệnh đề khi biến được gán giá trị cụ thể.
    - Ví dụ: P(x): "x là số nguyên tố."
      - P(2): "2 là số nguyên tố." (Đúng)
      - P(4): "4 là số nguyên tố." (Sai)
  - **Lượng từ (Quantifiers):**
    - **Với mọi (Universal Quantifier - ∀):** "Với mọi x, P(x) đúng."
      - Ví dụ: ∀x (x ∈ Số thực, $x^2 \geq 0$): "Với mọi số thực x, bình phương của x luôn lớn hơn hoặc bằng 0."
    - **Tồn tại (Existential Quantifier - ∃):** "Tồn tại x sao cho P(x) đúng."
      - Ví dụ: ∃x (x ∈ Số nguyên, $x^2 = 9$): "Tồn tại số nguyên x sao cho bình phương của x bằng 9." (Đúng, vì x = 3 hoặc x = -3)
- **Ngụy biện logic (logical fallacies):** Các lập luận sai, nhưng có vẻ đúng.

II. Propositional Equivalences (Các tương đương mệnh đề)

- Hai mệnh đề phức tạp được gọi là *tương đương logic* nếu chúng có cùng giá trị chân lý trong mọi trường hợp. Ký hiệu: $\equiv$
- Ví dụ:
  - $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ (Luật De Morgan)
  - $p \to q \equiv \neg p \vee q$
  - $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (Luật phân phối)

TABLE 6 Logical Equivalences.

Equivalence	*Name*
$p \wedge \mathbf{T} \equiv p$ $p \vee \mathbf{F} \equiv p$	Identity laws
$p \vee \mathbf{T} \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$	Domination laws
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	Idempotent laws
$\neg(\neg p) \equiv p$	Double negation law
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	Commutative laws
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	Associative laws
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Distributive laws
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	De Morgan's laws
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	Absorption laws
$p \vee \neg p \equiv \mathbf{T}$ $p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$	Negation laws

Troy University Resources

TABLE 7 Logical Equivalences Involving Conditional Statements.

$p \to q \equiv \neg p \vee q$
$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$
$p \vee q \equiv \neg p \to q$
$p \wedge q \equiv \neg(p \to \neg q)$
$\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$
$(p \to q) \wedge (p \to r) \equiv p \to (q \wedge r)$
$(p \to r) \wedge (q \to r) \equiv (p \vee q) \to r$
$(p \to q) \vee (p \to r) \equiv p \to (q \vee r)$
$(p \to r) \vee (q \to r) \equiv (p \wedge q) \to r$

TABLE 8 Logical Equivalences Involving Biconditional Statements.

$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$
$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

- Converse (đảo) của p → q là q → p.
- Contrapositive (phản đảo) của p → q là ¬q → ¬p. Contrapositive có cùng giá trị chân lý với conditional statement ban đầu.
- Inverse (phủ định) của p → q là ¬p → ¬q.

Because conditional statements play such an essential role in mathematical reasoning, a variety of terminology is used to express $p \to q$. You will encounter most if not all of the following ways to express this conditional statement:

"if p, then q"	"p implies q"
"if p, q"	"p only if q"
"p is sufficient for q"	"a sufficient condition for q is p"
"q if p"	"q whenever p"
"q when p"	"q is necessary for p"
"a necessary condition for p is q"	"q follows from p"
"q unless $\neg p$"	"q provided that p"

BUT == AND

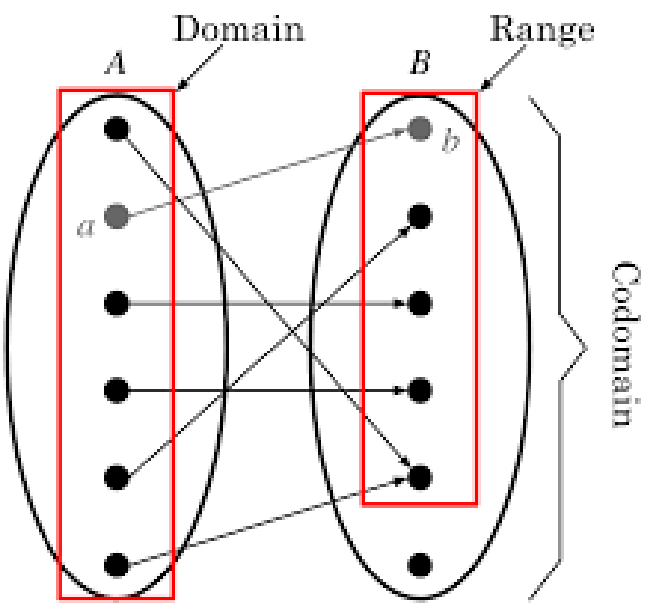
Note that in logic the word "but" sometimes is used instead of "and" in a conjunction. For example, the statement "The sun is shining, but it is raining" is another way of saying "The sun is shining and it is raining." (In natural language, there is a subtle difference in meaning between "and" and "but"; we will not be concerned with this nuance here.)

Only if

For example, suppose your professor tells you

"You can receive an A in the course only if your score on the final is at least 90%."

Then, if you receive an A in the course, then you know that your score on the final is at least 90%. If you do not receive an A, you may or may not have scored at least 90% on the final. Be careful not to use "q only if p" to express $p \rightarrow q$ because this is incorrect. The word "only" plays an essential role here. To see this, note that the truth values of "q only if p" and $p \rightarrow q$ are different when p and q have different truth values. To see why "q is necessary for p"



Negation of Quantifiers

Negation of Quantifiers

- Distributing a negation operator across a quantifier changes a universal to an existential and vice versa.

$$\sim\forall x\, P(x) \Leftrightarrow \exists x \sim P(x)$$

$$\sim \exists x\, P(x) \Leftrightarrow \forall x \sim P(x)$$

Troy University Resources

Với mọi thì dùng kéo theo, tồn tại thì dùng and

Precedence of Logical Operators

Precedence of Logical Operators

- Parentheses gets the highest precedence
- Then:

Operator	Precedence
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

Rules of Inference

Premise entails sth

Some Rules of Inference

p $p \rightarrow q$ --- $\therefore q$	$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$	Modus ponens *mode that affirms*
$\neg q$ $p \rightarrow q$ --- $\therefore \neg p$	$[\neg q \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow \neg p$	Modus tollens *mode that denies*
$p \rightarrow q$ $q \rightarrow r$ --- $\therefore p \rightarrow r$	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$	Hypothetical syllogism
$p \vee q$ $\neg p$ --- $\therefore q$	$[(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q$	Disjunctive syllogism

Some Rules of Inference

p --- ∴ p ∨ q	p → p ∨ q	Addition
p ∧ q --- ∴ p	p ∧ q → p	Simplification
p q --- ∴ p ∧ q	[(p) ∧ (q)] → (p ∧ q)	Conjunction
p ∨ q ¬p ∨ r --- ∴ q ∨ r	[(p ∨ q) ∧ (¬p ∨ r)] → (q ∨ r)	Resolution

Rules of Inference for Quantified Statements

Rules of Inference for Quantified Statements

TABLE 2 Rules of Inference for Quantified Statements.

Rule of Inference	*Name*
$\forall x\, P(x)$ $\therefore P(c)$	Universal instantiation
$P(c)$ for an arbitrary c $\therefore \forall x\, P(x)$	Universal generalization
$\exists x\, P(x)$ $\therefore P(c)$ for some element c	Existential instantiation
$P(c)$ for some element c $\therefore \exists x\, P(x)$	Existential generalization

Troy University Resources

Fallacy

Fallacy of Denying the Hypothesis

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \neg p \\ \hline \therefore \neg q \end{array} \qquad ((p \to q) \wedge \neg p) \to \neg q$$

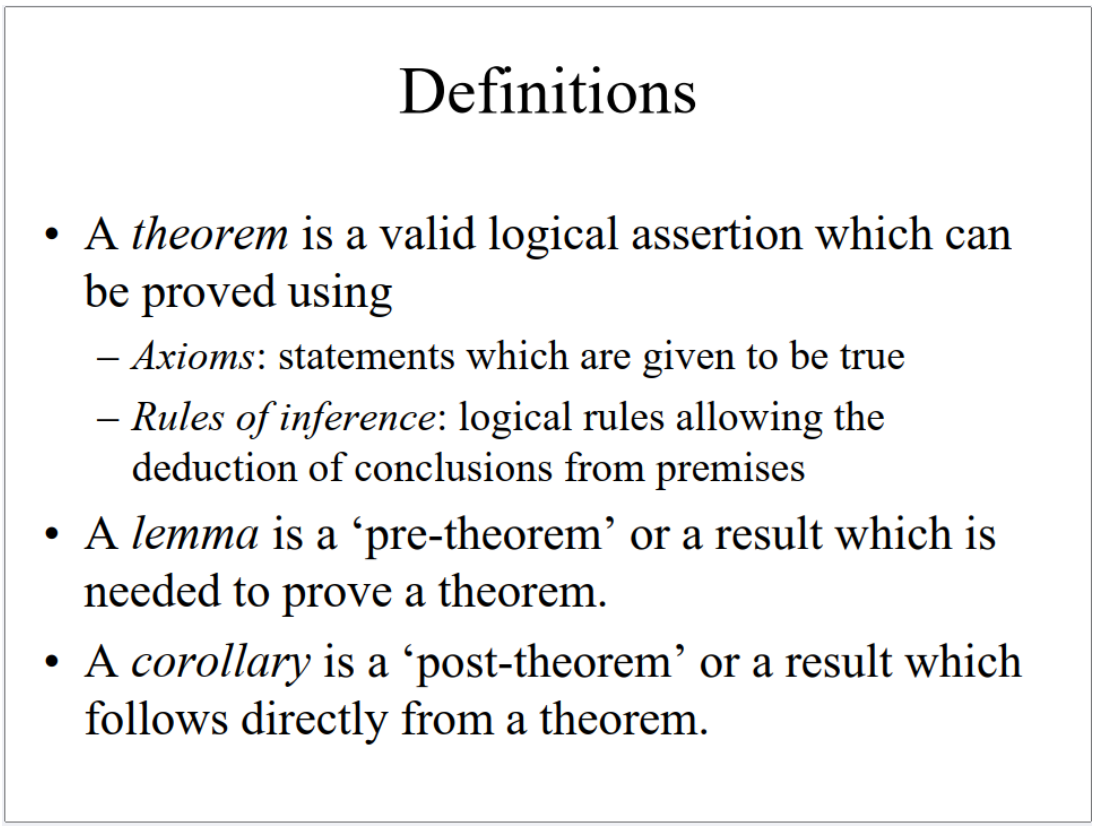
This argument is fallacious.
$((p \to q) \wedge \neg p) \to \neg q$ is not a tautology and therefore not a rule of inference.

Fallacy of Affirming the Consequent

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \\ \hline \therefore p \end{array} \qquad ((p \to q) \wedge q) \to p$$

- This argument is fallacious. $((p \to q) \wedge q) \to p$ is not a tautology and therefore not a rule of inference.

Prove sth:



Các phương pháp chứng minh trong logic toán học

- **Chứng minh hiển nhiên (Trivial proof):** Chứng minh mệnh đề $p \to q$ là đúng dựa trên việc q luôn đúng, bất kể p có đúng hay không.
- **Chứng minh chân không (Vacuous proof):** Chứng minh mệnh đề $p \to q$ là đúng dựa trên việc p luôn sai. Trong trường hợp này, mệnh đề điều kiện luôn đúng theo định nghĩa logic.
- **Chứng minh tồn tại (Existence proof):** Chứng minh một mệnh đề có dạng $\exists x\, P(x)$ là đúng. Có hai cách:
  - **Tồn tại xây dựng (Constructive existence proof):** Chỉ ra một phần tử cụ thể c sao cho $P(c)$ đúng.
  - **Tồn tại không xây dựng (Non-constructive existence proof):** Chứng minh rằng $\exists x\, P(x)$ là đúng mà không cần chỉ ra cụ thể phần tử x, thường thông qua phương pháp phản chứng.
- **Chứng minh duy nhất (Uniqueness proof):** Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một phần tử thỏa mãn một tính chất nào đó. Gồm hai bước: chứng minh **tồn tại**, và sau đó chứng minh **tính duy nhất** (nghĩa là nếu có hai phần tử thỏa mãn thì chúng phải bằng nhau).

Troy University Resources

Counterexample: 1 phương pháp khá hữu ích

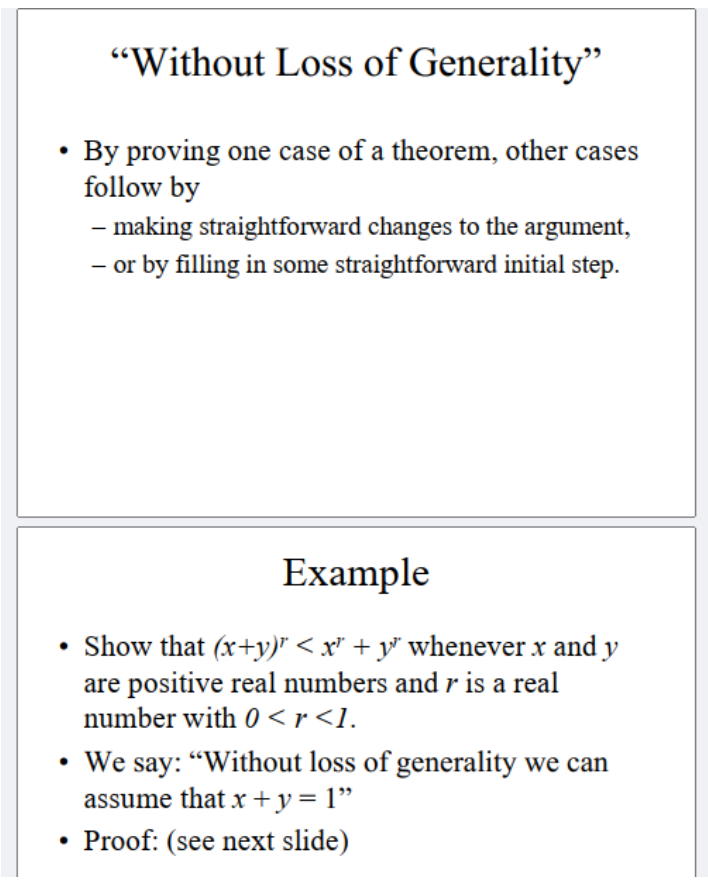
Proof by Cases

- Break the premise of $p \rightarrow q$ into an equivalent disjunction of the form $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$
- Then use the equivalence
  $[(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \rightarrow q] \Leftrightarrow [(p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \ldots \wedge (p_n \rightarrow q)]$
- Each of the implications $p_i \rightarrow q$ is a *case*.
- You must
  - Convince the reader that the cases are inclusive (i.e., they exhaust all possibilities)
  - Establish all implications

Chứng minh phản chứng (indirect proof):

1. Ta luôn đi từ giả sử mệnh đề đầu là sai
2. ⇒ ra 1 cái đúng
3. Ta sẽ từ mệnh đề đúng suy ra 1 cái mà phủ định đc vs cái ta đã giả sử là sai, contradiction

1) Với dạng $p \to q$ ta giả sử $p \to q$ wrong ⇒ mệnh đề này chỉ wrong khi p đúng và q sai, nghĩa là q sai thì $\sim q$ chắc chắn đúng
2) Ta có mệnh đề true mới mà ta vừa establish là p true and $\sim q$ true, $p \to \sim q$ true.
3) Ta bắt đầu với giả sử mới là $\sim q$ true then ta làm thế nào đi đến 1 cái $\sim p$ từ đó ta kết luận đc contradiction



Troy University Resources

🔍 Common scenarios:

1. Symmetric variables:

Let's say you want to prove something about two numbers a and b, and their roles are **interchangeable** (i.e., symmetric).

Example:

> Prove that $\min(a, b) \leq \frac{a+b}{2} \leq \max(a, b)$

You can say:

> WLOG, assume $a \leq b$, then prove the inequality.
> Because if $a > b$, you could just switch the names.

---

2. Sorting or ordering:

You need to prove a property about a set or list, and order doesn't matter.

Example:

> Prove that in any 3 real numbers, at least two of them are within distance d.
> You can say: WLOG, assume $a \leq b \leq c$
> Then prove the property based on sorted order.

3. Label symmetry:

In geometry or graph theory, labels can be renamed.

Example:

> In triangle ABC, prove some property involving sides.
> Say: WLOG, assume $AB \leq AC \leq BC$

III. Sets and Set Operations (Tập hợp và các phép toán tập hợp)

- **Tập hợp (Set):** Một nhóm các đối tượng phân biệt (không lặp lại).
  - Ví dụ: A = {1, 2, 3}, B = {a, b, c}
- **Các phép toán:**
  - **Hợp (Union - ∪):** A ∪ B = {x | x ∈ A hoặc x ∈ B}
  - **Giao (Intersection - ∩):** A ∩ B = {x | x ∈ A và x ∈ B}
  - **Hiệu (Difference - \):** A \ B = {x | x ∈ A và x ∉ B}
  - **Phần bù (Complement - A'):** A' = {x | x ∉ A} (trong một tập vũ trụ U nào đó)
    - $\overline{A} = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$

The **set-builder notation** for the **symmetric difference** of two sets A and B, written as $A \oplus B$ (or $A \triangle B$), is the set of elements that are in either A or B, but **not in both**.

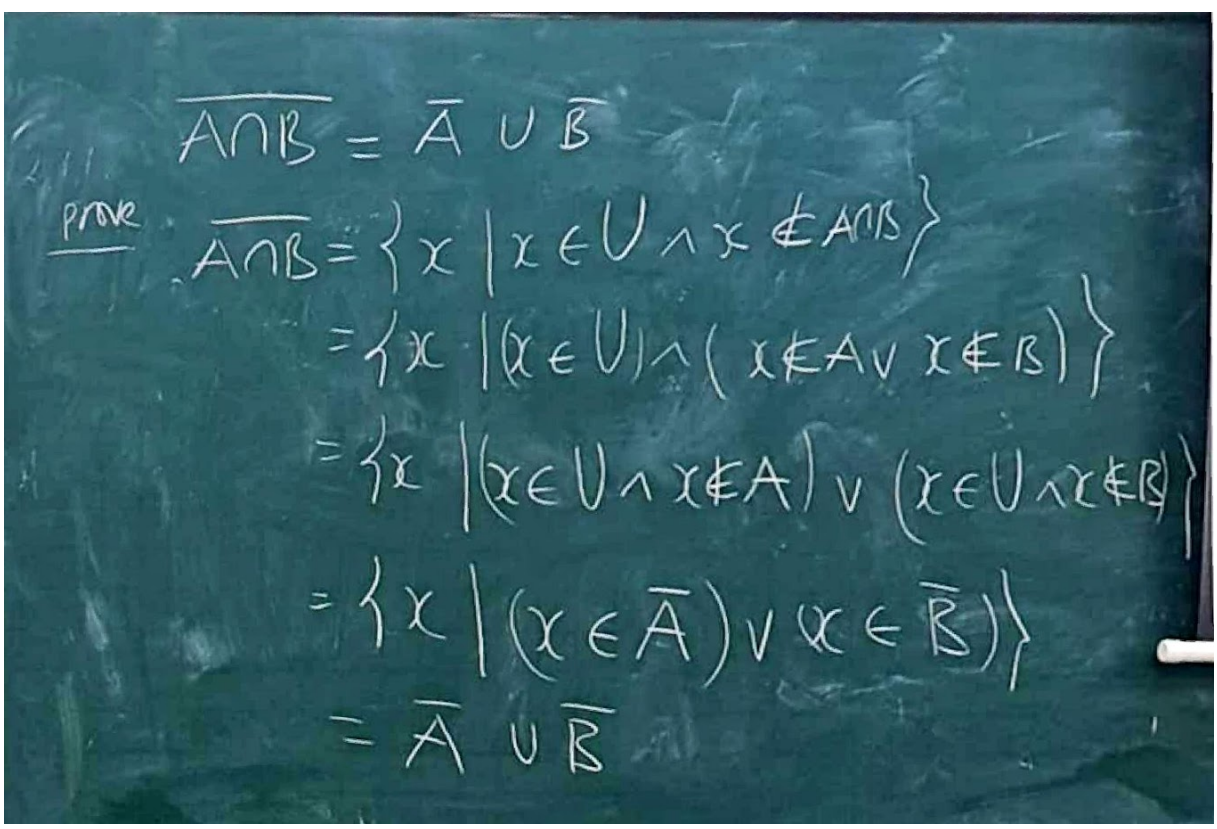
Set-builder notation:

$$A \oplus B = \{x \mid (x \in A \cup B) \wedge (x \notin A \cap B)\}$$

Or equivalently:

$$A \oplus B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$$

Prove by set builder:



Troy University Resources

Powerset of the empty set

The powerset of the empty set is:

$P(\varnothing) = \{\varnothing\}$

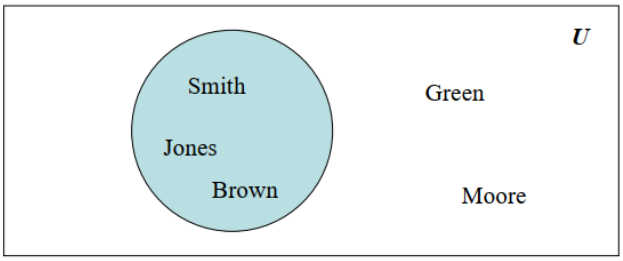
Note $P(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

Venn diagrams

- In Venn diagrams:
  - A rectangle represents the universal set (universe of discourse)
  - Circles (and other geometric figures) represents sets
  - Points (or words) represent elements

Venn Diagrams

- Assistant professors at Blivet State University who have taught MTH 2215:



Công thức tập

Membership table: giống truth table

Set Identities

$A \cup \varnothing = A$	Identity
$A \cap U = A$	
$A \cup U = U$	Domination
$A \cap \varnothing = \varnothing$	
$A \cup A = A$	Idempotent
$A \cap A = A$	
$\overline{\overline{A}} = A$	Double Complement

Set Identities (Cont.)

$A \cup B = B \cup A$	Commutative
$A \cap B = B \cap A$	
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	Associative
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	Distributive
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	
$A \cup (A \cap B) = A$	Absorption
$A \cap (A \cup B) = A$	
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	De Morgan's
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	

A $\subseteq$ B is true if and only if the following quantification is true:

$\forall x ((x \in A) \rightarrow (x \in B))$

For every set S,

$\varnothing \subseteq S$

$S \subseteq S$

Troy University Resources

A is a proper subset of B iff:

$$\forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$$

1. Double Inclusion (Mutual Subset Method)

This is the most common and rigorous method:

- Prove: $A \subseteq B$
- Prove: $B \subseteq A$

If both are true, then $A = B$.

✅ **Với 2 tập hợp A, B:**

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Và nếu bạn muốn số phần tử của **tập lũy thừa**:

$$|\mathcal{P}(A \cup B)| = 2^{|A|+|B|-|A \cap B|}$$

✅ **Với 3 tập hợp A, B, C:**

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Và tập lũy thừa của hợp:

$$|\mathcal{P}(A \cup B \cup C)| = 2^{|A|+|B|+|C|-|A \cap B|-|A \cap C|-|B \cap C|+|A \cap B \cap C|}$$

IV. Functions (Hàm số)

- **Hàm số (Function):** Một ánh xạ từ tập hợp A (miền xác định) đến tập hợp B (miền giá trị), sao cho mỗi phần tử trong A tương ứng với *duy nhất* một phần tử trong B.
  - Ký hiệu: $f: A \rightarrow B$
  - Ví dụ: $f(x) = x^2$ (với x là số thực)

Let A and B be nonempty sets. A *function* f from A to B is an assignment of exactly one element of B to each element of A. We write $f(a) = b$ if b is the unique element of B assigned by the function f to the element a of A. If f is a function from A to B, we write

🔹 ***Surjectivity:***

We need to show that for every $y \in \mathbb{R}$, there exists an $x \in \mathbb{R}$ such that:

$$f(x) = y \Rightarrow ax + b = y \Rightarrow x = \frac{y - b}{a}$$

→ Since $a \neq 0$, this $x \in \mathbb{R}$ exists for every $y \in \mathbb{R}$

→ So f is **surjective**.

Hàm trần và sàn

$$\begin{aligned}
\lfloor x \rfloor &= m \quad \text{if and only if} \quad m \leq x < m + 1, \\
\lceil x \rceil &= n \quad \text{if and only if} \quad n - 1 < x \leq n, \\
\lfloor x \rfloor &= m \quad \text{if and only if} \quad x - 1 < m \leq x, \\
\lceil x \rceil &= n \quad \text{if and only if} \quad x \leq n < x + 1.
\end{aligned}$$

V. Sequences and Summations (Dãy số và tổng)

- **Dãy số (Sequence):** Một hàm số từ tập hợp số tự nhiên (hoặc tập con của nó) đến một tập hợp khác.
  - Ví dụ: $a_n = 2n$ (dãy số chẵn)
- **Tổng (Summation):** Tổng của các phần tử trong một dãy số.
  - Ký hiệu: Σ (Sigma)
  - Ví dụ: $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

Useful Summation Formulae

TABLE 2 Some Useful Summation Formulae.

Sum	*Closed Form*
$\sum_{k=0}^{n} ar^k \ (r \neq 0)$	$\frac{ar^{n+1} - a}{r - 1}, r \neq 1$
$\sum_{k=1}^{n} k$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{k=1}^{n} k^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{k=1}^{n} k^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{k=0}^{\infty} x^k, \lvert x \rvert < 1$	$\frac{1}{1-x}$
$\sum_{k=1}^{\infty}, kx^{k-1}, \lvert x \rvert < 1$	$\frac{1}{(1-x)^2}$

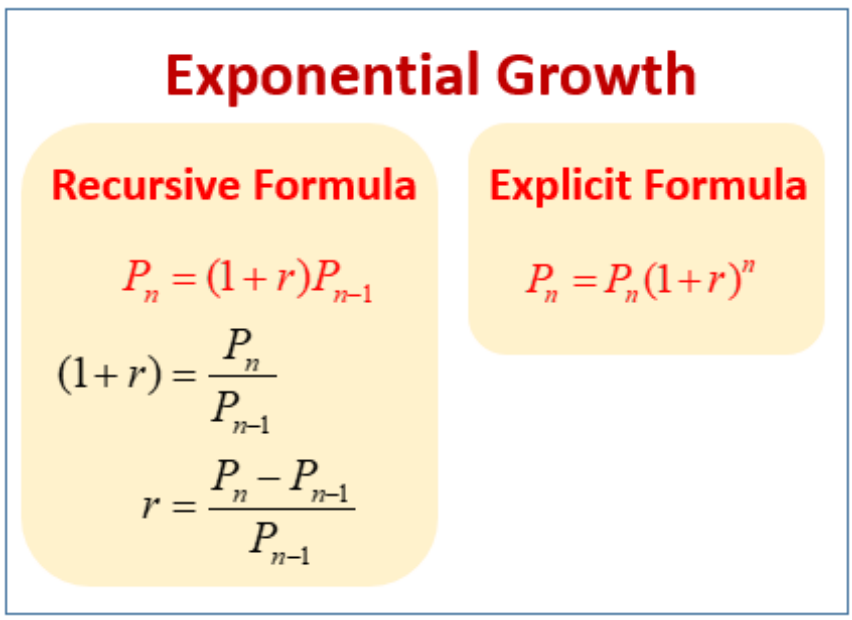
Copyright © The McGraw-Hill Companies, Inc. Permission required for reproduction or display.

Key Point

If a and c are constants, and if $f(k)$ and $g(k)$ are functions of k, then

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} c &= nc, \\
\sum_{k=1}^{n} ck &= c\sum_{k=1}^{n} k, \\
\sum_{k=1}^{n} (k+c) &= nc + \sum_{k=1}^{n} k, \\
\sum_{k=1}^{n} (ag(k)+c) &= nc + a\sum_{k=1}^{n} g(k), \\
\sum_{k=1}^{n} (f(k)+g(k)) &= \sum_{k=1}^{n} f(k) + \sum_{k=1}^{n} g(k).
\end{aligned}$$

Explicit Formula



Công thức truy hồi thuần nhất hệ số hằng

Đặc điểm	Thuần nhất hệ số hằng *(Homogeneous linear recurrence with constant coefficients)*
Dạng tổng quát	$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k}$
Phần không thuần nhất *(Non-homogeneous term)*	Không có (F(n) = 0)
Cách giải	Giải phương trình đặc trưng *(characteristic equation)* để tìm nghiệm tổng quát
Ví dụ	$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$

Troy University Resources

📘 Ví dụ 1: Truy hồi thuần nhất

Cho truy hồi:

$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, với $a_0 = 2$, $a_1 = 3$

Bước 1: Viết phương trình đặc trưng

Giả sử nghiệm có dạng $a_n = r^n$, ta thế vào truy hồi:

$r^n = 3r^{n-1} - 2r^{n-2}$

$\Rightarrow r^2 = 3r - 2$

$\Rightarrow r^2 - 3r + 2 = 0$

Bước 2: Giải phương trình đặc trưng

$r^2 - 3r + 2 = 0$

$\Rightarrow r = 1, r = 2$

Bước 2: Giải phương trình đặc trưng

$r^2 - 3r + 2 = 0$

$\Rightarrow r = 1, r = 2$

Bước 3: Viết nghiệm tổng quát

Vì có 2 nghiệm đơn (không trùng), nghiệm tổng quát là:

$a_n = A \cdot 1^n + B \cdot 2^n = A + B \cdot 2^n$

Bước 4: Dùng điều kiện đầu để tìm A, B

$a_0 = 2 \Rightarrow A + B = 2$

$a_1 = 3 \Rightarrow A + 2B = 3$

Giải hệ:

- $A + B = 2$
- $A + 2B = 3$

Để tìm recurrence relation, explicit formula (solution)

Số term = order

🔢 1. What is a first-order recurrence?

A first-order recurrence has the form:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + F(n)$$

Nghĩa là lặp 1 lần (bậc 2 thì + Bnr^n)

5. Tùy loại nghiệm:

- Nếu nghiệm **phân biệt**: $a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$
- Nếu nghiệm **trùng**: $a_n = \alpha_1 r^n + \alpha_2 n r^n$

Bậc 3 thì

✅ Nghiệm tổng quát:

$$a_n = (A + Bn + Cn^2) \cdot \alpha^n$$

Vì với nghiệm bội $k = 3$, ta có các nghiệm độc lập tuyến tính:

- α^n
- $n\alpha^n$
- $n^2\alpha^n$

Troy University Resources

Còn các bậc khác ko xét vì ko thi

🧠 **Tóm gọn mẹo nhớ:**

Nếu F(n)	Trùng với nghiệm thuần nhất...	Thì đoán nghiệm riêng là...
r^n	xuất hiện 1 lần	$Cn \cdot r^n$
r^n	xuất hiện 2 lần (nghiệm kép)	$Cn^2 \cdot r^n$
r^n	xuất hiện k lần	$Cn^k \cdot r^n$

Làm xong nhớ mở ngoặc điều kiện của n

Tổng kiểu Telescoping (ống nhòm)

35. Show that $\sum_{j=1}^{n}(a_j - a_{j-1}) = a_n - a_0$, where $a_0, a_1, \ldots, a_n$ is a sequence of real numbers. This type of sum is called **telescoping**.

Big O: so sánh độ hiệu quả thuật toán

Big-O

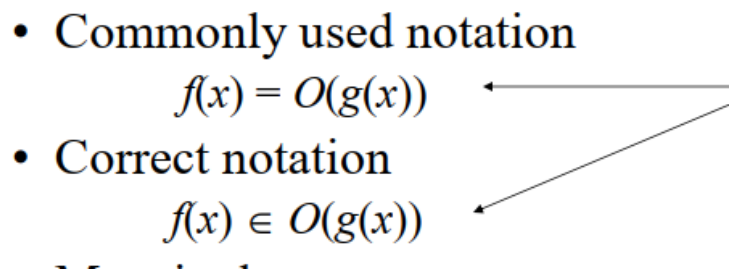
- Let f and g be functions from **N** or **R** to **R**. We say that "$f(x)$ is $O(g(x))$" if there are positive constants C and k such that

$$|f(x)| \leq C\,|g(x)|$$

whenever $x > k$.

- Read as: "$f(x)$ is big-oh of $g(x)$"

Ký hiệu:



Phương pháp chứng minh

💡 Tổng quát hóa phương pháp chứng minh Big-O

🎯 Mục tiêu:

Chứng minh rằng một hàm $f(n)$ là $O(g(n))$, nghĩa là tìm các hằng số dương C và k sao cho:

$$|f(n)| \leq C \cdot |g(n)| \quad \text{với mọi } n > k$$

✅ Phương pháp tổng quát từng bước:

🔹 Bước 1: Viết lại |f(n)| và tách từng hạng tử

Nếu $f(n)$ là một biểu thức như:

$$f(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0$$

Thì:

$$|f(n)| \leq |a_k||n^k| + |a_{k-1}||n^{k-1}| + \cdots + |a_1||n| + |a_0|$$

(Với $n \geq 1$ thì bỏ dấu tuyệt đối luôn vì tất cả đều dương.)

Troy University Resources

🔹 **Bước 2: So sánh và chặn các hạng tử theo bậc cao nhất**

Ví dụ với $f(n) = 4n^3 + 2n^2 + 10n + 7$, bậc cao nhất là n^3. Ta sẽ chặn như sau:

- $2n^2 \leq 2n^3$ (vì $n^2 \leq n^3$ khi $n \geq 1$)
- $10n \leq 10n^3$
- $7 \leq 7n^3$

Tổng lại:

$$f(n) \leq 4n^3 + 2n^3 + 10n^3 + 7n^3 = 23n^3 \Rightarrow f(n) \leq Cn^3 \text{ với } C = 23$$

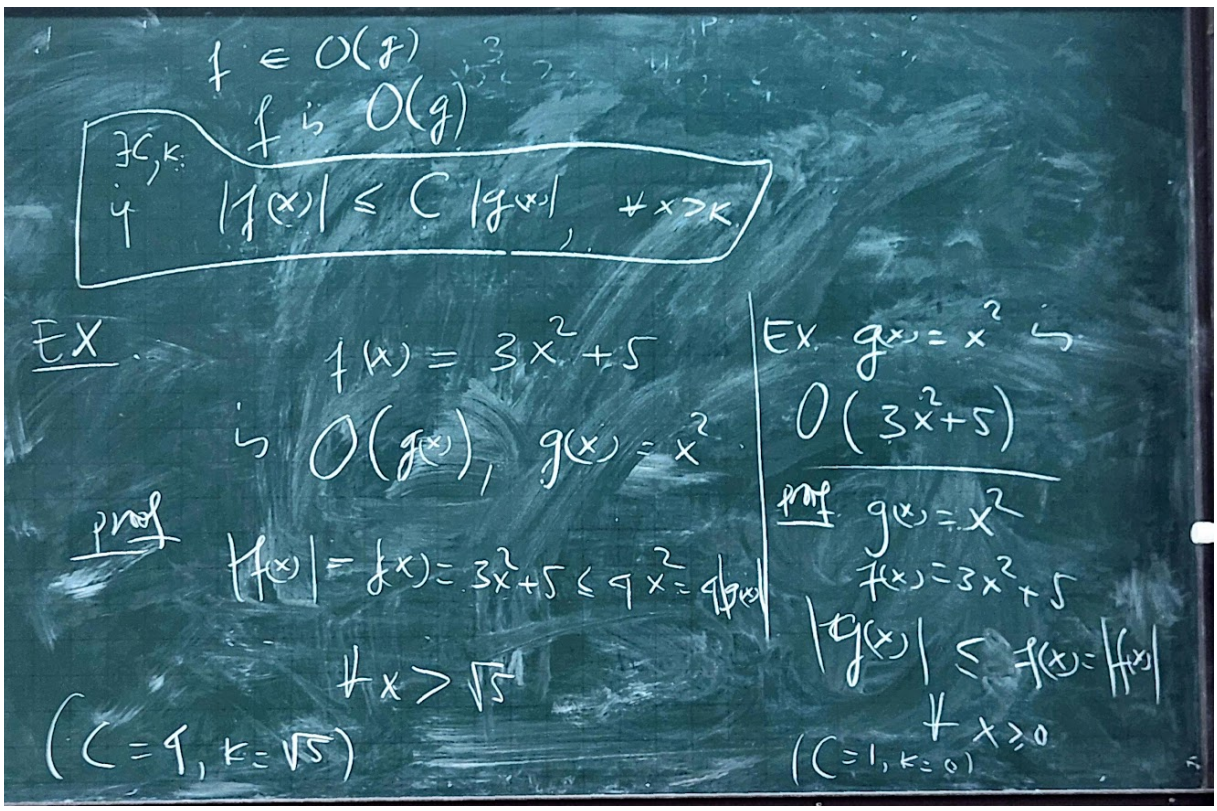
🔹 **Bước 3: Kết luận**

$$\Rightarrow f(n) \in O(n^k) \text{ (với } k \text{ là bậc cao nhất)}$$

Trên là bất đẳng thức tam giác, ngoài ra cũng có dạng:

🔁 **Dạng tương đương (dùng để chứng minh hoặc phân tích):**

$$|a| - |b| \leq |a - b|$$



Common Complexity Functions

Common Complexity Functions

Complexity	Term
$O(1)$	constant
$O(\log n)$	logarithmic
$O(n)$	linear
$O(n \log n)$	$n \log n$
$O(n^b)$	polynomial
$O(b^n)$, where $b > 1$	exponential
$O(n!)$	factorial

Troy University Resources

Notation	Meaning
o(n)	Faster
O(n)	Faster or Equal
Θ(n)	Equal To
Ω(n)	Slower or Equal To
ω(n)	Slower Than

Phương pháp chứng minh big O khác (đi thi không được dùng)

✅ **Ý tưởng chính:**

Giả sử bạn có hai hàm $f(n)$ và $g(n)$. Để phân loại độ tăng trưởng (Big-O, Big-Theta, Big-Omega), bạn xét:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = L$$

Khi đó:

- Nếu $0 < L < \infty$:
  ⇒ $f(n) = \Theta(g(n))$
- Nếu $L = 0$:
  ⇒ $f(n) = o(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$, nhưng không phải Θ
- Nếu $L = \infty$:
  ⇒ $f(n) = \omega(g(n)) \Rightarrow f(n) = \Omega(g(n))$, nhưng không phải Θ

Thuật toán Euclid tìm gcd (lcm tìm bằng công thức liên hệ sau khi có gcd)

🧠 **Ý tưởng chính của thuật toán Euclid:**

> **GCD(a, b) = GCD(b, a mod b)**
> (Với $a \geq b$, và lặp lại cho đến khi phần dư bằng 0.)

✴️ **Phiên bản dựa trên hiệu (phiên bản cổ):**

> **GCD(a, b) = GCD(a - b, b)** (nếu $a > b$)
> → Ta thay số lớn hơn bằng hiệu của hai số, lặp lại cho đến khi 2 số bằng nhau. Khi đó, giá trị chung chính là GCD.

Thuật toán Euclid mở rộng để tìm *an inverse of a modulo m*

- **Euclid mở rộng** đi xa hơn: không chỉ tìm gcd, mà còn biểu diễn $\gcd(a, m)$ dưới dạng **tổ hợp tuyến tính**:

$$sa + tm = \gcd(a, m)$$

- Nếu $\gcd(a, m) = 1$, phương trình trở thành:

$$sa + tm = 1$$

- Lấy modulo m cả hai vế, vì $tm \equiv 0 \pmod{m}$, ta được:

$$sa \equiv 1 \pmod{m}$$

Vậy s chính là nghịch đảo của a.

Rút ngược liên tục là tìm đc inverse thôi

Bước 3: Rút ngược từ 1 = ...

(Sử dụng back-substitution để tìm biểu thức $1 = x \cdot 55 + y \cdot 89$)

Sao chép Chỉnh sửa

```
1 = 3 - 1x2
  = 3 - 1x(5 - 1x3) = 2x3 - 1x5
  = 2x(8 - 1x5) - 1x5 = 2x8 - 3x5
  = 2x8 - 3x(13 - 1x8) = 5x8 - 3x13
  = 5x(21 - 1x13) - 3x13 = 5x21 - 8x13
  = 5x21 - 8x(34 - 1x21) = 13x21 - 8x34
  = 13x(55 - 1x34) - 8x34 = 13x55 - 21x34
  = 13x55 - 21x(89 - 1x55) = 34x55 - 21x89
```

$$\Rightarrow 1 = 34 \times 55 - 21 \times 89$$

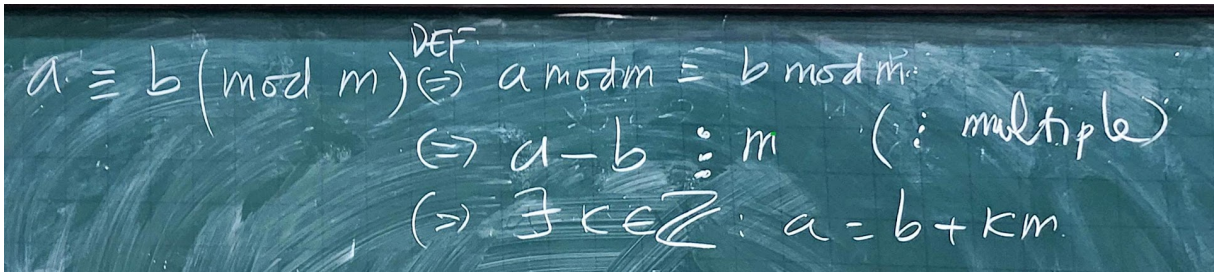
Giải phương trình đồng dư:

$$ax \equiv b \mod m \Rightarrow x \equiv a^{-1}b \mod m$$

Nhân cả 2 vế với tk inverse

Troy University Resources

Đồng dư (mod)



- Let m be a positive integer.

  If $a \equiv b \pmod{m}$ and
  $c \equiv d \pmod{m}$,
  then $a + c \equiv b + d \pmod{m}$
  $ac \equiv bd \pmod{m}$

3. **Kích hoạt chế độ phân tích thừa số nguyên tố:**
   - Tùy dòng máy, bạn nhấn tổ hợp phím để vào chế độ "FACT" (Factorization):
     - Trên Casio fx-580VN X: Nhấn **SHIFT** rồi nhấn phím **FACT** (thường là phím có chữ "FACT" màu vàng).

Inverse of a modulo m

Trong số học modulo, nghịch đảo của một số nguyên `a` modulo một số nguyên dương `m` là một số nguyên `ā` sao cho **a · ā ≡ 1 (mod m)** 1 . Điều này có nghĩa là tích của `a` và `ā` khi chia cho `m` sẽ có phần dư là 1 1 ... .

Standard Method Recap

The number of trailing zeros in $100!$ is determined by the number of times 10 (i.e., 2×5) appears as a factor in the product $1 \times 2 \times \ldots \times 100$. Since there are always more factors of 2 than 5 in a factorial, the limiting factor is the number of times 5 appears. We calculate this as:

$$\left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{25} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{125} \right\rfloor = 20 + 4 + 0 = 24$$

So, $100!$ has **24 trailing zeros.**

Khai triển a mũ m + 1 (m lẻ)

$$a^m + 1 = a^m - (-1)^m = \underbrace{(a+1)}_{p}\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i a^{m-1-i}\right)}_{q}$$

Hàm Euler φ-function

Hàm Euler φ-function, hay còn gọi là **hàm totient của Euler**, ký hiệu là $\phi(n)$, là một hàm trong lý thuyết số, dùng để đếm số lượng các số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng n và nguyên tố cùng nhau với n (tức là các số k từ 1 đến n sao cho $\gcd(k,n) = 1$).

$$\phi(n) = n \cdot \prod_{p|n}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Trong đó p là các **ước số nguyên tố khác nhau** của n.

Công thức này check key thôi

Chứng minh quy nạp (Induction)

- Gồm hai bước:
  1. **Bước cơ sở**: Chứng minh $P(1)$ đúng.
  2. **Bước quy nạp**: Giả sử $P(k)$ đúng (giả thuyết quy nạp), chứng minh $P(k+1)$ cũng đúng.

Nghĩa là khi thay $k+1$ vào thì ta tách 1 lúc thấy giống với những cái giả sử k

Well-Ordering

Thực chất là giải thích logic cho cái quy nạp kco ý nghĩa mấy

Troy University Resources

Strong Induction

Là kĩ thuật c/m để dùng tất cả các bước trước đó để chứng minh bước tiếp theo

Khá khó 1 cách tổng quát nhưng cơ bản là

Claim: Every positive integer greater than 1 can either be written at the product of prime numbers or is a prime number itself.

Proof by Strong Induction:

Variable:

n is an element of positive natural numbers greater than 1 i.e., $\{2,3,4\ldots\}$, so $n \in N^+ - \{1\}$

Prop:

$P(n)$: n is either a prime number or the product of prime numbers.

1) Base Case:

Let 2 be the base case. 2 is a prime number.

2) Induction Step:

[I.H.] Let $n \geq k \geq 2$. Assume k can be written as the product of primes, or that k is a prime number.

N.O.S. that $n+1$ is a product of prime numbers or is prime.

Case 1 - If $n+1$ is prime, this satisfies the claim

Case 2 - If $n+1$ isn't prime, let there exist integers x, y where $n > x \geq 2$ and $n > y \geq 2$ such that $xy = n+1$.

Since x and y are both primes or the product of primes by the I.H., $xy = n+1$ is a product of primes.

Frobenius number

🧮 Công thức:

Khi a và b nguyên dương và nguyên tố cùng nhau, số Frobenius được tính bằng công thức:

$$g(a, b) = ab - a - b$$

Công thức này được chứng minh bởi James Joseph Sylvester vào năm 1884 . Wikipedia – Die freie Enzyklopädie

📓 Ví dụ:

- Với $a = 3, b = 5$:

$$g(3, 5) = 3 \times 5 - 3 - 5 = 15 - 3 - 5 = 7$$

→ Số 7 là số nguyên dương lớn nhất **không thể** biểu diễn dưới dạng $3x + 5y$ với $x, y \geq 0$.

Troy University Resources

Dựa trên ví dụ bạn cung cấp, chúng ta đang làm việc với một dãy số đệ quy được định nghĩa như sau:

- $a_1 = 1$
- $a_2 = 3$
- $a_k = a_{k-2} + 2a_{k-1}$ với $k \geq 3$

Người nói đã tính $a_3 = a_1 + 2a_2 = 1 + 2 \cdot 3 = 7$, và đưa ra khẳng định: **Tất cả các phần tử a_k trong dãy đều là số lẻ**. Họ đang chứng minh điều này bằng quy nạp mạnh (strong induction). Hãy tiếp tục chứng minh và hoàn thiện ví dụ.

Ví dụ: Chứng minh a_k luôn là số lẻ

Bước 1: Kiểm tra cơ sở (Base Case)

Đã được thực hiện trong phần bạn cung cấp:

- $a_1 = 1$, là số lẻ ✅.
- $a_2 = 3$, là số lẻ ✅.

Cơ sở quy nạp đúng, vì công thức đệ quy $a_k = a_{k-2} + 2a_{k-1}$ phụ thuộc vào hai phần tử trước đó, nên cần kiểm tra cả a_1 và a_2.

Bước 2: Giả thiết quy nạp (Inductive Hypothesis)

Cũng đã được nêu:
Giả sử rằng a_i là số lẻ cho tất cả i từ 1 đến k, tức là $1 \leq i \leq k$.
Điều này có nghĩa là:

- $a_1, a_2, \ldots, a_k$ đều là số lẻ.

Bước 3: Chứng minh cho $k+1$ (Inductive Step)

Bây giờ, ta cần chứng minh rằng a_{k+1} cũng là số lẻ, dựa trên giả thiết rằng a_i là số lẻ cho $1 \leq i \leq k$.

Theo công thức đệ quy:

$$a_{k+1} = a_{(k+1)-2} + 2a_{(k+1)-1}$$

Tức là:

$$a_{k+1} = a_{k-1} + 2a_k$$

- Theo giả thiết quy nạp:
  - a_{k-1} là số lẻ (vì $k - 1 \leq k$).
  - a_k là số lẻ (vì $k \leq k$).
- Xét tính chẵn lẻ của a_{k+1}:
  - a_{k-1} là số lẻ, giả sử $a_{k-1} = 2m + 1$ (với m là số nguyên).
  - a_k là số lẻ, giả sử $a_k = 2n + 1$ (với n là số nguyên).
  - $2a_k = 2(2n + 1) = 4n + 2$, đây là số chẵn (vì chia hết cho 2).
- Tính a_{k+1}:

$$a_{k+1} = a_{k-1} + 2a_k = (2m + 1) + (4n + 2) =$$

$$a_{k+1} = 2(m + 2n + 1) + 1$$

  - $m + 2n + 1$ là số nguyên, nên a_{k+1} có dạng $2 \cdot (\text{số nguyên}) + 1$, tức là số lẻ.

Kết luận

- Từ giả thiết a_i là số lẻ cho $1 \leq i \leq k$, ta đã chứng minh a_{k+1} cũng là số lẻ.
- Theo nguyên lý quy nạp mạnh, khẳng định đúng cho mọi $k \geq 1$.

Quy tắc đếm

Quy tắc cộng:

- Nếu hai việc là rời nhau chả liên quan gì nhau thì ta có thể cộng số cách làm hai việc với nhau

Quy tắc nhân:

- Hai việc liên quan đến nhau vì hai việc là 2 công đoạn của 1 việc lớn thì ta nhân 2 việc để ra số cách làm việc lớn, ví dụ: số cách chọn 1 học sinh giỏi trong 1 lớp, ta tìm số cách chọn 1 học sinh có GPA lớn hơn 8 nhân với số cách chọn 1 học sinh hạnh kiểm tốt trong đống học sinh có GPA lớn hơn 8 đấy

Nguyên lý Bù trừ (Inclusion-Exclusion Principle)

Công thức cơ bản:

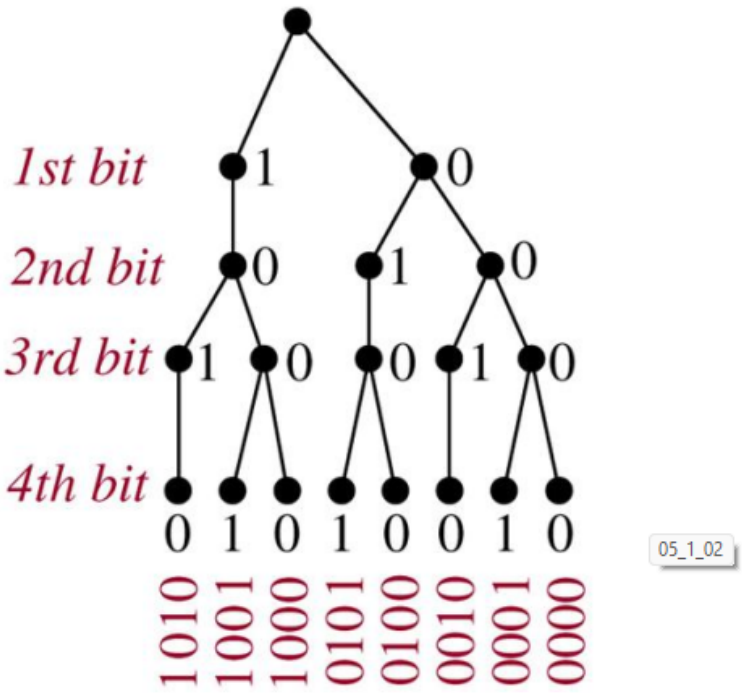
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Nghĩa là:

> Số phần tử **thuộc ít nhất một trong hai tập A hoặc B** =
> Số phần tử của A + số phần tử của B
> **trừ đi** số phần tử **nằm trong cả A và B** (để không bị đếm hai lần).

Troy University Resources

Tree diagram



Cơ bản thì đây là kiểu ta vẽ ra các nhánh trường hợp rồi đếm, ngoài việc làm lâu thì chắc chắn k thể sai

Pigeonhole Principle

Phát biểu: Nếu bạn có nhiều bồ câu hơn số hòm để nhốt, thì **ít nhất một hòm** sẽ phải chứa **từ hai con bồ câu trở lên**.

// không cần chứng minh

Tổng quát hơn để làm bài:

Nếu có N đồ vật và k hòm, thì ít nhất một hòm chứa $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ đồ vật

// hàm ở trên làm tròn trên ceiling đã đề cập ở đâu đó trong file này

Công thức tính số lượng số hạng của 1 csc

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

Suy ra từ: $a_n = a_1 + (n-1)d$

Permutations (Hoán vị)

Thứ tự quan trọng, ko lặp

1. **Permutations:**
   - **Definition:** A permutation is an ordered arrangement of objects. An r-permutation is an ordered selection of r elements from a set of n.
   - **Formula:** The number of r-permutations is:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)$$

   - **Example:** For a set $S = \{1, 2, 3\}$, 2-permutations include

Combinations (Tổ hợp)

Thứ tự ko quan trọng mọi thứ đều có ý nghĩa tương đương nhau, ko lặp

2. **Combinations:**
   - **Definition:** A combination is an unordered selection of r elements from a set of n.
   - **Formula:** The number of r-combinations is:

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{P(n,r)}{r!}$$

Combinations

- ***Corollary 2:*** Let n and r be nonnegative integers with $r \le n$. Then $C(n, r) = C(n, n\text{-}r)$.

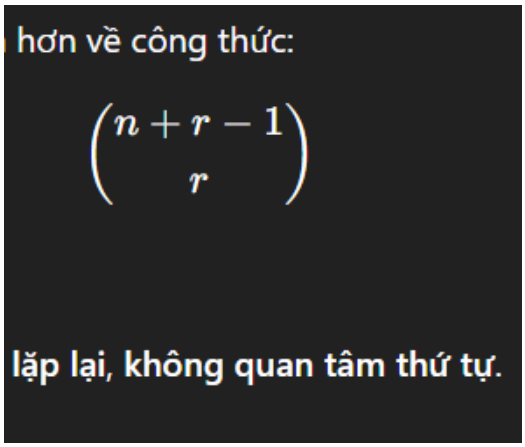
$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

and,

$$C(n,n-r) = \frac{n!}{(n-r)!\left[n-(n-r)\right]!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

and these are obviously equivalent.

Troy University Resources



There are $C(n+r-1, r) = C(n+r-1, n-1)$ r-combinations from a set with n elements when repetition of elements is allowed.

Order Relevant	Repetitions Allowed	Type of Result	Formula
Yes	Yes	Arrangement	n^r $n, r \geq 0$
Yes	No	Permutation	$P(n, r) = n!/(n\text{-}r)!$ $0 \leq r \leq n$
No	No	Combination	$C(n, r) = n!/[r!(n\text{-}r)!]$ $0 \leq r \leq n$

Binomial Theorem

Section 5.4: Binomial Coefficients

Summary

This section explores binomial coefficients and their applications:

1. **Binomial Coefficients**:
   - **Definition**: The binomial coefficient $\binom{n}{r} = C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ represents the number of ways to choose r items from n.
   - **Symmetry**: $C(n,r) = C(n,n-r)$, as choosing r items is equivalent to choosing $n-r$ items to exclude.
2. **Binomial Theorem**:
   - **Statement**: For any x, y and non-negative integer n:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

   - **Example**: The coefficient of $x^{12}y^{13}$ in $(x+y)^{25}$ is $\binom{25}{13} = 5,200,300$.

Sum of binomial coefficients

3. **Properties**:
   - **Corollary 1**: The sum of binomial coefficients is:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

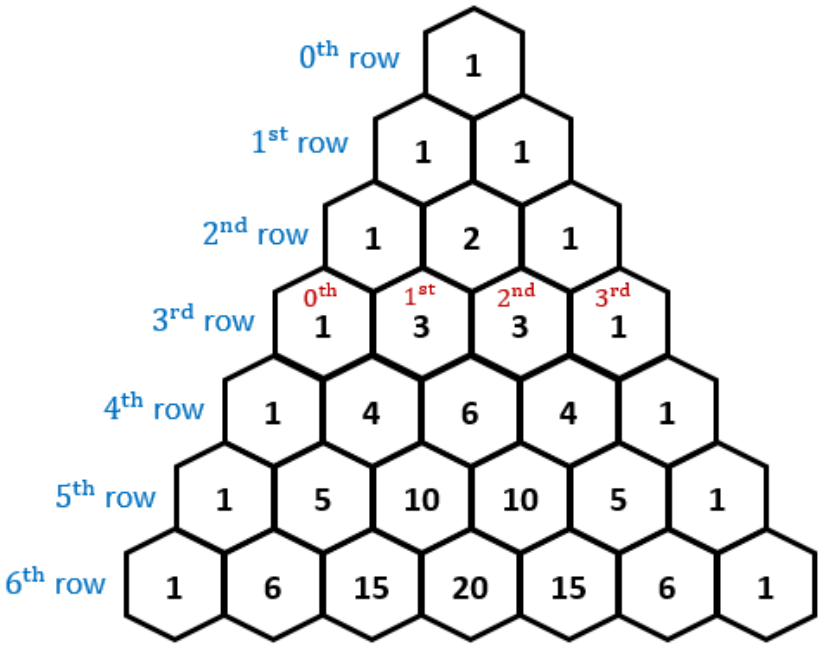
     This counts all subsets of an n-element set, as each subset has k elements for some k.
   - **Example**: For $S = \{a,b,c\}$, subsets are counted as $C(3,0) + C(3,1) + C(3,2) + C(3,3) = 1+3+3+1 = 8 = 2^3$.

4. **Pascal's Triangle**:
   - A geometric arrangement of binomial coefficients where each entry is the sum of the two above it (Pascal's Identity):

$$C(n+1,k) = C(n,k-1) + C(n,k)$$

   - **Example**: $C(7,5) = C(6,4) + C(6,5)$.

Troy University Resources



Xác suất

Công thức Bayes:

Đây là công thức xác suất có điều kiện, cho biết xác suất của sự kiện A xảy ra khi biết sự kiện B đã xảy ra. nhân quả tùm lum (causal knowledge)

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Với $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\neg A)P(\neg A)$.

$$\Pr[E \mid F] = \frac{\Pr[E \cap F]}{\Pr[F]}$$

Nếu A và B độc lập thì xác suất điều kiện bằng đúng A.

- Khi tìm xác suất 2 sự kiện cùng xảy ta nhân xác suất xảy ra từng cái với nhau (ko liên quan nhau)
- Các sự kiện rời nhau thì cộng thôi

- **Luật xác suất toàn phần (Law of Total Probability):**

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \neg B)$$

Phân phối Nhị thức (Binomial Probability): Bernoulli đúng sai

- **Phân phối Nhị thức (Binomial Probability):**
  - Xác suất có đúng k thành công trong n thử nghiệm Bernoulli độc lập:

$$P(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

  Trong đó $\binom{n}{k}$ là tổ hợp chập k của n.
  - Ví dụ:

Giá trị kì vọng: thực chất là tiền ăn đc nhân với xác suất, kiểu cược mu mà ăn đc 10k thua mất 5k thì expected value = 10k.(xs ăn) + 5k.(xs thua)

$E(x) = \text{sum}(x_i \cdot p_i)$

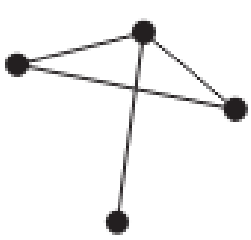
- Một phép thử có xác suất thành công p
- Ta lặp lại phép thử **cho đến khi thành công đầu tiên**
- Gọi E là **số lần kỳ vọng để đạt thành công**

$$\boxed{E = \frac{1}{p}}$$

Đồ thị (graph)

Gồm tập đỉnh (vertices) V và tập cạnh (edges) E, ký hiệu: $G = (V, E)$

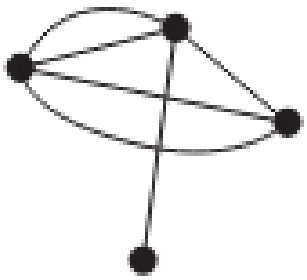
Simple Graph: không có cạnh lặp và không có vòng (loop). đơn giản nhất mỗi đường đi qua 1 lần



simple graph

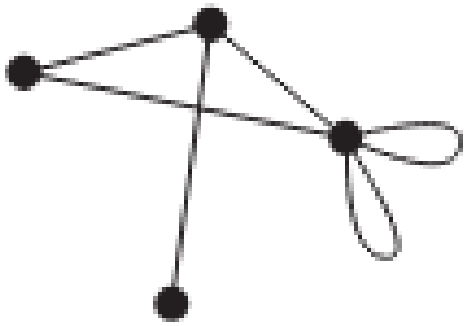
Troy University Resources

Multigraph: cho phép nhiều cạnh giữa hai đỉnh.



nonsimple graph with multiple edges

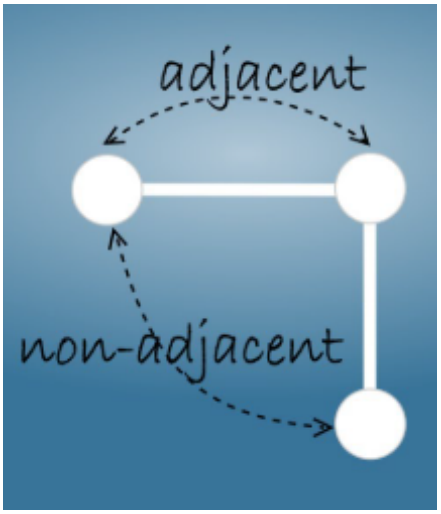
Pseudograph: cả cạnh lặp có cả loop



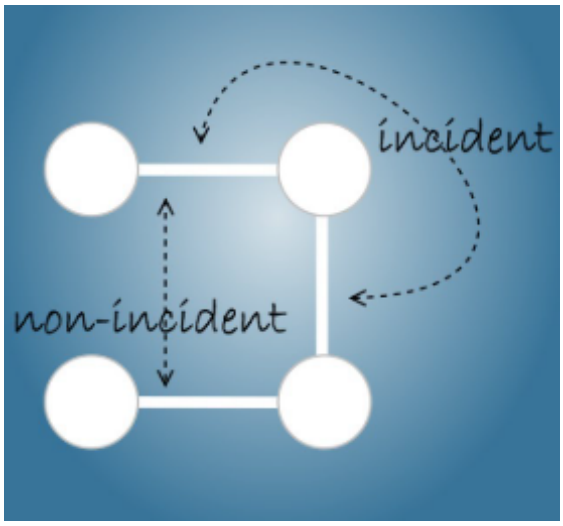
nonsimple graph with loops

Directed Graph: cạnh là các cặp có thứ tự (u, v). nghĩa là đi từ u đến v (có hướng)

Adjacent: hai đỉnh liền kề có cạnh nối chúng.

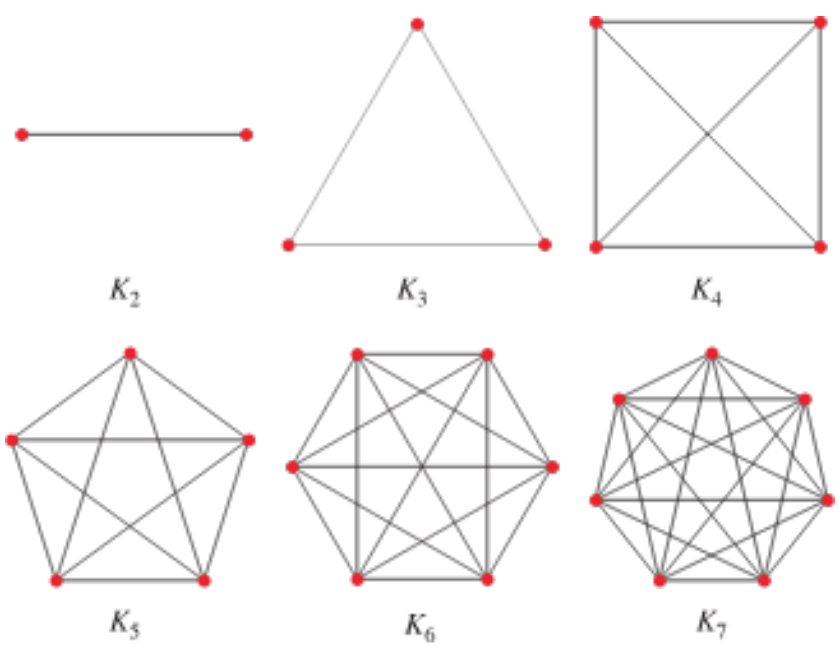


Incident: hai cạnh liên quan đến đỉnh nào đó.



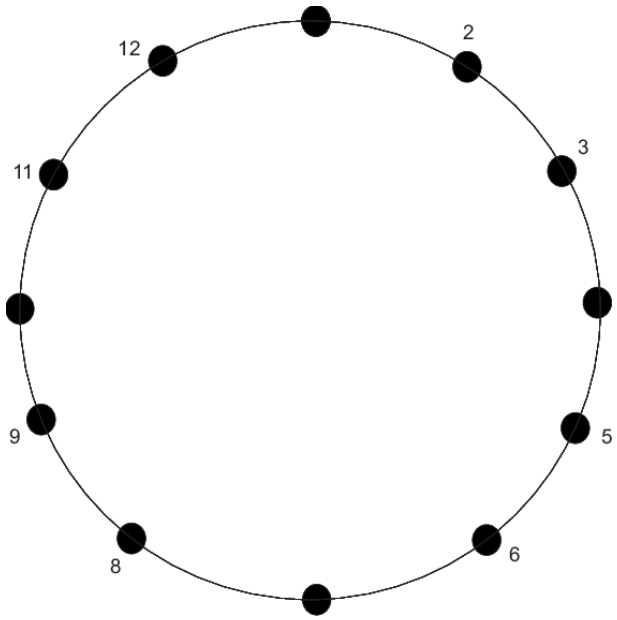
Degree of vertex: bậc của đỉnh là số cạnh kề (loop tính gấp đôi). (chả cần quan tâm loop vì ko thi)

Complete Graph (K_n): mọi cặp đỉnh đều được nối, không tồn tại 2 đỉnh bất kì không được nối bởi 2 cạnh, ta gọi 1 graph là K_n khi n đỉnh đều được nối complete hoàn toàn



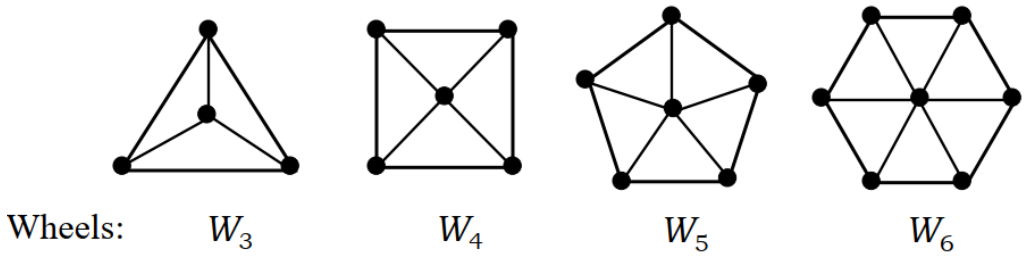
Troy University Resources

Cycle Graph (C_n): chu trình đơn khép kín với $n \geq 3$. vì n dưới 3 không tạo thành vòng tròn khép kín



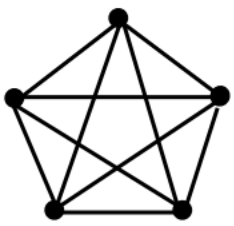
Ngoài ra chu trình nghĩa là tất cả các đỉnh phải connected (mỗi đỉnh bậc 2)

Wheel Graph (W_n): cycle cộng thêm một đỉnh nối đến tất cả đỉnh của chu trình. (n là số đỉnh của chu trình như dưới W_3 NOT W_4)

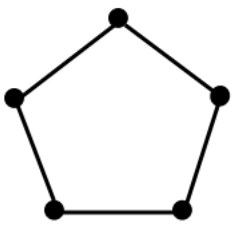


Subgraph: là một phần của đồ thị mẹ.

> • A *subgraph* of a graph $G = (V,E)$ is a graph $H = (W,F)$ where $W \subseteq V$ and $F \subseteq E$.



K_5

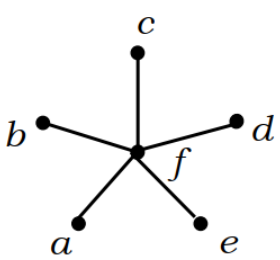


C_5

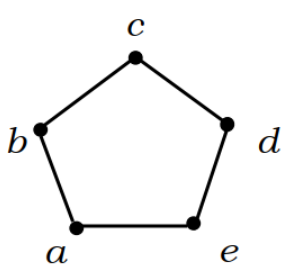
C_5 là subgraph của K_5

Union

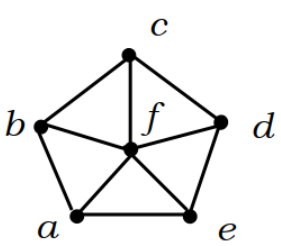
- The *union* of 2 simple graphs $G_1 = (V_1, E_1)$ and $G_2 = (V_2, E_2)$ is the simple graph with vertex set $V = V_1 \cup V_2$ and edge set $E = E_1 \cup E_2$. The union is denoted by $G_1 \cup G_2$.



S_5



C_5



W_5

$S_5 \cup C_5 = W_5$

Tính liên thông

Path: dãy liên tiếp các đỉnh có cạnh nối.

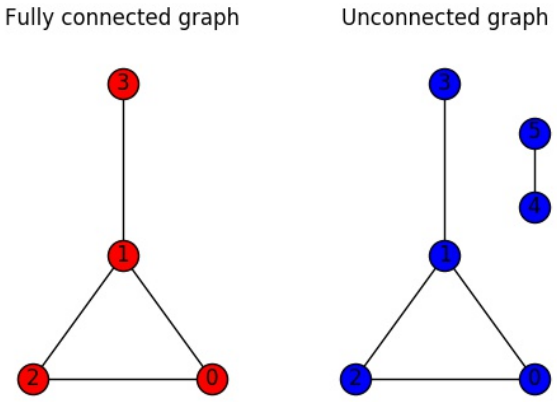
Length = tổng các path, ví dụ: 10 path ⇒ length = 10

Circuit: path bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh.

Simple Path: không lặp cạnh. nghĩa là ko đi lại đường cũ

Troy University Resources

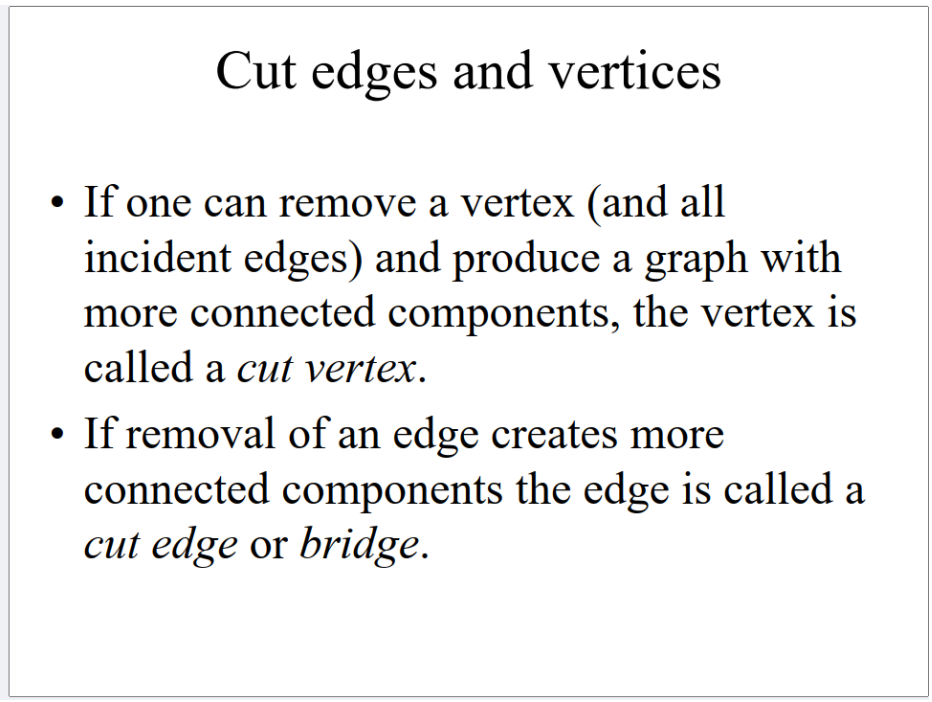
Connected Graph: mọi cặp đỉnh đều có đường đi giữa chúng.

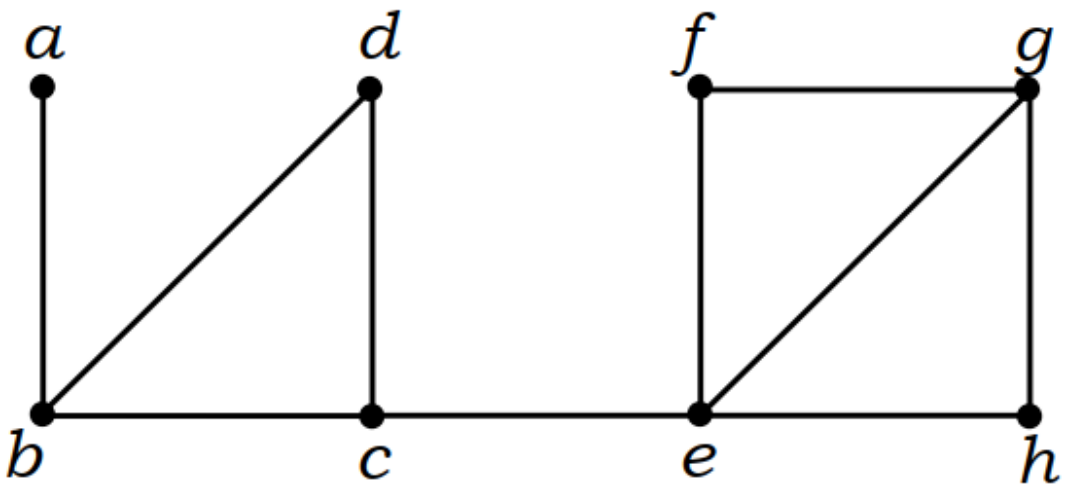


Do chỉ học undirected graph nên:

Paths in Undirected Graphs

- A path or circuit is said to pass through the vertices $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_n$ or traverse the edges $e_1, e_2, \ldots, e$
- Ở đây nghĩa là đồ thị vô hướng nên ta liệt kê các đỉnh theo thứ tự đi coi như là hướng
- **Connected Components**: nếu đồ thị không liên thông → gồm nhiều thành phần con liên thông.
- 1 đồ thị liên thông thì tồn tại thành phần liên thông duy nhất là chính nó
- Đồ thị liên thông là đồ thị mà bất kì đỉnh nào đi đến đỉnh nào cũng có path để đến





Ở đây ví dụ c và e là cut vertex vì xóa c,e tạo ra 2 thằng liên thông con

Còn ce là cut edge rõ ràng

QUAN TRỌNG!!!!

Euler Path

Là **một đường đi** trong đồ thị mà:

- **Đi qua mỗi cạnh đúng một lần** (không lặp cạnh).
- Có thể **không cần quay lại điểm xuất phát**.
- Có thể lặp đỉnh (nhưng không lặp cạnh).

Euler Circuit / Eulerian Circuit (Chu trình Euler):

Là **một Euler Path** có thêm điều kiện:

- **Bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh** (tạo thành chu trình).

Điều kiện tồn tại:

♦ **Euler Circuit tồn tại khi và chỉ khi:**

1. **Đồ thị liên thông** *(bỏ qua các đỉnh bậc 0)*
2. **Tất cả các đỉnh đều có bậc chẵn**

♦ **Euler Path (nhưng không có circuit) tồn tại khi và chỉ khi:**

1. **Đồ thị liên thông** *(bỏ qua các đỉnh bậc 0)*
2. **Có đúng 2 đỉnh bậc lẻ**, các đỉnh còn lại bậc chẵn

Troy University Resources

Nếu bài yêu cầu tìm Euler Circuit:

↪ Chọn **bất kỳ đỉnh nào** (có bậc khác 0) làm điểm bắt đầu.

📌 **Vì:**

- Tất cả các đỉnh đều có bậc chẵn.
- Đường đi sẽ quay lại đúng chỗ xuất phát, nên bắt đầu đâu cũng được.

Nếu bài yêu cầu tìm Euler Path (không phải circuit):

↪ Bắt đầu từ **một trong hai đỉnh có bậc lẻ**

📌 **Vì:**

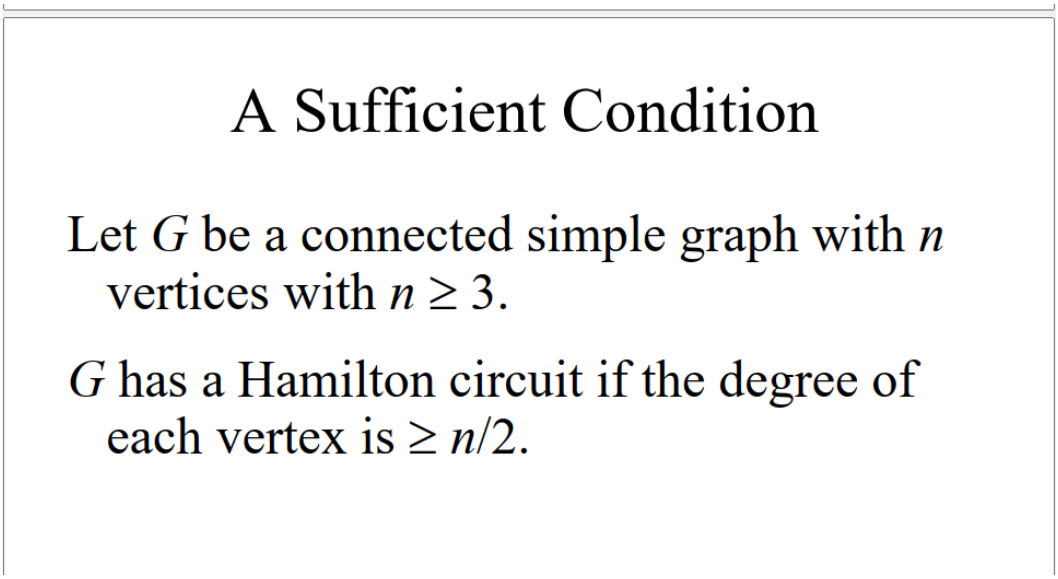
- Euler Path tồn tại khi **có đúng 2 đỉnh bậc lẻ**.
- Đường đi **phải bắt đầu ở một đỉnh lẻ và kết thúc ở đỉnh lẻ còn lại**.

Hamilton Path:

Là một **đường đi qua mỗi đỉnh đúng 1 lần**, không yêu cầu quay lại đỉnh ban đầu. ! Có thể không đi qua tất cả cạnh, chỉ quan tâm đến đỉnh.

♦ **Hamilton Circuit (còn gọi là Hamilton Cycle):**

Là một **Hamilton Path khép kín** — bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh.



Điều kiện có circuit, có circuit là có path

Cách tìm đường đi Hamilton

I. Kiểm tra nhanh khả năng tồn tại

📌 **Bước 1: Kiểm tra số đỉnh bậc thấp**

- Nếu có đỉnh **bậc 0** → ✗ Không thể có Hamilton path/circuit.
- Nếu có nhiều đỉnh bậc nhỏ hơn 2 → rất nghi ngờ.

📌 **Bước 2: Dùng định lý đủ nếu có thể**

- Nếu mọi đỉnh có bậc $\geq \frac{n}{2}$ → ✓ **Dirac** → Có circuit.

Sau khi biết có tồn tại: **Nếu có đỉnh bậc thấp (1, 2)** thì **ưu tiên chọn làm điểm bắt đầu**. rồi dò

Không có chu trình nhỏ hơn chứa trong chu trình Hamilton

Một **chu trình nhỏ hơn (subcycle)** nghĩa là: bạn tạo một vòng khép kín **trước khi đi hết tất cả các đỉnh**.

Property	Euler	Hamilton
Repeated visits to a given node allowed?	Yes	No
Repeated traversals of a given edge allowed?	No	No
Omitted nodes allowed?	No	No
Omitted edges allowed?	No	Yes

Đỉnh cô lập (isolated vertex): là đỉnh không có cạnh nối với bất kỳ đỉnh nào khác (bậc = 0). **Đỉnh treo (pendant vertex):** là đỉnh chỉ nối với đúng một đỉnh khác (bậc = 1).

Định lý Bắt tay (Handshaking Theorem), trong 1 đồ thị vô hướng thì luôn có điều này (dùng để check xem có tồn tại đồ thị không?):

Tổng degree của tất cả các đỉnh = 2 * (tổng số cạnh)

Bổ sung định lý để xác định chu trình Hamiltonian, **lưu ý là 2 định lý này chỉ là điều kiện đủ, nghĩa là thỏa mãn thì đương nhiên có chu trình nhưng không thỏa mãn thì chưa chắc là không có chu trình, cách tốt nhất là tự nhìn 1 cái path hợp lí**

Troy University Resources

Ore's Theorem

Let $G = (V, E)$ be a simple graph with $n \geq 3$ vertices. If, for every pair of non-adjacent vertices u and v, the sum of their degrees satisfies: Testbook +6

$$\deg(u) + \deg(v) \geq n,$$

then G is Hamiltonian; that is, it contains a Hamiltonian cycle. Mathematics Stack Exchange +13

Với đồ thị G có n đỉnh, **ma trận kề** A là ma trận $n \times n$ sao cho:

$$A[i][j] = \begin{cases} \text{số cạnh giữa đỉnh } i \text{ và đỉnh } j & \text{(đồ thị có hướng hoặc vô hướng)} \\ 0 & \text{nếu không có cạnh giữa } i \text{ và } j \end{cases}$$

- Với **đồ thị vô hướng**: ma trận đối xứng qua đường chéo chính.
- Với **đồ thị có hướng**: $A[i][j]$ là số cung đi từ đỉnh $i \to j$

Nghĩa là giả sử có ma trận kề A rồi ta bỏ vào máy tính nhân r lần lên thì sẽ tính ra ma trận với elements vị trí ij và giá trị tại ô đó là:

- $(A^r)_{ij}$: số đường đi dài r từ đỉnh i đến đỉnh j

Cái trên để làm bài Find the number of paths of length n between two different vertices

- Let $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, where $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ are real numbers.
- Then $f(x)$ is $O(x^n)$.

What is the big-O estimate for $n!$?

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

$n! \leq n \cdot n \cdot n \cdot \ldots \cdot n$

$n! \leq n^n$

So: $n!$ is $O(n^n)$

What is the big-O estimate for $\log(n!)$?

$n! \leq n^n$

$\Rightarrow \log n! \leq \log n^n$

$\Rightarrow \log n! \leq n \log n$

So: $\log n!$ is $O(n \log n)$

Troy University Resources