
摄像机模型

Lu Peng

School of Computer Science,
Beijing University of Posts and Telecommunications

本课程三维重建篇所涉及的教学内容与课件参考了CS231A，

感谢CS231A课程团队在课程建设方面所做的工作!

Machine Vision Technology							
Semantic information				Metric 3D information			
Pixels	Segments	Images	Videos	Camera		Multi-view Geometry	
Convolutions Edges & Fitting Local features Texture	Segmentation Clustering	Recognition Detection	Motion Tracking	Camera Model	Camera Calibration	Epipolar Geometry	SFM
10	4	4	2	2	2	2	2

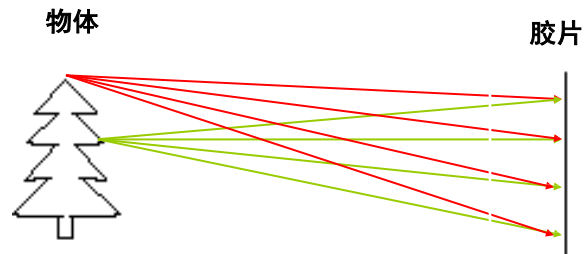
摄像机几何

- 针孔模型 & 透镜
- 摄像机几何
- 其他摄像机模型

摄像机几何

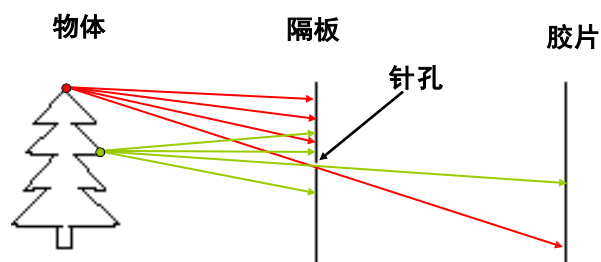
- 针孔模型 & 透镜
- 摄像机几何
- 其他摄像机模型

我们如何记录世界？



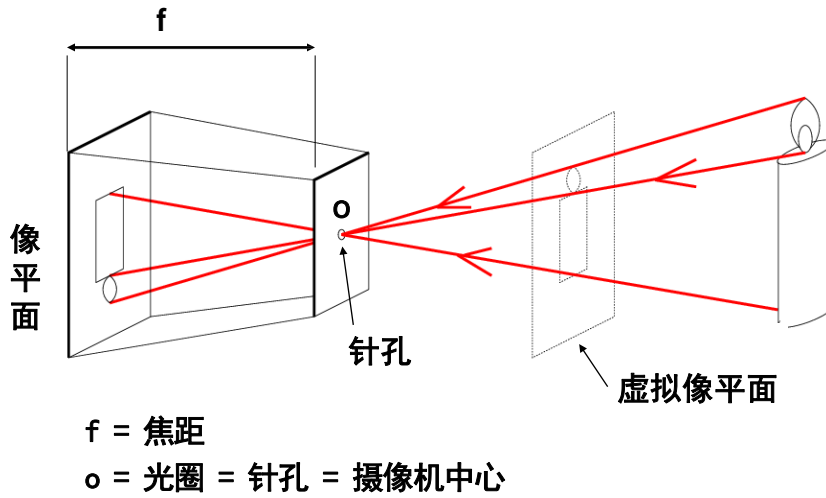
- 摄像机设计
 - 想法：将胶片直接放置在物体前方？

针孔摄像机

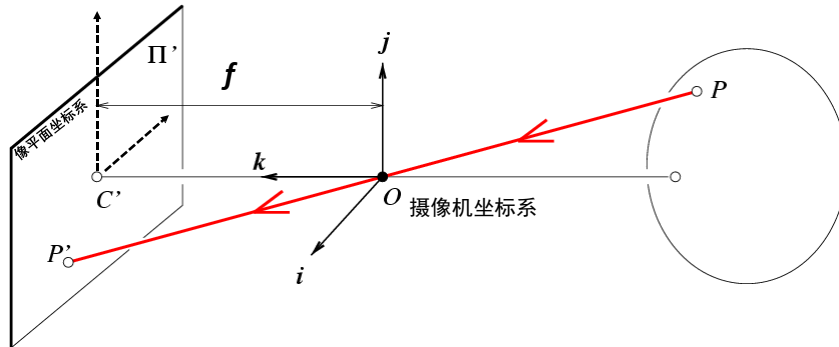


- 添加屏障——减少模糊

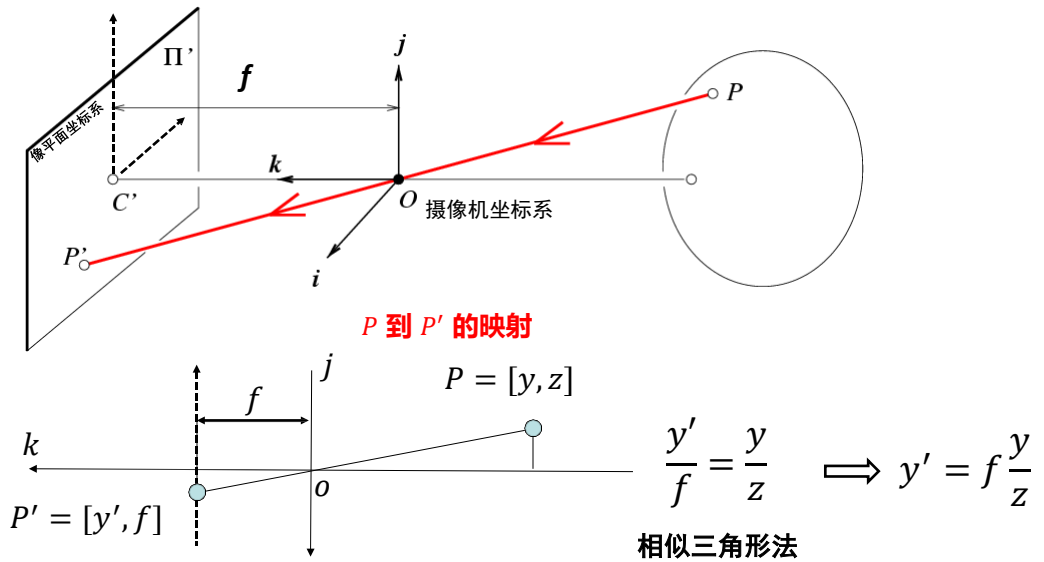
针孔摄像机



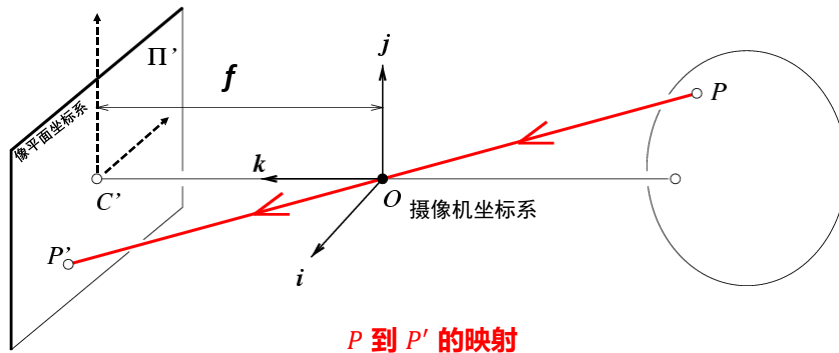
针孔摄像机



针孔摄像机



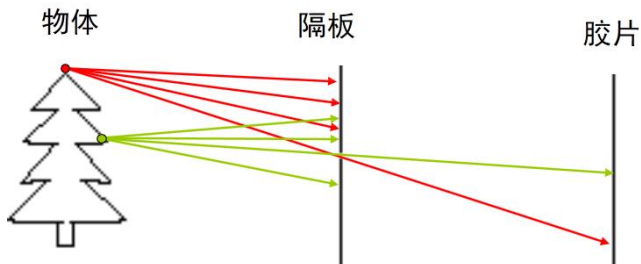
针孔摄像机



$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = f \frac{x}{z} \\ y' = f \frac{y}{z} \end{cases}$$

针孔摄像机

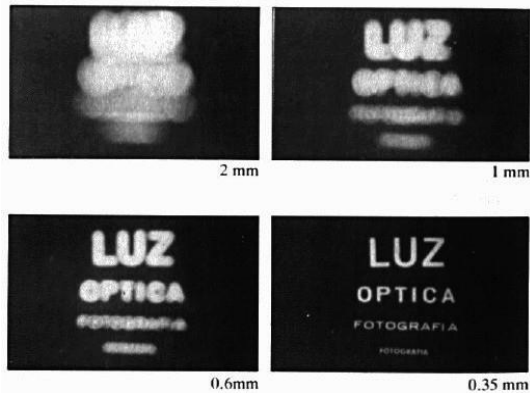
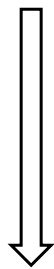


光圈的尺寸重要吗？



针孔摄像机

缩小
光圈

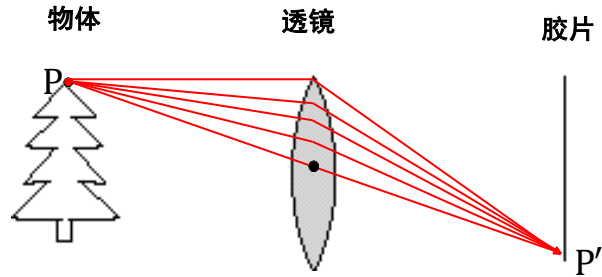


随着光圈减小，成像效果如何变化？（越来越清晰、越来越暗）

如何应对到达胶片的光线变少？

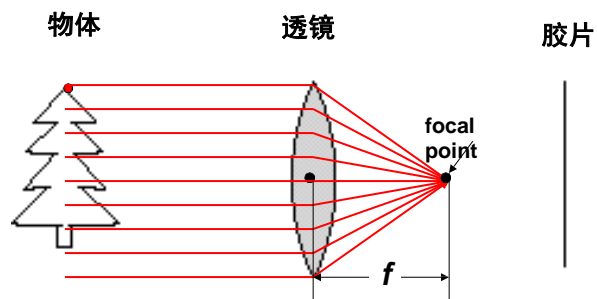
摄像机 & 透镜

增加透镜!!!



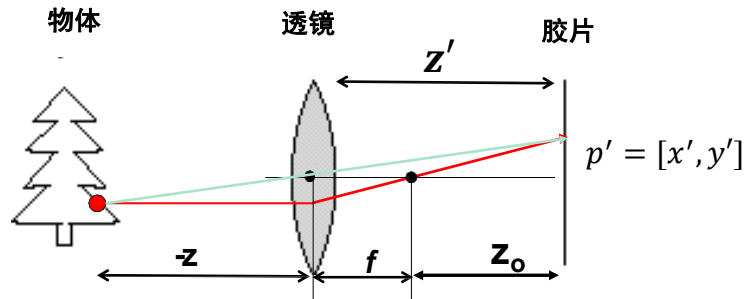
- 透镜将多条光线聚焦到胶片上，增加了照片的亮度

摄像机 & 透镜



- 透镜将光线聚焦到胶片上
 - 所有平行于光轴的光线都会会聚到焦点，焦点到透镜中心的距离称为焦距。
 - 穿过中心的光线的方向不发生改变

近轴折射模型



根据折射定律:

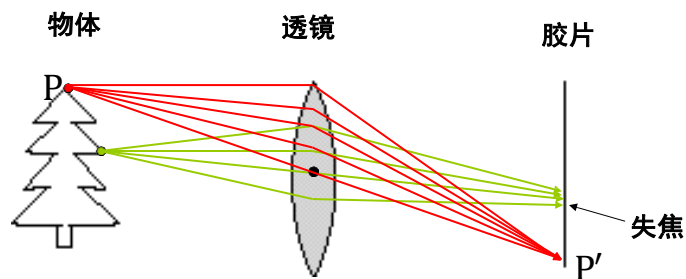
$$f = \frac{R}{2(n-1)}$$

$$z' = f + z_0$$

$$\begin{cases} x' = z' \frac{x}{z} \\ y' = z' \frac{y}{z} \end{cases}$$

R 为透镜球面半径, n 为透镜折射系数

透镜问题：失焦



- 透镜将光线聚焦到胶片上
 - 物体“聚焦”有特定距离
 - 景深

透镜问题：失焦



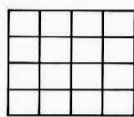
微距摄像!!!

- 透镜将光线聚焦到胶片上
 - 物体“聚焦”有特定距离
 - 景深

透镜问题：径向畸变

- **径向畸变**: 图像像素点以畸变中心为中心点, 沿着径向产生的位置偏差, 从而导致图像中所成的像发生形变

没有畸变



枕形



畸变像点相对于理想像点沿径向向外偏移, 远离中心

桶形



畸变像点相对于理想点沿径向向中心靠拢

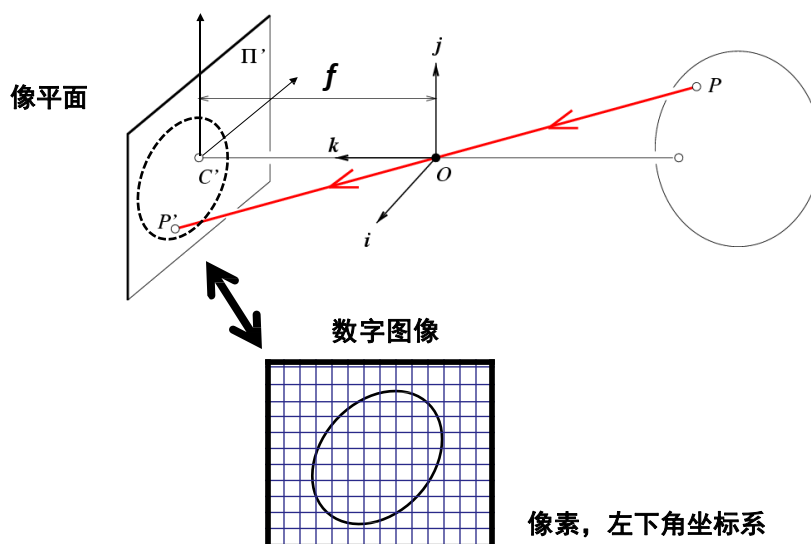


产生原因: 光线在远离透镜中心的地方比靠近中心的地方更加弯曲

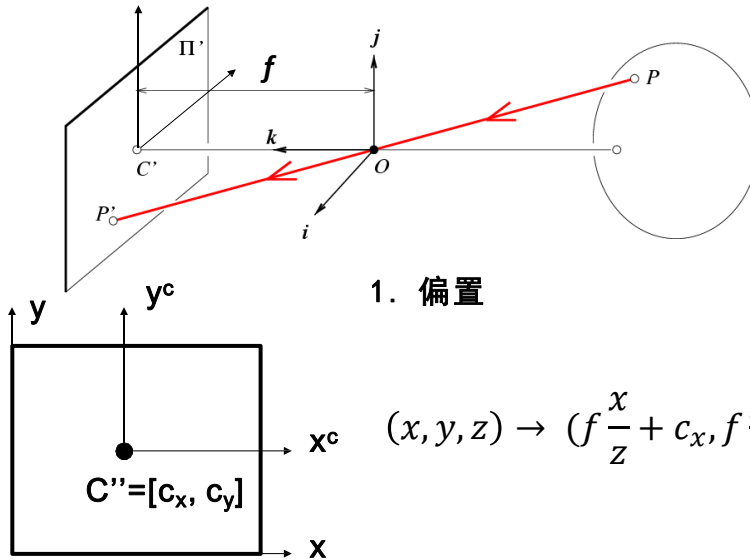
摄像机几何

- 针孔模型 & 透镜
- 摄像机几何
- 其他摄像机模型

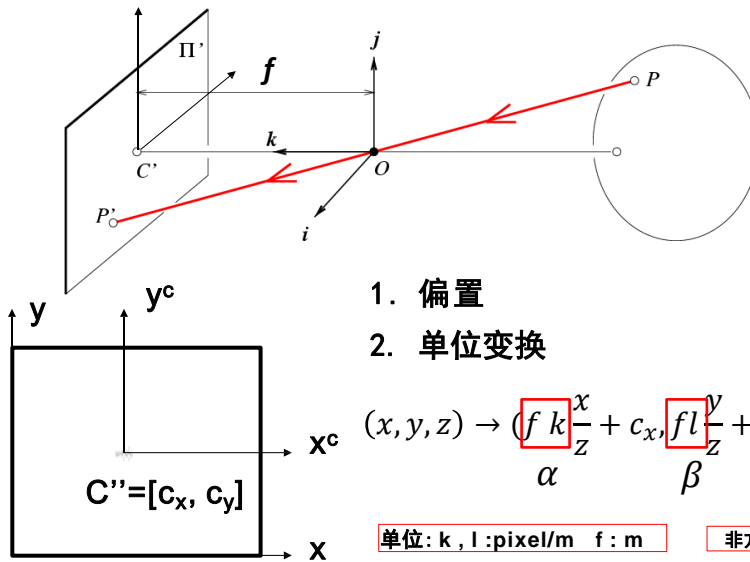
像平面到像素平面



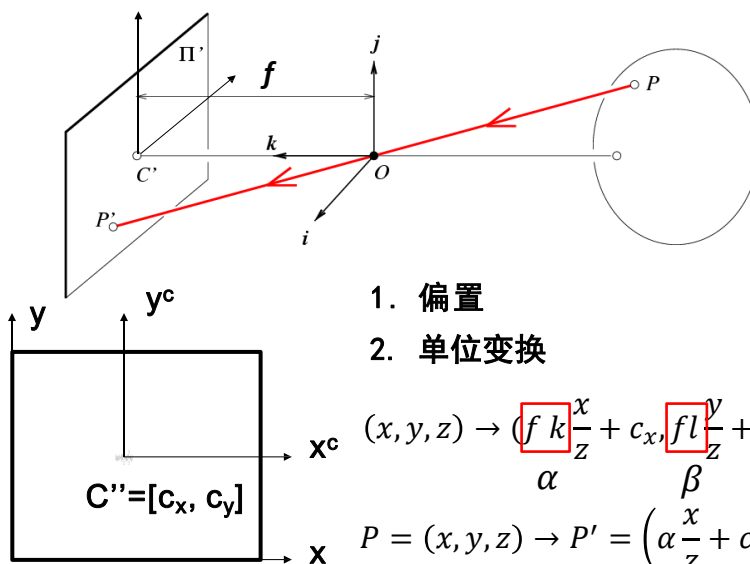
像素坐标系



像素坐标系



像素坐标系



问题: P 到 P' 的变换是线性的吗?

$$P = (x, y, z) \rightarrow P' = \left(\alpha \frac{x}{z} + c_x, \beta \frac{y}{z} + c_y \right)$$

齐次坐标

E \rightarrow **H**

$$(x, y) \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

图像点的齐次坐标

$$(x, y, z) \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

空间点的齐次坐标

H \rightarrow **E**

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow (x/w, y/w)$$

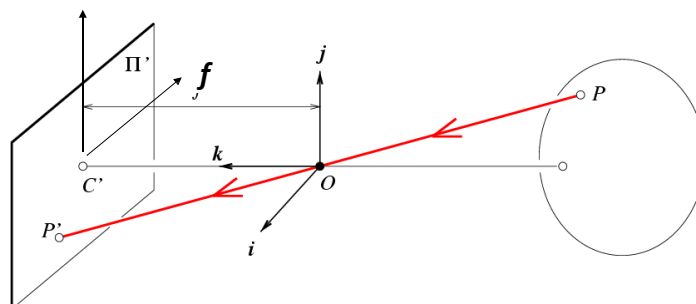
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow (x/w, y/w, z/w)$$

齐次坐标系中的投影变换

$$P_h' = \begin{bmatrix} \alpha x + c_x z \\ \beta y + c_y z \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & c_x & 0 \\ 0 & \beta & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow P_h$$

$$\underbrace{P_h'}_{\text{齐次}} \rightarrow P' = \underbrace{\left(\alpha \frac{x}{z} + c_x, \beta \frac{y}{z} + c_y \right)}_{\text{欧式}}$$

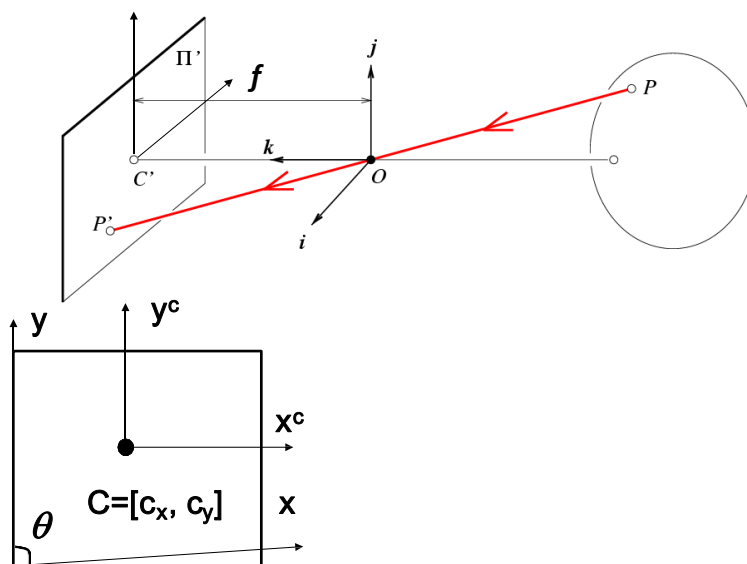
摄像机的投影矩阵



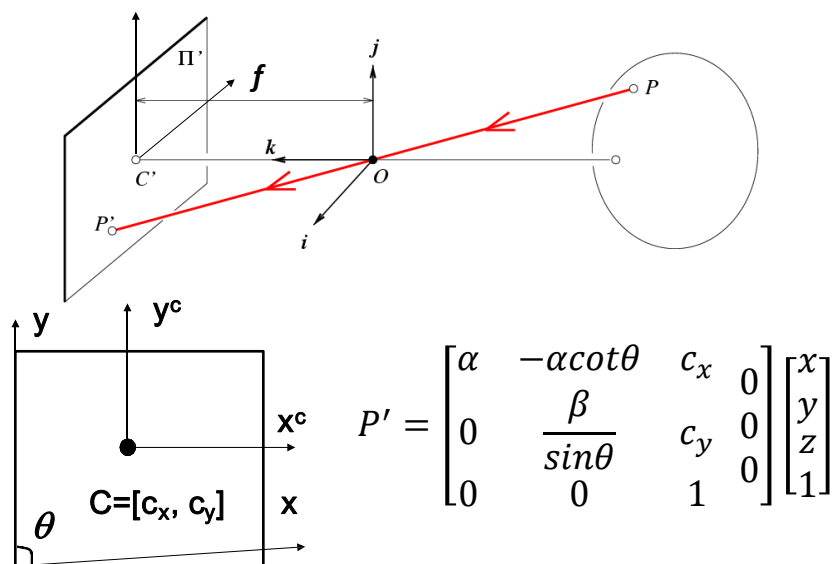
$$P' = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & c_x & 0 \\ 0 & \beta & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = MP$$

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \cot \theta & c_x & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{\sin \theta} & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

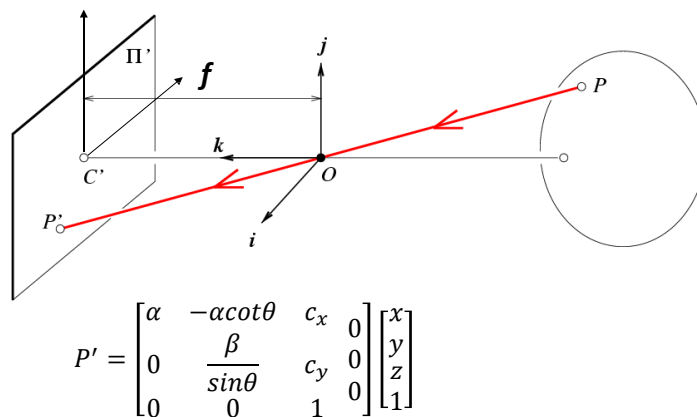
摄像机偏斜



摄像机偏斜

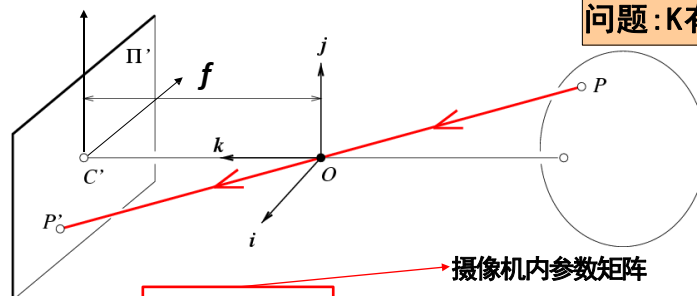


摄像机坐标系下的摄像机模型



摄像机坐标系下的摄像机模型

问题: K有多少个自由度?



$$P' = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \cot \theta & c_x & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{\sin \theta} & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

摄像机内参数矩阵
内参数决定了摄像机坐标系下空间点到图像点的映射!

$$K = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \cot \theta & c_x \\ 0 & \frac{\beta}{\sin \theta} & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= M P$$

投影矩阵

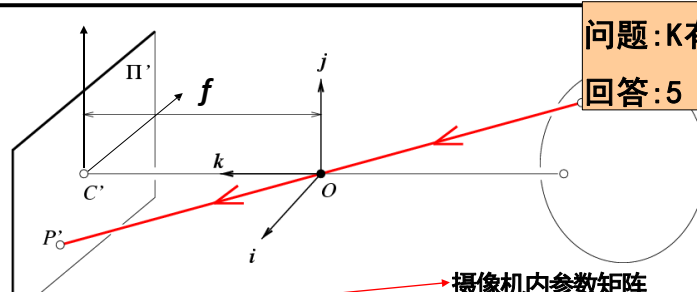
$$= K [I \quad 0] P$$

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \cot \theta & c_x & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{\sin \theta} & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

摄像机坐标系下的摄像机模型

问题: K有多少个自由度?

回答: 5 DOF !



$$P' = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \cot \theta & c_x & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{\sin \theta} & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

摄像机内参数矩阵
内参数决定了摄像机坐标系下空间点到图像点的映射!

$$K = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \cot \theta & c_x \\ 0 & \frac{\beta}{\sin \theta} & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= M P$$

投影矩阵

$$= K [I \quad 0] P$$

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \cot \theta & c_x & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{\sin \theta} & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

规范化投影变换

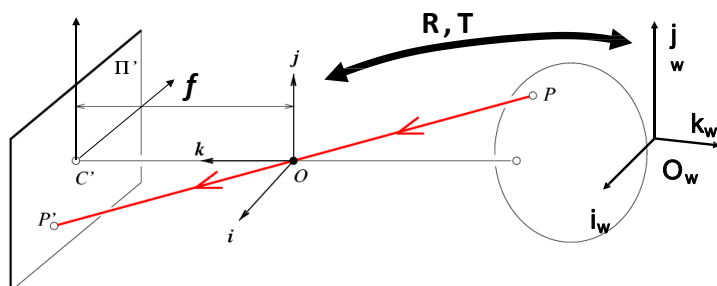
$$P' = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{R}^4 \xrightarrow{H} \mathcal{R}^3$$

$$P' = M P$$

P' 欧式坐标为 $\begin{bmatrix} x \\ z \\ y \\ z \end{bmatrix}$

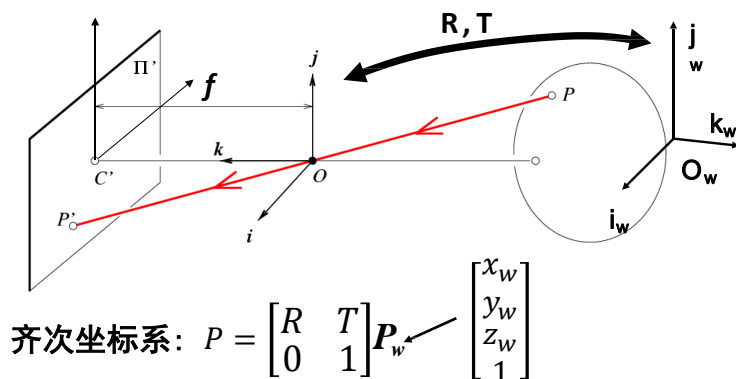
$$M = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \cot \theta & c_x & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{\sin \theta} & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

世界坐标系

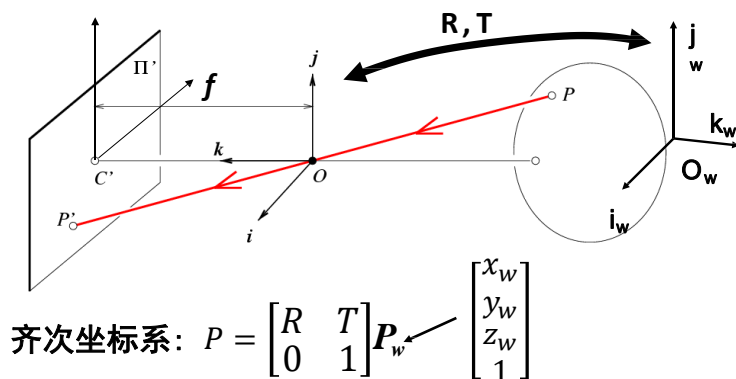


- 摄像机坐标系描述三维物体的空间信息是否方便？
- 如何将物体从世界坐标系转到摄像机坐标系？

摄像机外参数



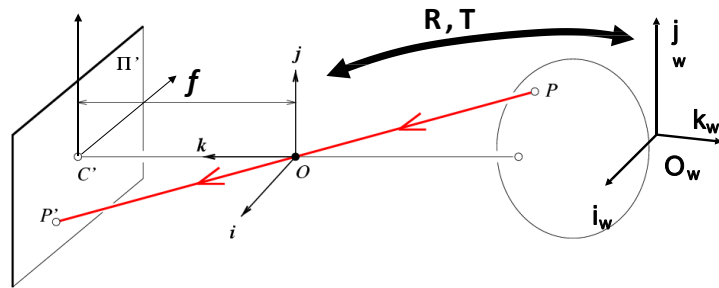
摄像机外参数



外参数矩阵

$$P' = K[I \ 0]P = K[I \ 0] \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P_w = K \boxed{\begin{bmatrix} R & T \end{bmatrix}} P_w = MP_w$$

摄像机几何



$$P' = K \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} P = K \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P_w = K \begin{bmatrix} R & T \end{bmatrix} P_w = M P_w$$

内部参数
外部参数

完整的摄像机模型！

问题：各个符号的物理意义及其维度分别是什么？

$$P' = K \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} P = K \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P_w = K \begin{bmatrix} R & T \end{bmatrix} P_w = M P_w$$

问题: 投影矩阵 M 有多少个自由度?

$$P' = K \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} P = K \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P_w = K \begin{bmatrix} R & T \end{bmatrix} P_w = M P_w$$

内部参数 外部参数

问题: P' 转换成欧式坐标该如何写?

$$P' = K \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} P = K \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P_w = K \begin{bmatrix} R & T \end{bmatrix} P_w = M P_w = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} P_w$$

内部参数 外部参数

定理 (Faugeras, 1993)

$$M = K[R \ T] = [KR \ KT] = [A \ b] \quad A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

令 $M = (A \ b)$ 为 3×4 的矩阵, $a_i^T (i = 1, 2, 3)$ 表示由矩阵 A 的行

- M 是透视投影矩阵的一个充分必要条件是 $\text{Det}(A) \neq 0$
- M 是零倾斜透视投影矩阵的一个充分必要条件是 $\text{Det}(A) \neq 0$ 且

$$(a_1 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3) = 0$$

- M 是零倾斜且宽高比为1的透视投影矩阵的一个充分必要条件是 $\text{Det}(A) \neq 0$ 且

$$\begin{cases} (a_1 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3) = 0 \\ (a_1 \times a_3) \cdot (a_1 \times a_3) = (a_2 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3) \end{cases}$$

投影变换的性质

3D世界中的平行线在图像中相交于“影消点”

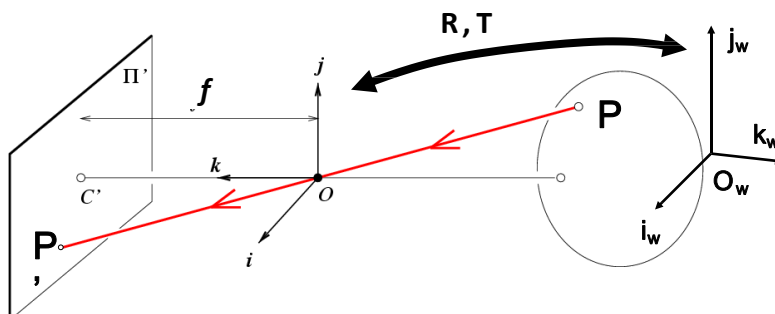
1. 点投影为点
2. 线投影为线
3. 近大远小
4. 角度不再保持
5. 平行线相交



摄像机几何

- 针孔模型 & 透镜
- 摄像机几何
- 其他摄像机模型

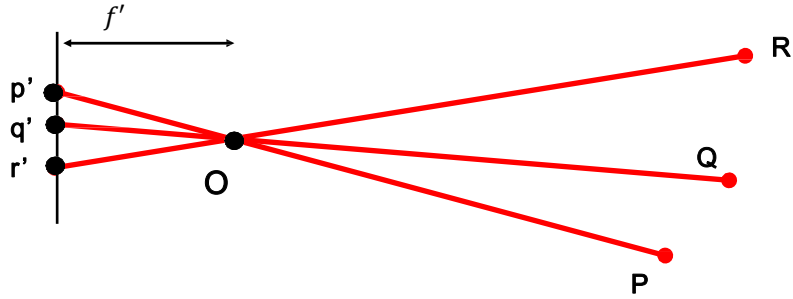
透视投影摄像机



$$P'_{3 \times 1} = MP_w = K_{3 \times 3} [R \quad T]_{3 \times 4} P_{w4 \times 1} \quad M = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

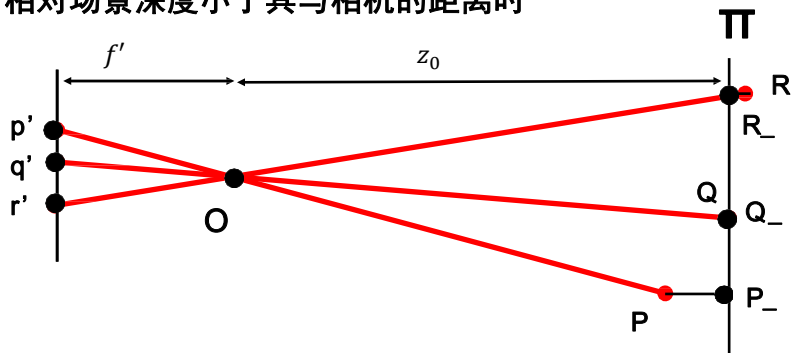
$$= \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} P_w = \begin{bmatrix} m_1 P_w \\ m_2 P_w \\ m_3 P_w \end{bmatrix} \xrightarrow{E} \left(\frac{m_1 P_w}{m_3 P_w}, \frac{m_2 P_w}{m_3 P_w} \right)$$

透视投影摄像机

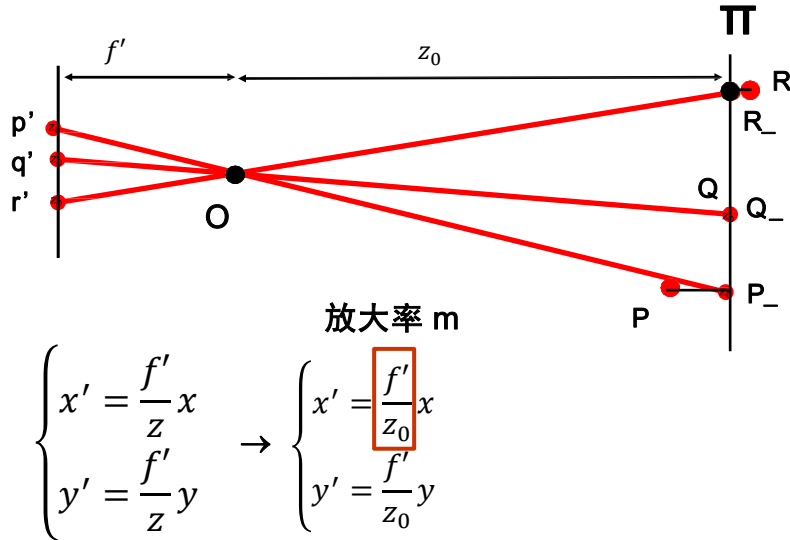


弱透视投影摄像机

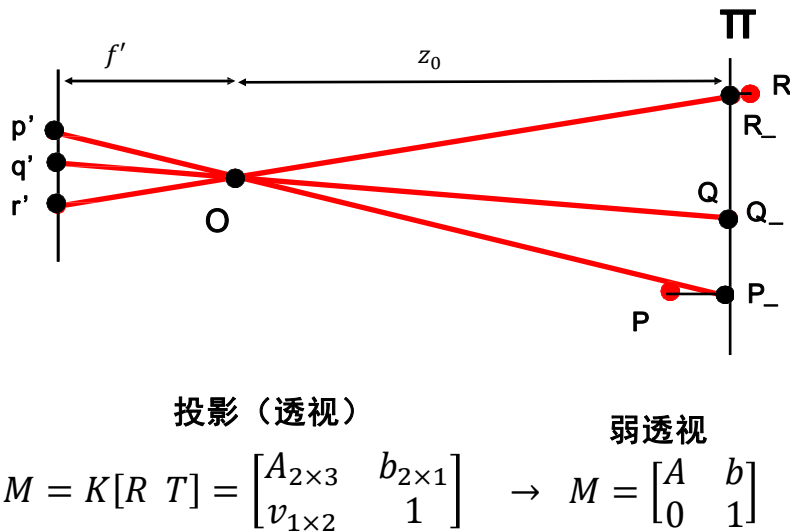
当相对场景深度小于其与相机的距离时



弱透视投影摄像机



弱透视投影摄像机



弱透视与透视投影摄像机

$$P' = MP_w = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} P_w = \begin{bmatrix} m_1 P_w \\ m_2 P_w \\ m_3 P_w \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} A & b \\ v & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathbf{E}} \left(\frac{m_1 P_w}{m_3 P_w}, \frac{m_2 P_w}{m_3 P_w} \right) \quad \text{透视}$$

$$P' = MP_w = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} P_w = \begin{bmatrix} m_1 P_w \\ m_2 P_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} A & b \\ v & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

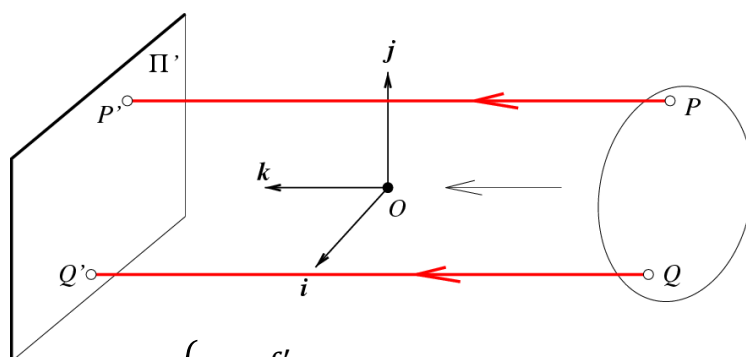
$$\xrightarrow{\mathbf{E}} (m_1 P_w, m_2 P_w)$$

↑ ↑
放大率

$$= \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{弱透视}$$

正交投影摄像机

摄像机中心到像平面的距离无限远时



$$\begin{cases} x' = \frac{f'}{z} x \\ y' = \frac{f'}{z} y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

各种摄像机模型的应用场合

- 正交投影
 - 更多应用在建筑设计 (AUTOCAD) 或者工业设计行业
- 弱透视投影在数学方面更简单
 - 当物体较小且较远时准确, 常用于图像识别任务
- 透视投影对于3D到2D映射的建模更为准确
 - 用于运动恢复结构或SLAM

摄像机几何

- 针孔模型 & 透镜
- 摄像机几何
- 其他摄像机模型