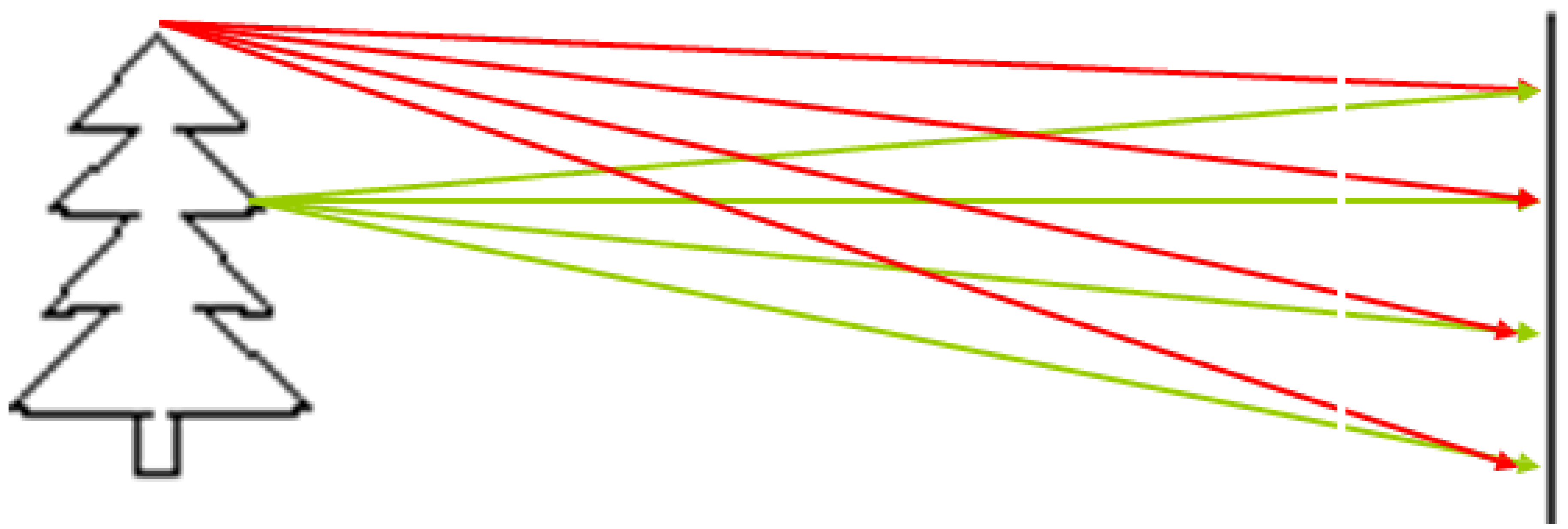
1. 摄像机几何

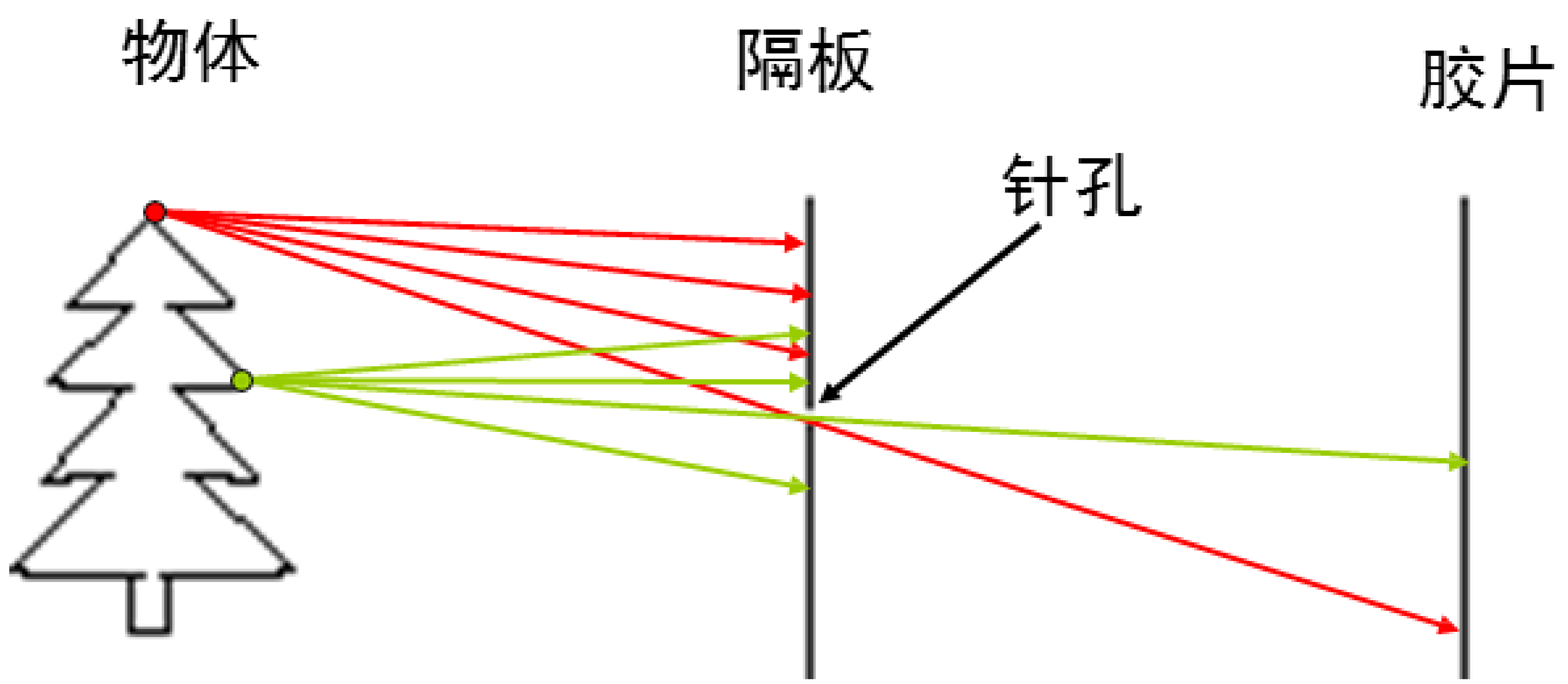
- 针孔摄像机 & 透镜
- 摄像机几何
- 其他摄像机模型

我们如何记录世界？



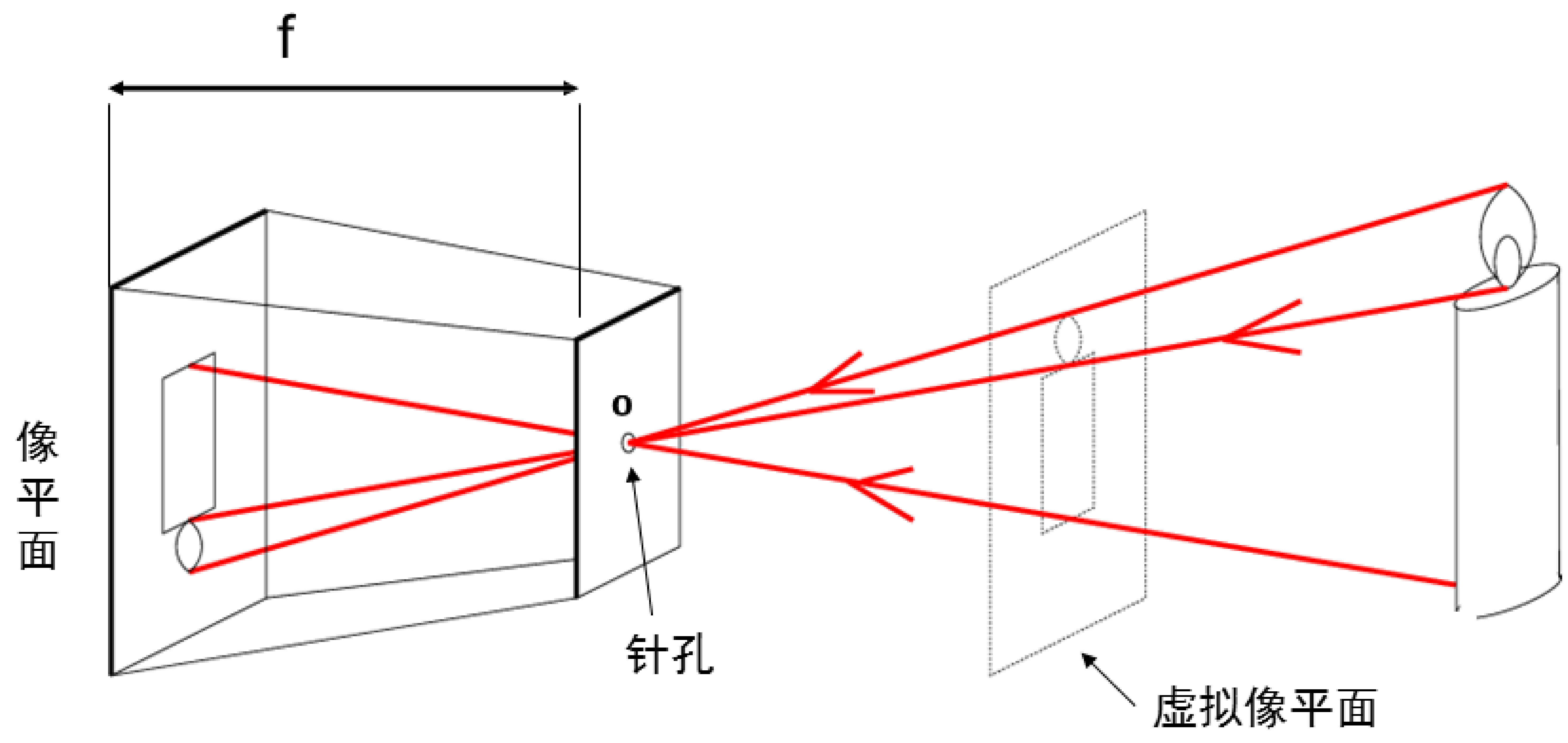
- **摄像机设计**
  - 想法：将胶片直接放置在物体前方？

针孔摄像机



- **添加屏障**——减少模糊

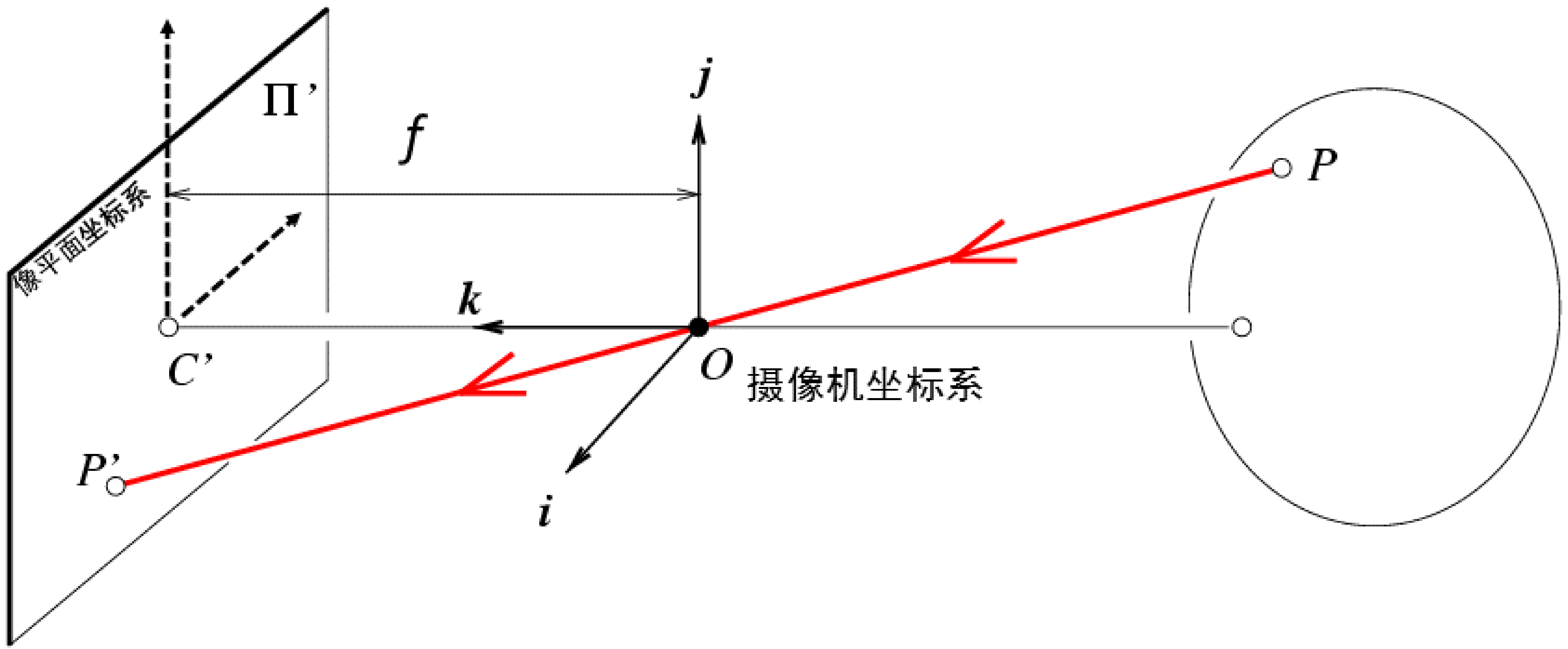
针孔摄像机



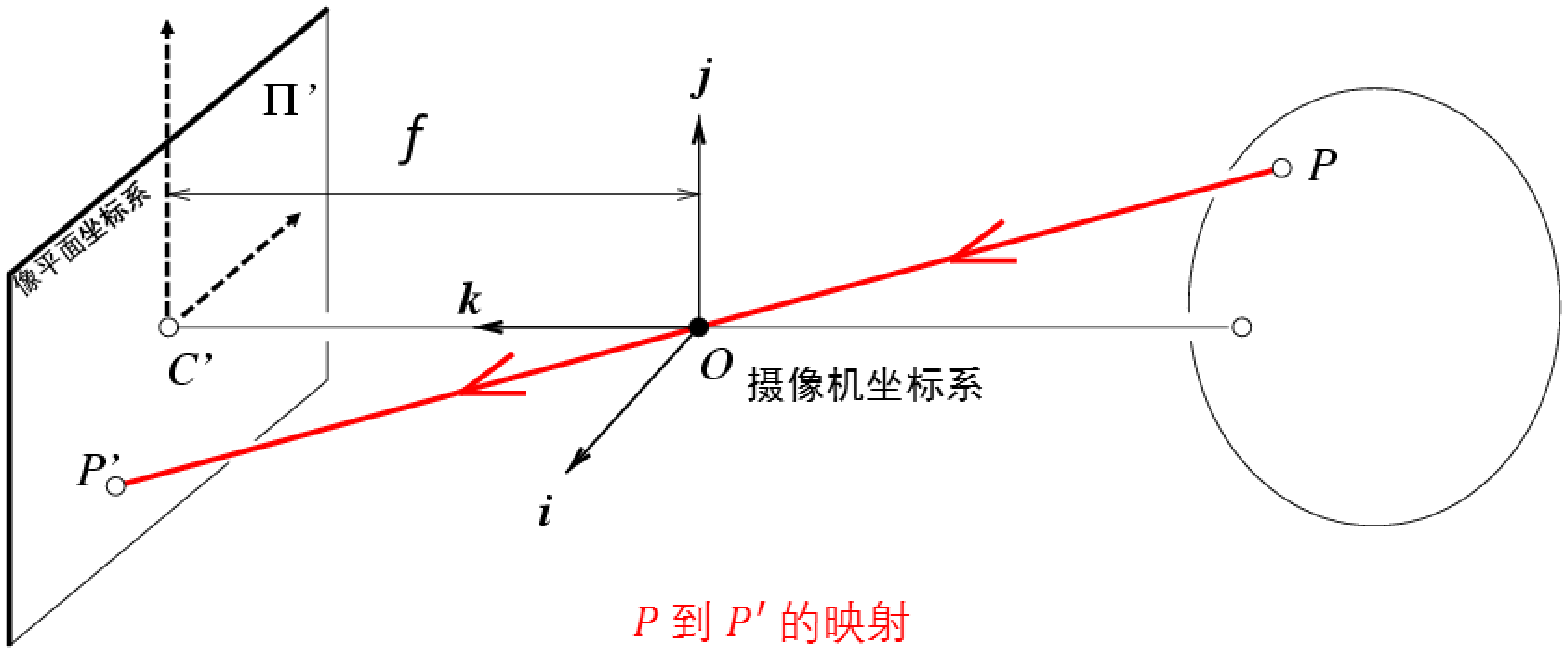
f = 焦距

o = 光圈 = 针孔 = 摄像机中心

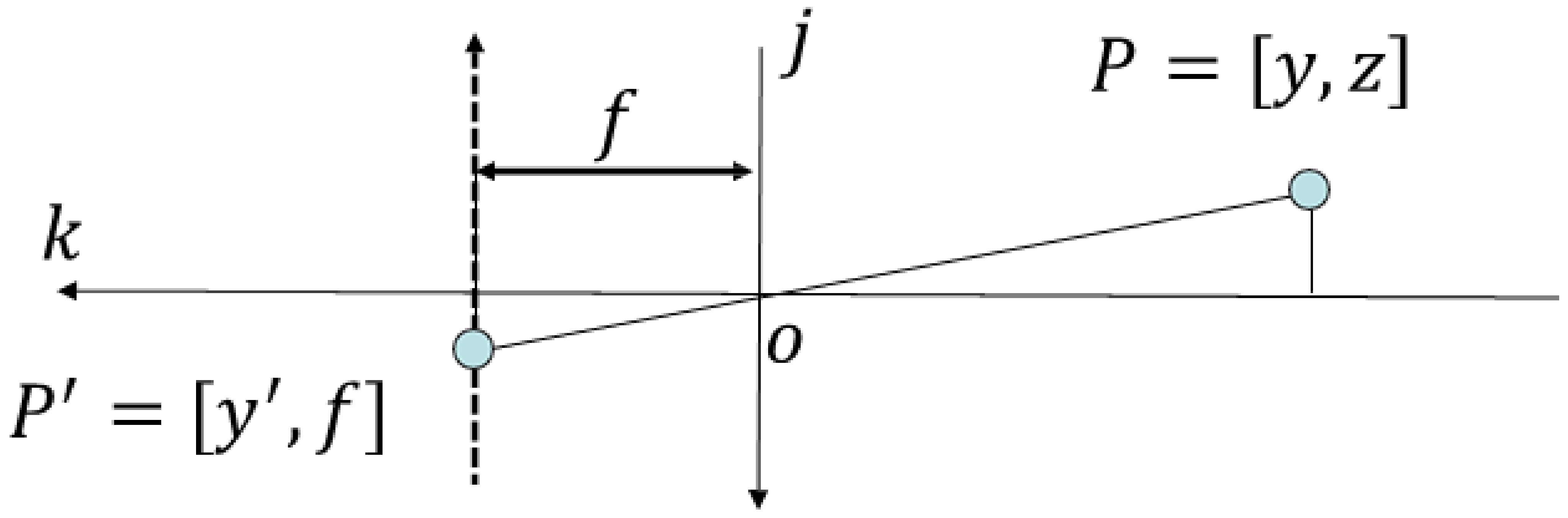
针孔摄像机



针孔摄像机



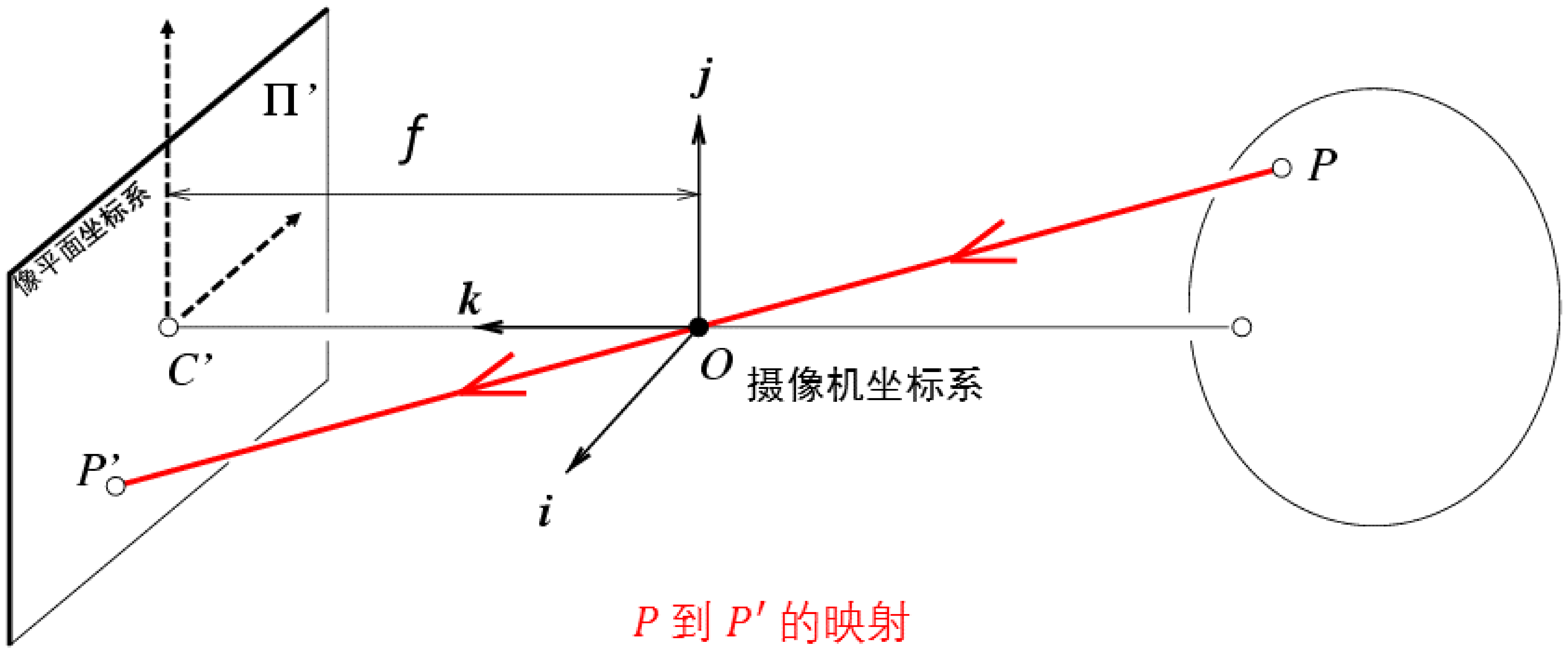
P 到 *P′* 的映射



$$\frac{y'}{f}=\frac{y}{z}\Rightarrow y'=f\frac{y}{z}$$

相似三角形法

针孔摄像机

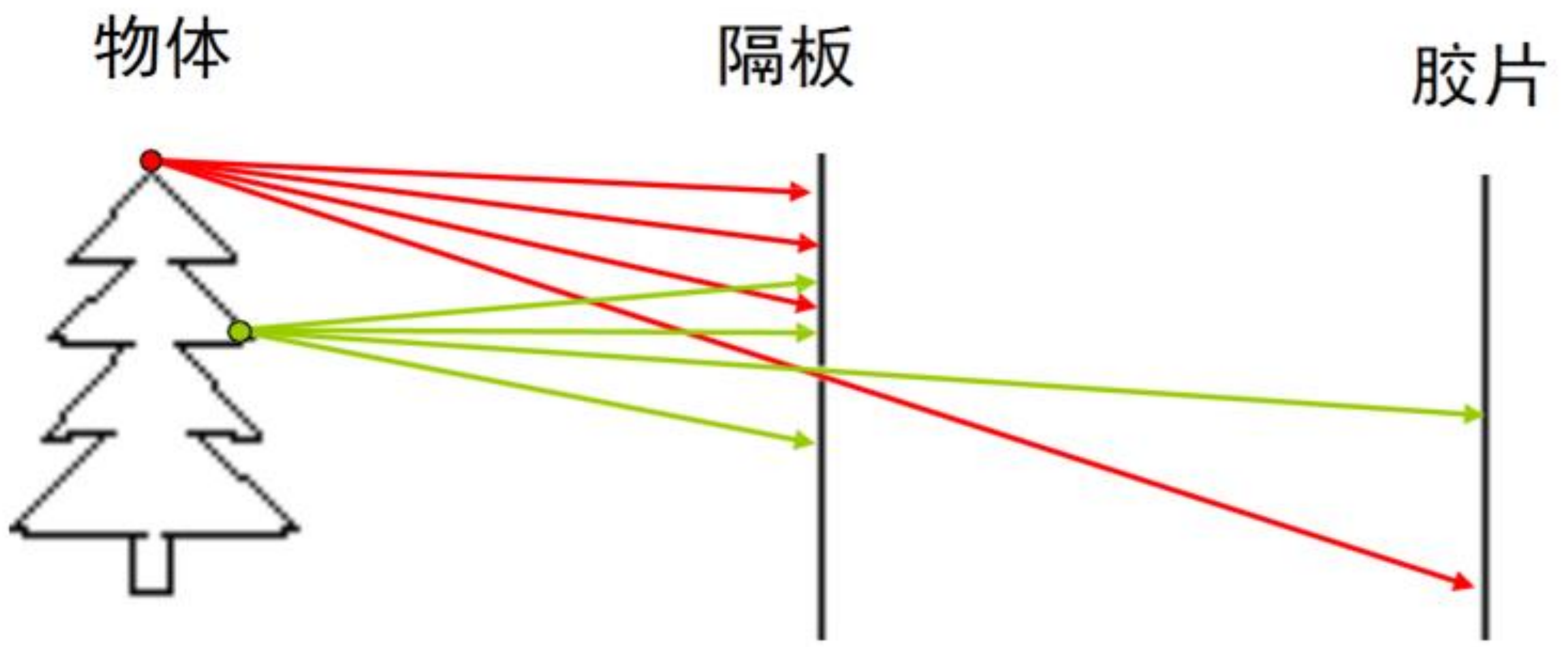


P 到 P′ 的映射

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = f\dfrac{x}{z} \\ y' = f\dfrac{y}{z} \end{cases}$$

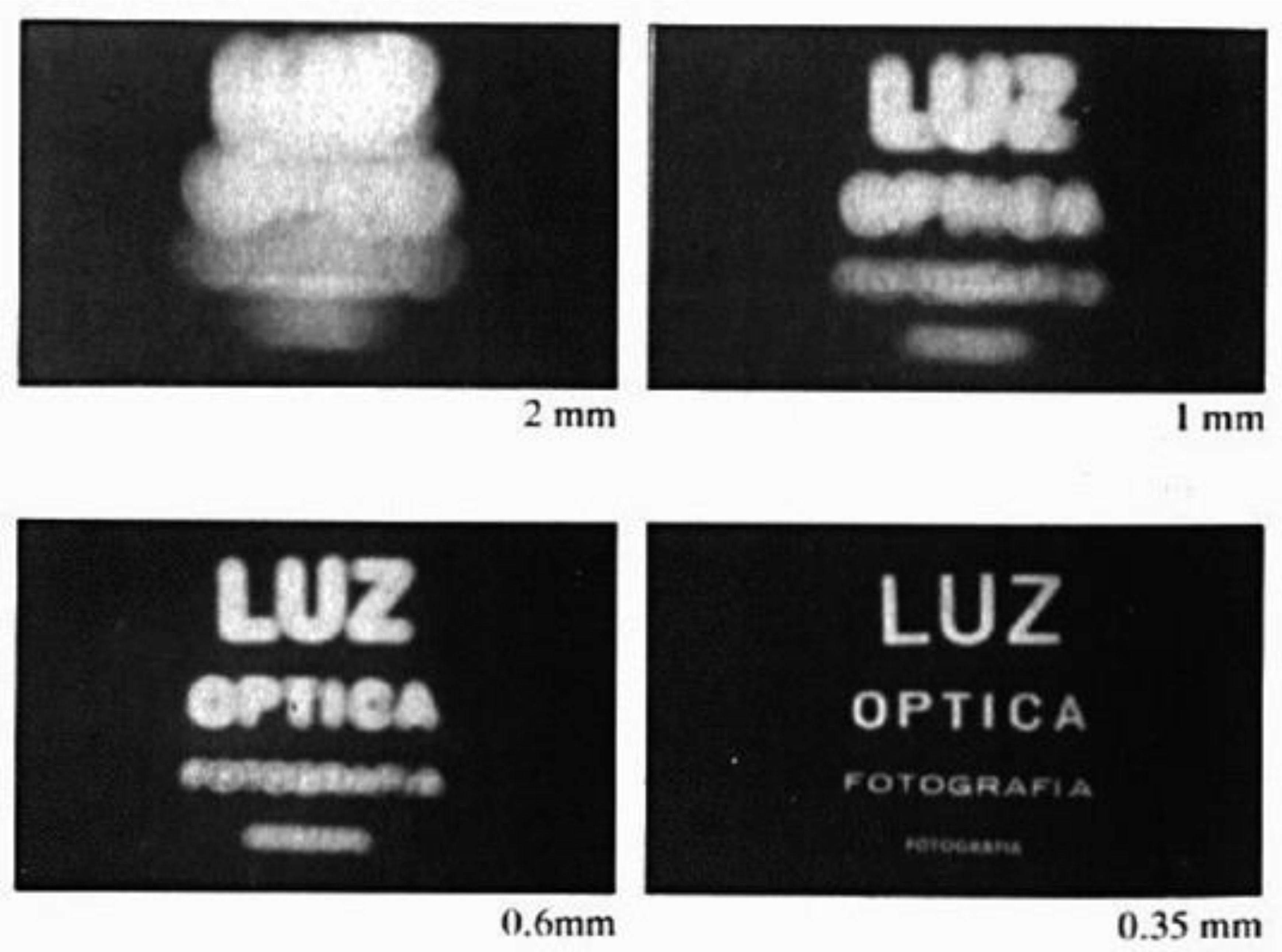
针孔摄像机



光圈的尺寸重要吗？

针孔摄像机

缩小
光圈

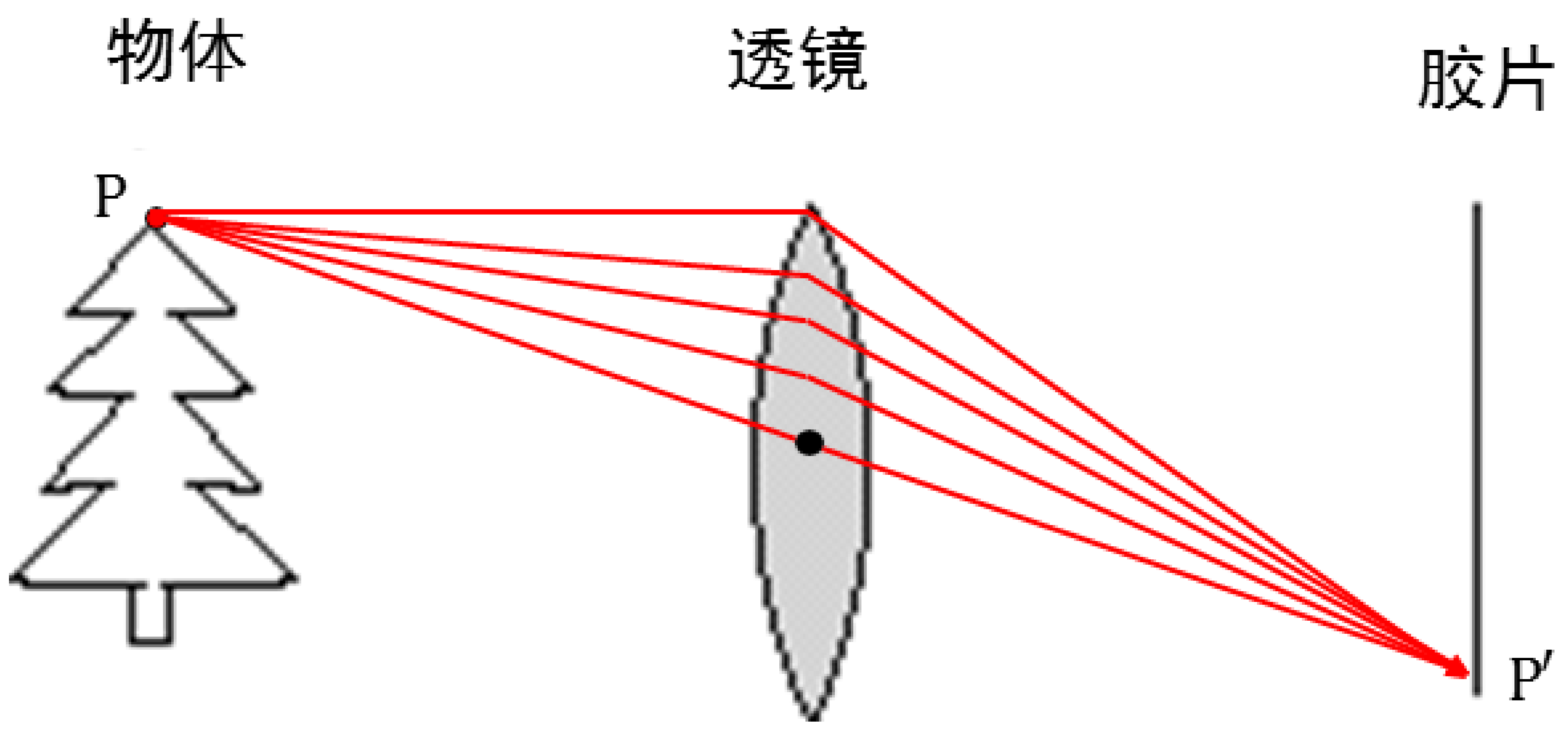


随着光圈减小，成像效果如何变化？（越来越清晰、越来越暗）

如何应对到达胶片的光线变少？

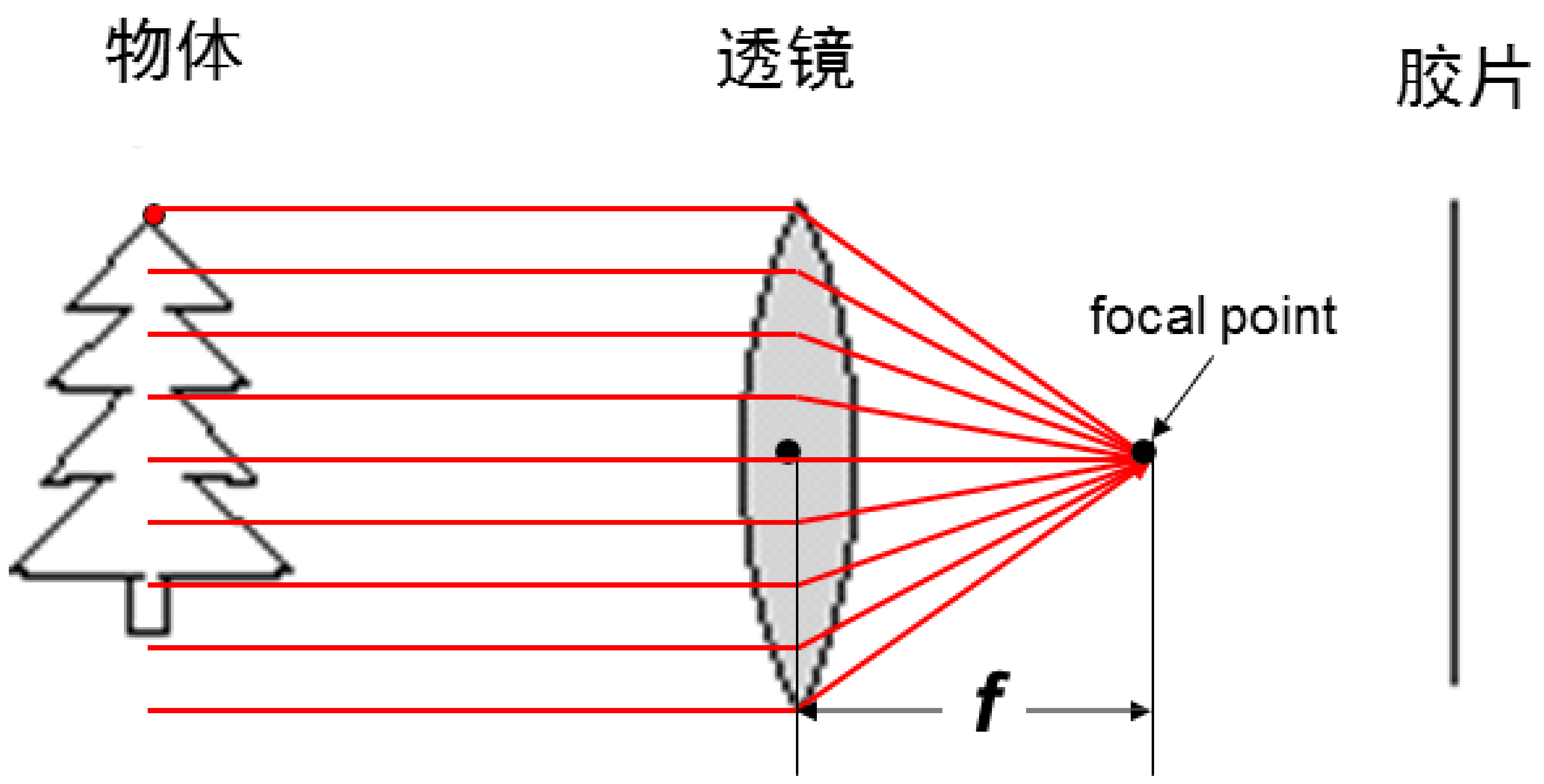
摄像机 & 透镜

增加透镜！！！



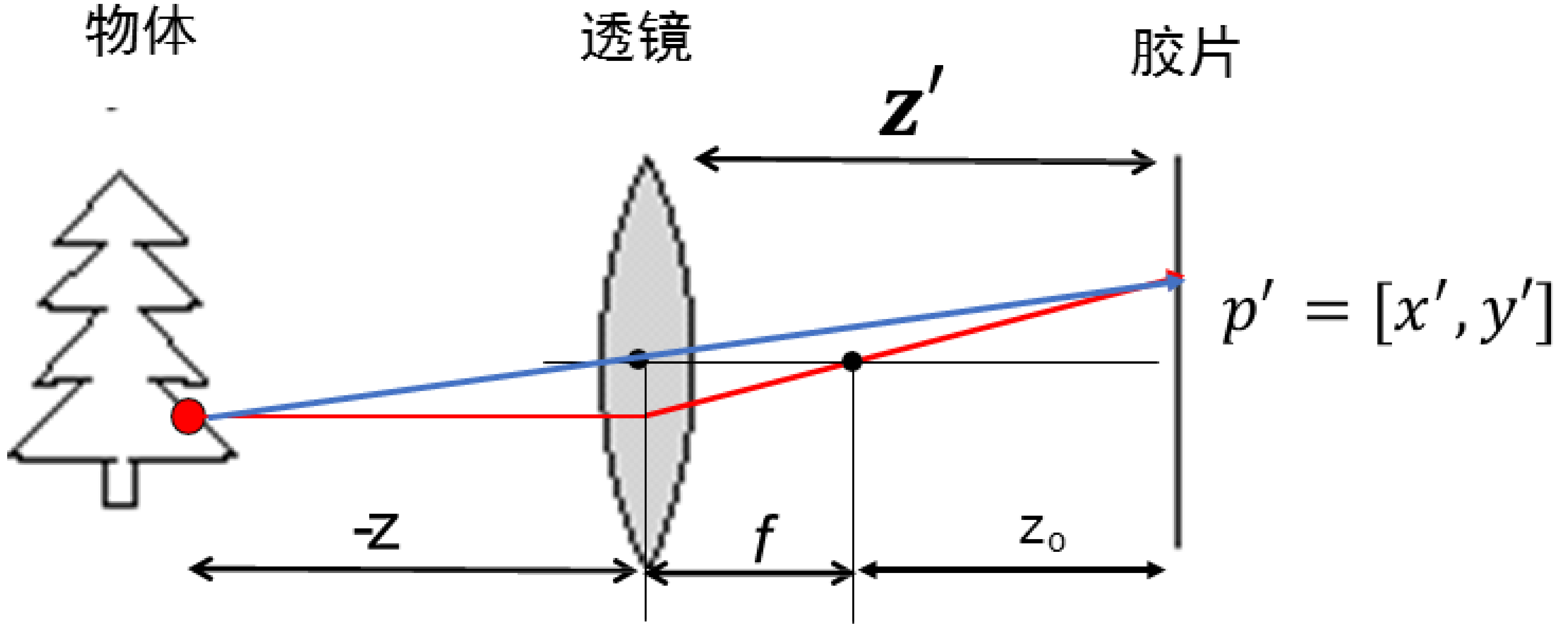
- 透镜将多条光线聚焦到胶片上，增加了照片的亮度

摄像机 & 透镜



- 透镜将光线聚焦到胶片上
  - 所有平行于光轴的光线都会会聚到焦点，焦点到透镜中心的距离称为焦距。
  - 穿过中心的光线的方向不发生改变

近轴折射模型



根据折射定律：

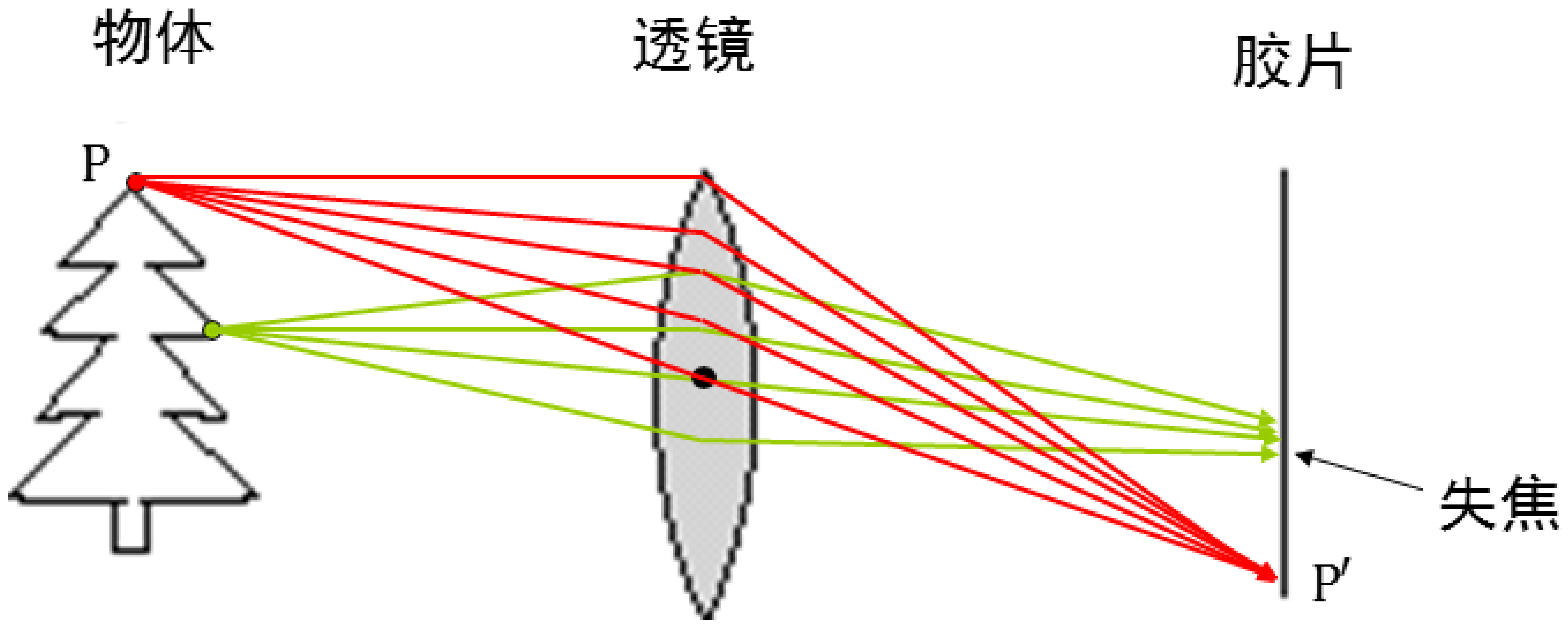
$$f = \frac{R}{2(n-1)}$$

$$z' = f + z_0$$

$$\begin{cases} x' = z' \dfrac{x}{z} \\ y' = z' \dfrac{y}{z} \end{cases}$$

R为透镜球面半径，n为透镜折射系数

透镜问题：失焦



- 透镜将光线聚焦到胶片上
  - 物体“聚焦”有特定距离
  - 景深

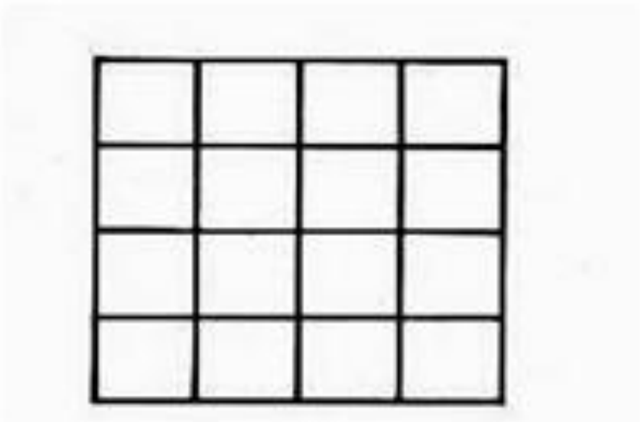
透镜问题：失焦

微距摄像！！！

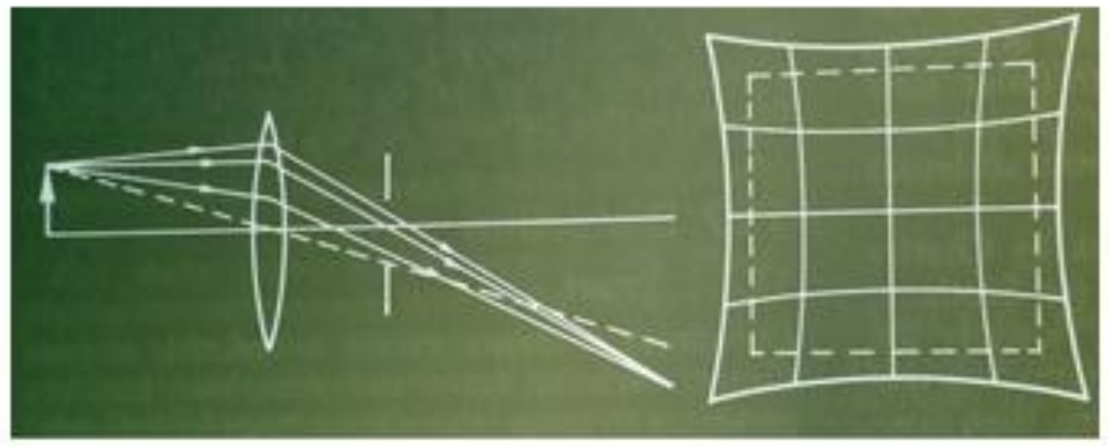
- 透镜将光线聚焦到胶片上
  - 物体“聚焦”有特定距离
  - 景深

透镜问题：径向畸变

- 径向畸变：图像像素点以畸变中心为中心点，沿着径向产生的位置偏差，从而导致图像中所成的像发生形变

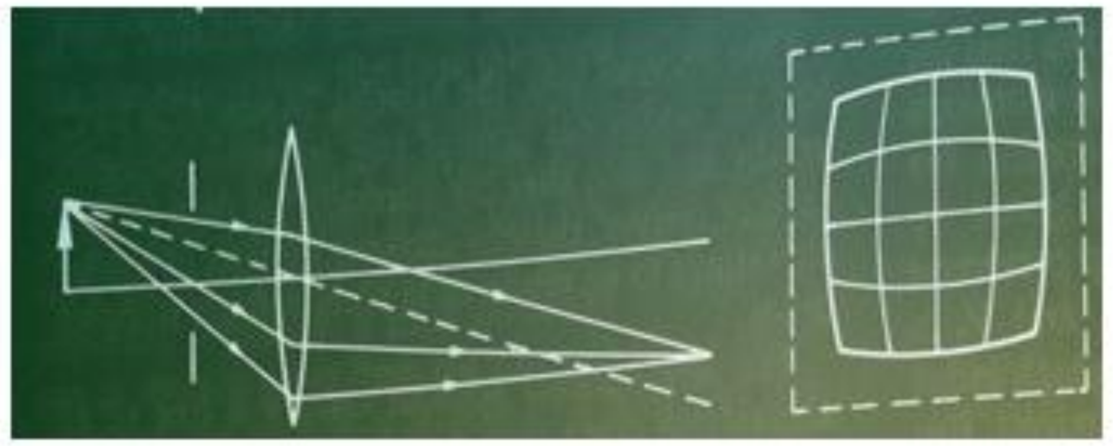


没有畸变



枕形

畸变像点相对于理想像点沿径向向外偏移，远离中心



桶形

畸变像点相对于理想点沿径向向中心靠拢

产生原因：光线在远离透镜中心的地方比靠近中心的地方更加弯曲

1. 摄像机几何

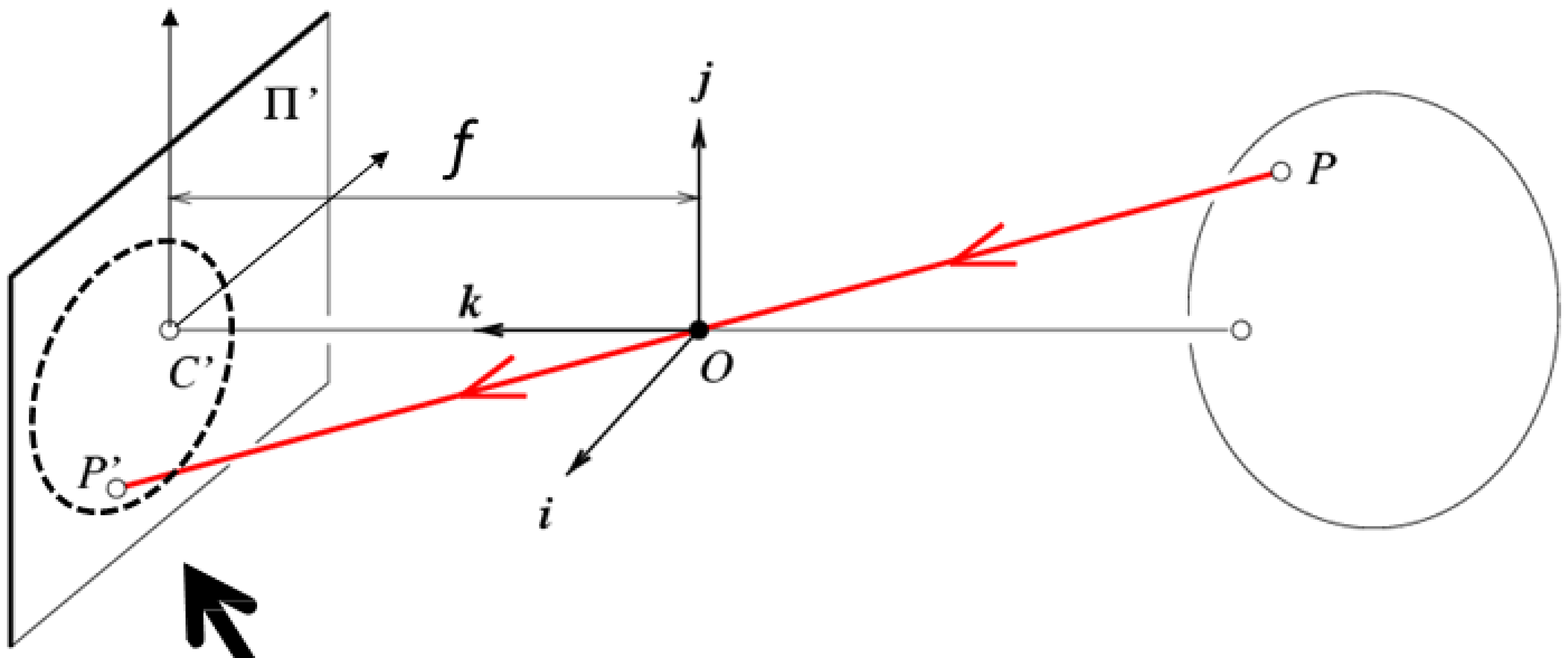
- 针孔摄像机 & 透镜
- 摄像机几何
- 其他摄像机模型（完）

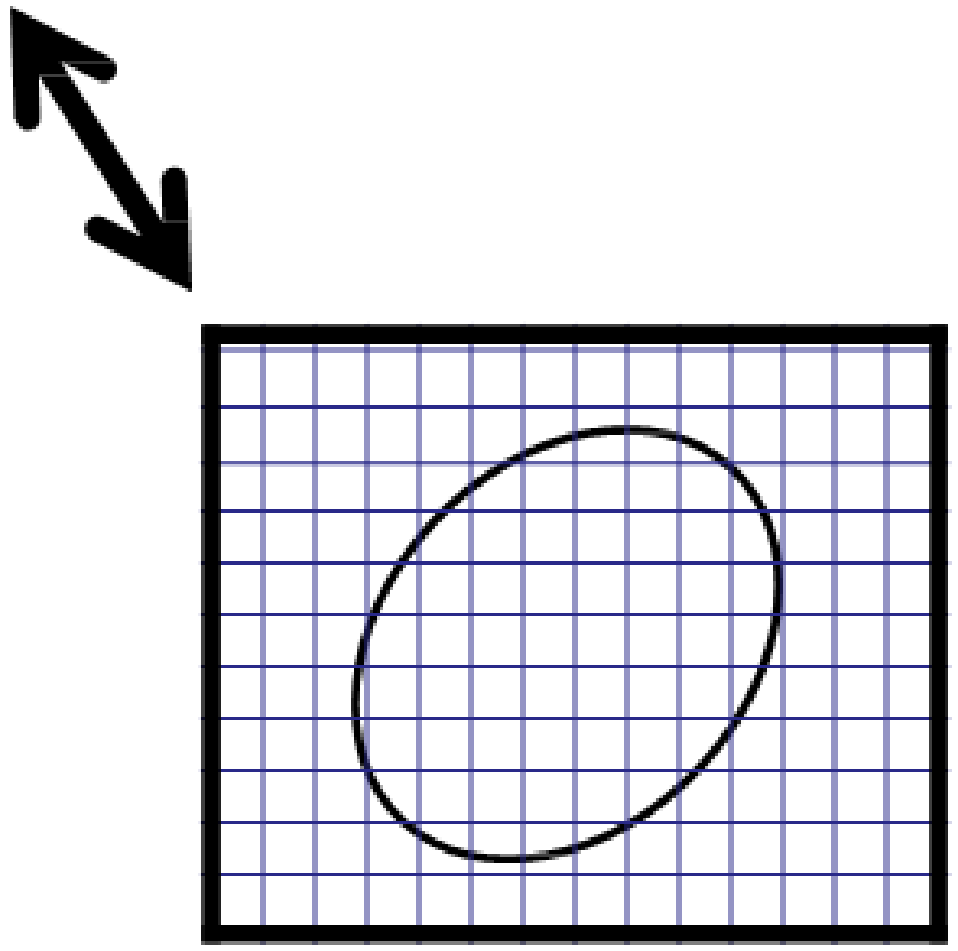
1. 摄像机几何

- 针孔摄像机 & 透镜
- 摄像机几何
- 其他摄像机模型

像平面到像素平面

像平面

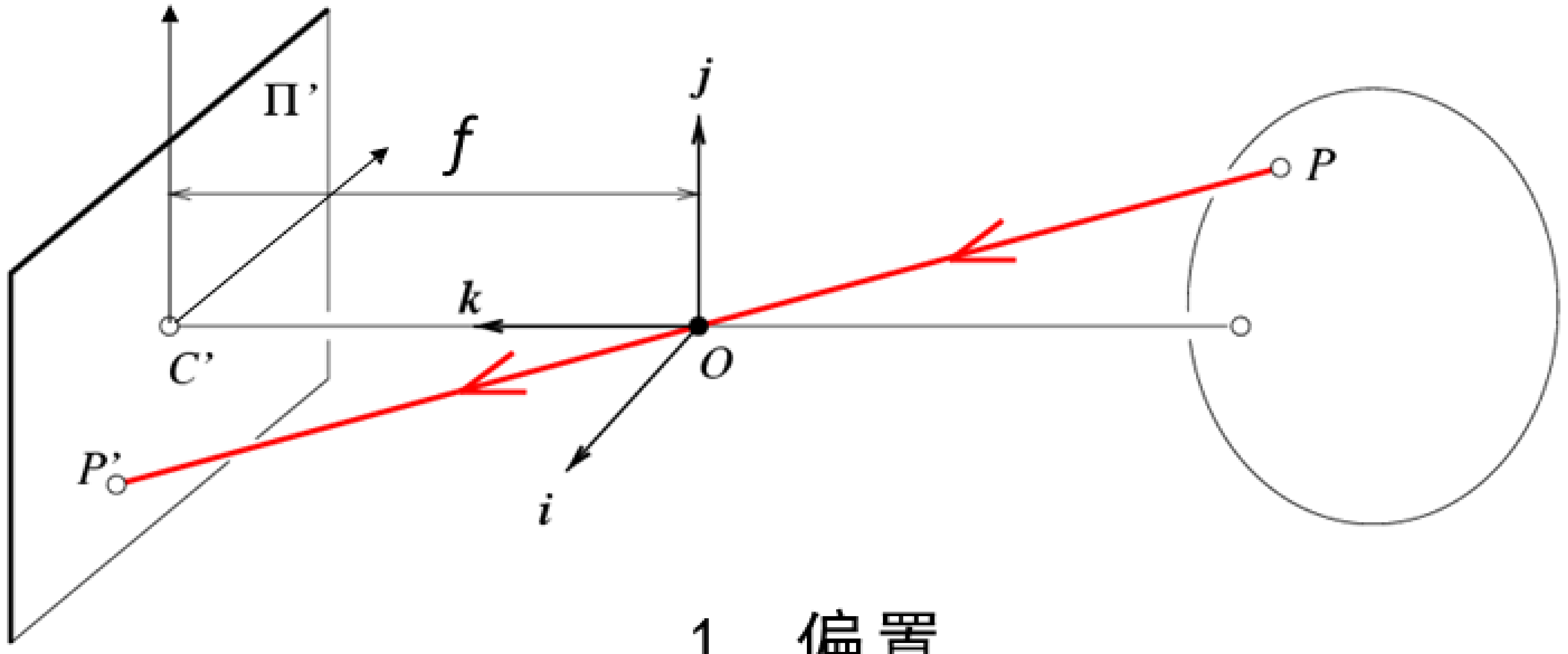




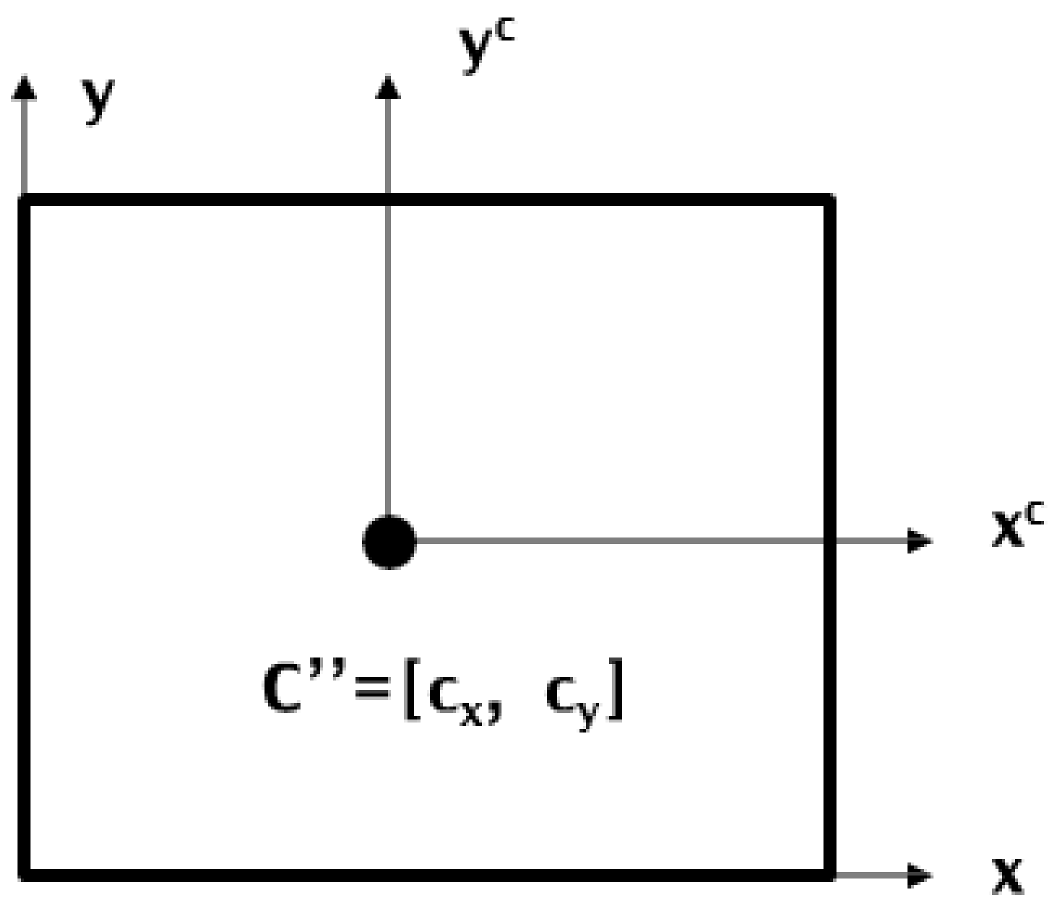
数字图像

像素，左下角坐标系

像素坐标系

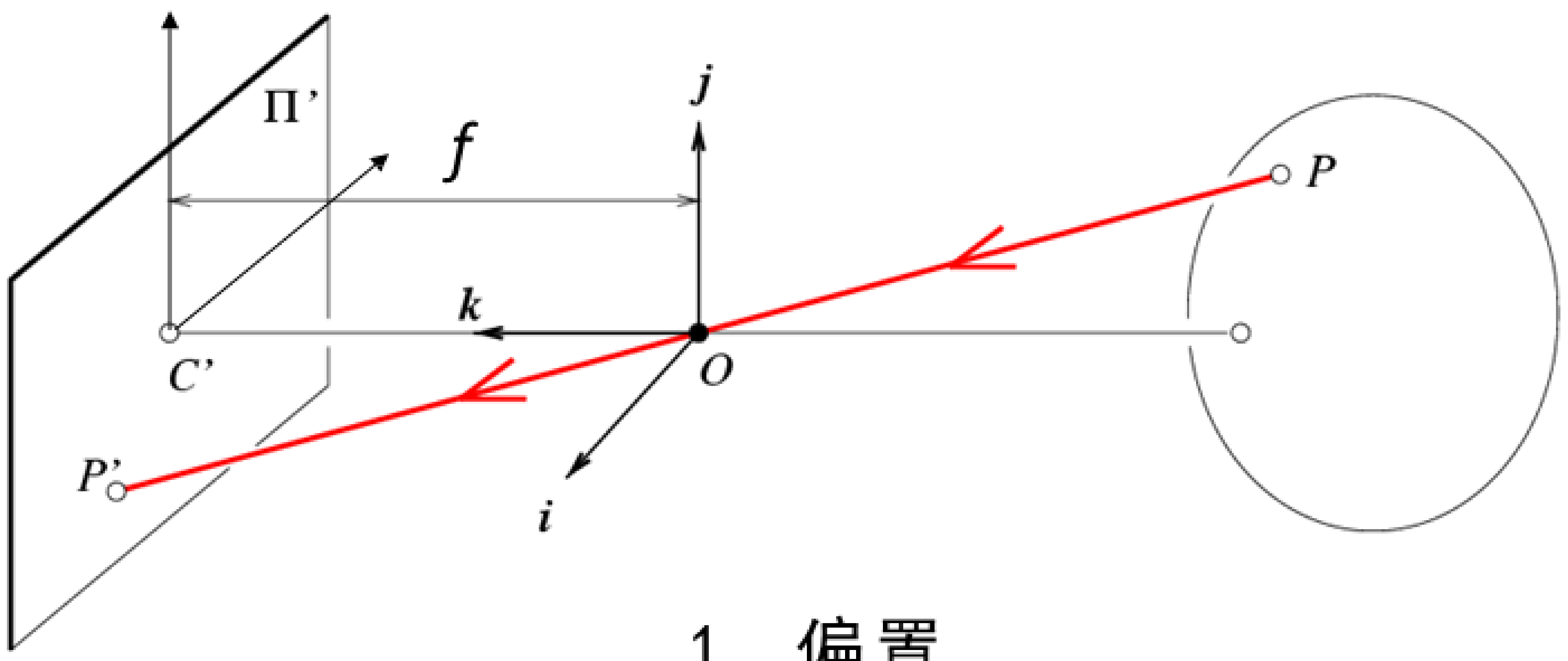


1. 偏置

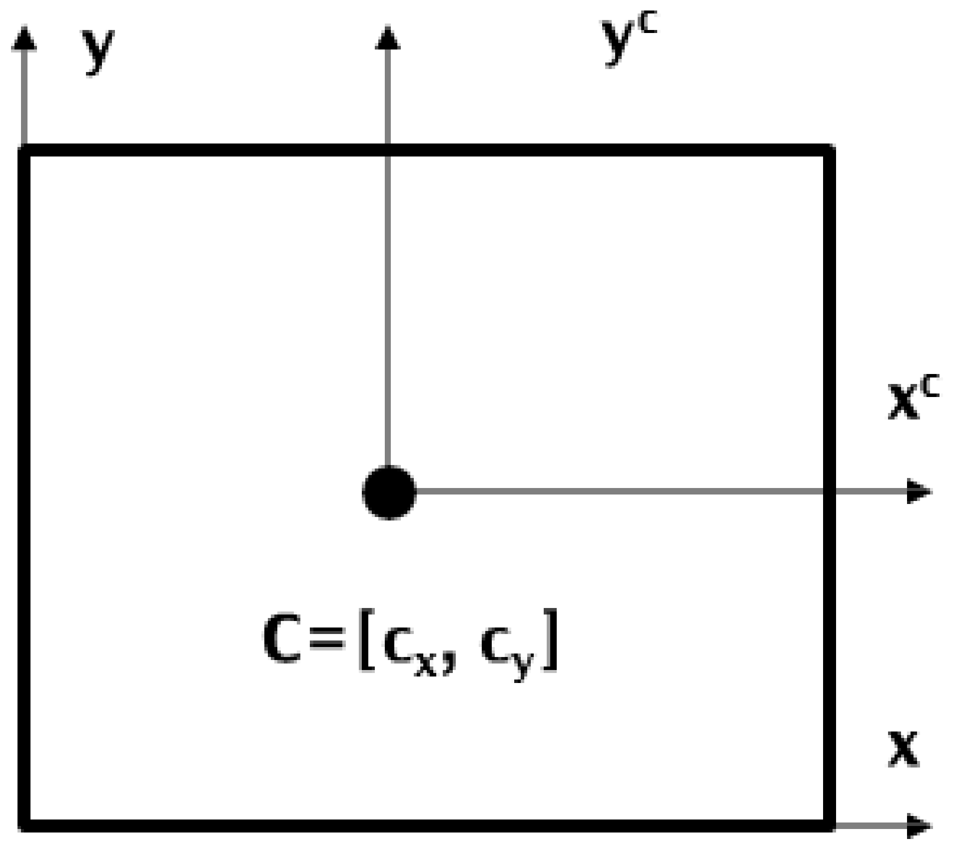


$$(x, y, z) \rightarrow \left(f\frac{x}{z} + c_x, f\frac{y}{z} + c_y\right)$$

像素坐标系



1. 偏置
2. 单位变换



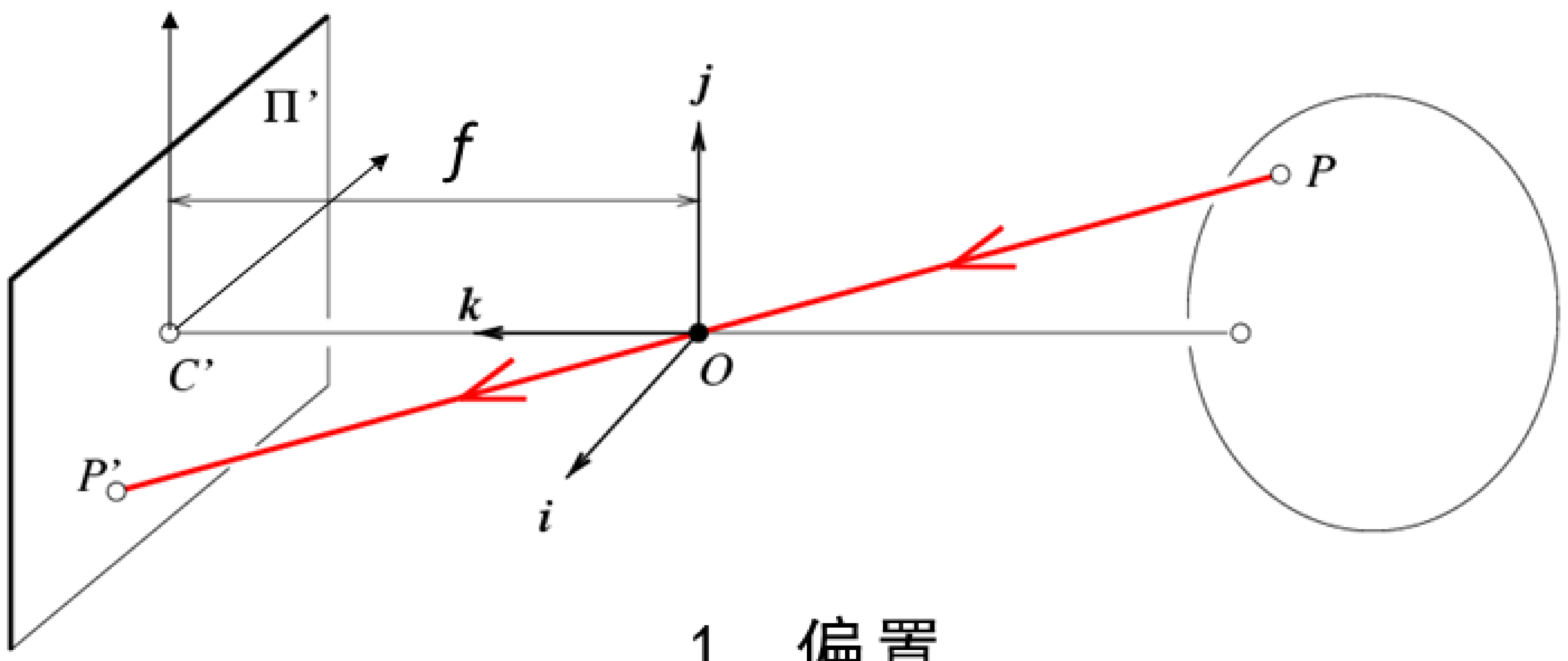
$$(x, y, z) \rightarrow (\boxed{f\ k}\frac{x}{z} + c_x, \boxed{f\,l}\frac{y}{z} + c_y)$$

α β

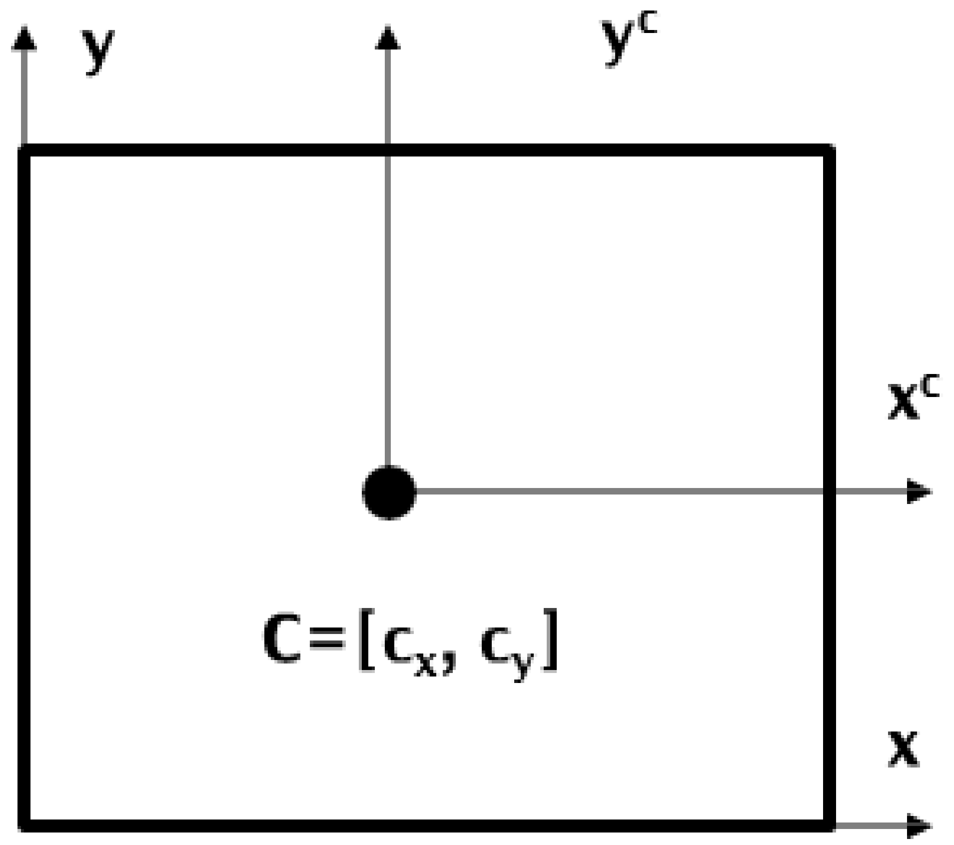
单位：k , l :pixel/m f : m

非方形像素 α , β : pixel

像素坐标系



1. 偏置
2. 单位变换



$$(x,y,z) \rightarrow (\underbrace{\boxed{f\ k}}_{\alpha}\frac{x}{z} + c_x, \underbrace{\boxed{f1}}_{\beta}\frac{y}{z} + c_y)$$

$$P = (x,y,z) \rightarrow P' = \left(\alpha\frac{x}{z} + c_x, \beta\frac{y}{z} + c_y\right)$$

问题：P到P'的变换是线性的吗？

$$P = (x, y, z) \rightarrow P' = \left(\alpha \frac{x}{z} + c_x, \beta \frac{y}{z} + c_y\right)$$

齐次坐标系

E $\longrightarrow$ **H**

$$(x, y) \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

图像点的齐次坐标

$$(x, y, z) \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

空间点的齐次坐标

H $\longrightarrow$ **E**

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow (x/w, y/w)$$

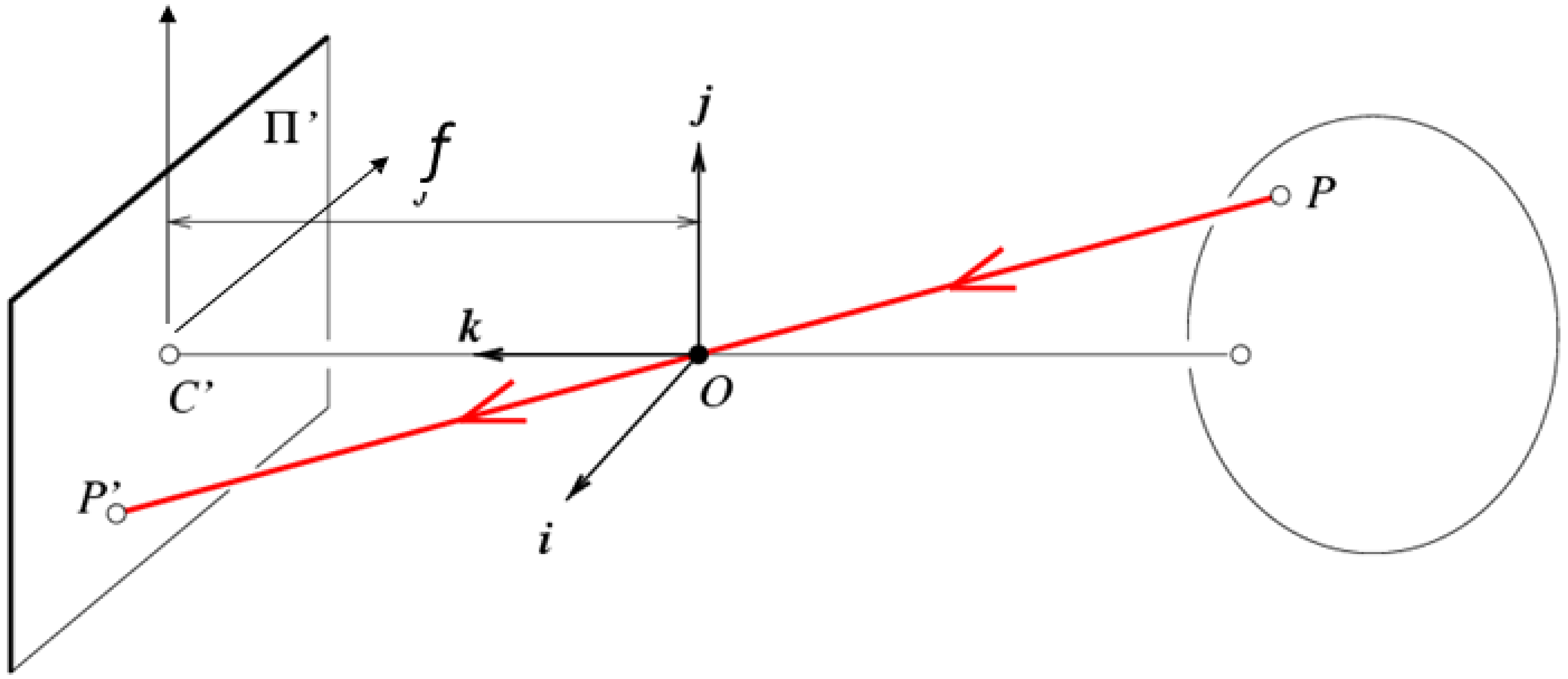
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \Rightarrow (x/w, y/w, z/w)$$

齐次坐标系中的投影变换

$$P_h'=\begin{bmatrix}\alpha x + c_x z\\ \beta y + c_y z\\ z\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}\alpha & 0 & c_x & 0\\ 0 & \beta & c_y & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}}\boxed{\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\\ 1\end{bmatrix}} \quad P_h$$

$$\overbrace{P_h'}^{\text{齐次}} \to \overbrace{P' = (\alpha\frac{x}{z}+c_x,\beta\frac{y}{z}+c_y)}^{\text{欧式}}$$

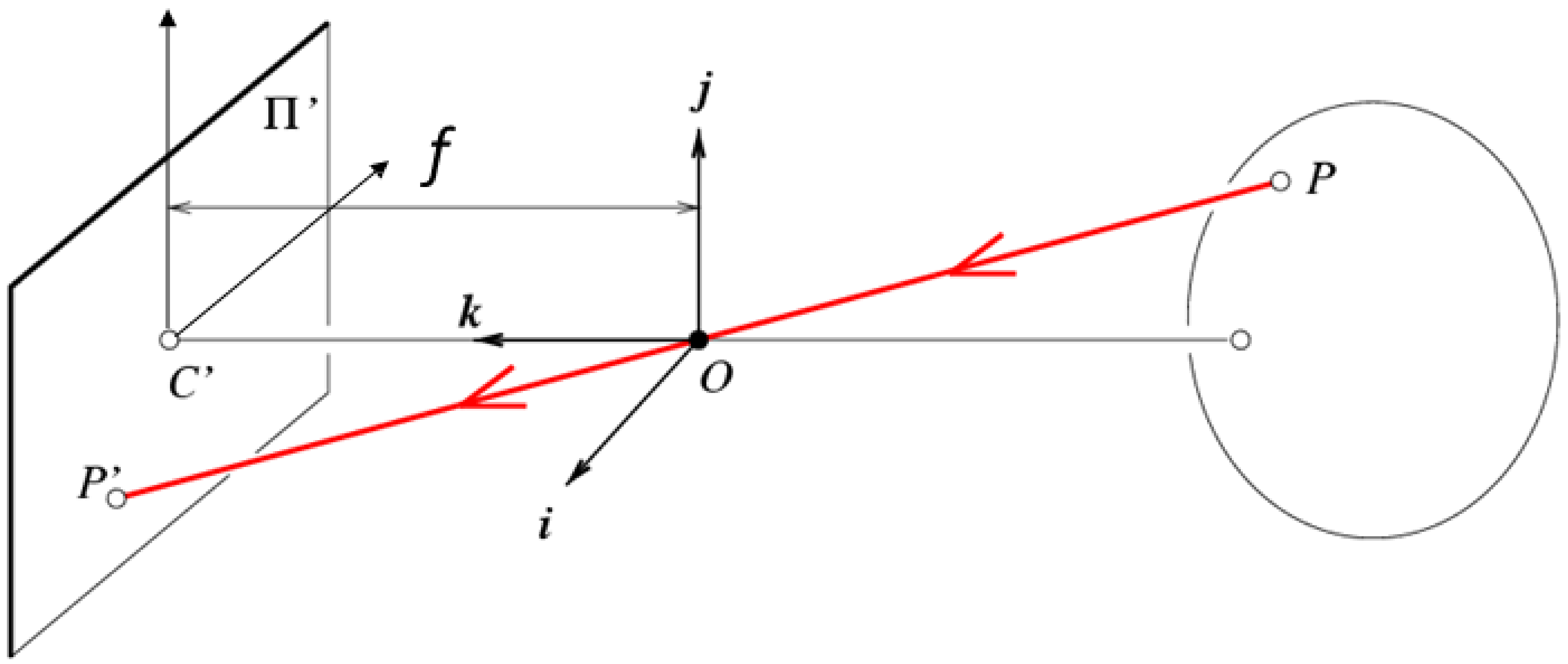
摄像机的投影矩阵

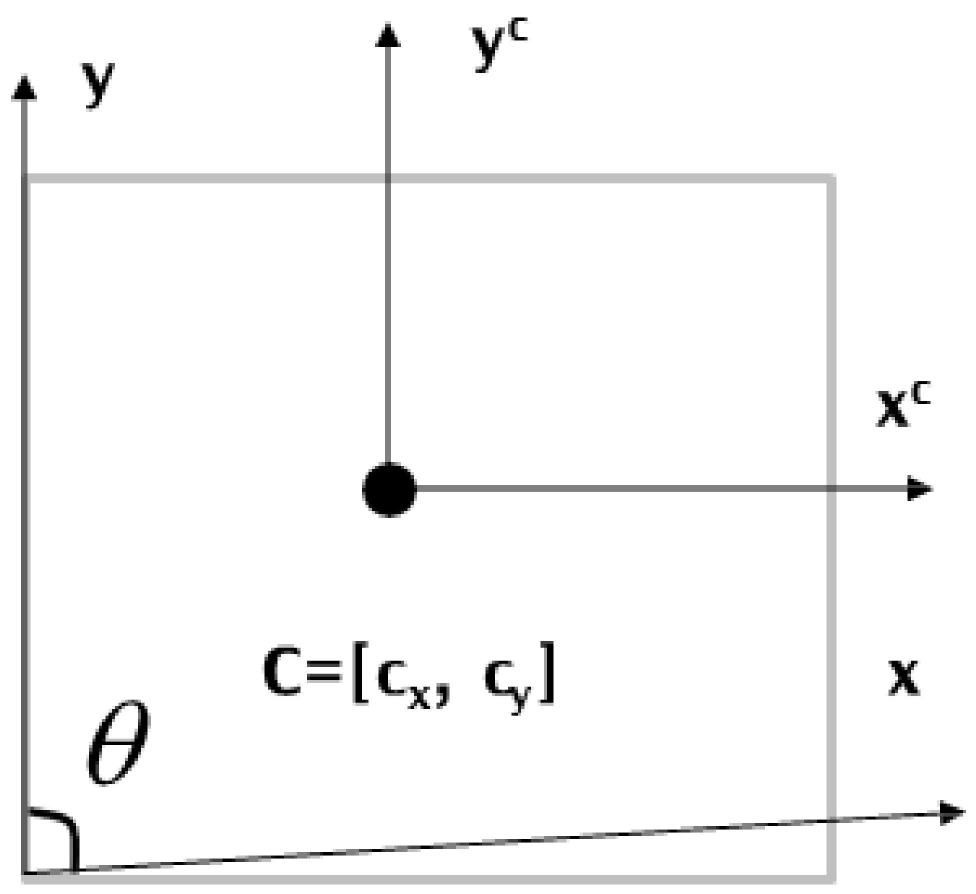


$$P' = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & c_x & 0 \\ 0 & \beta & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = MP$$

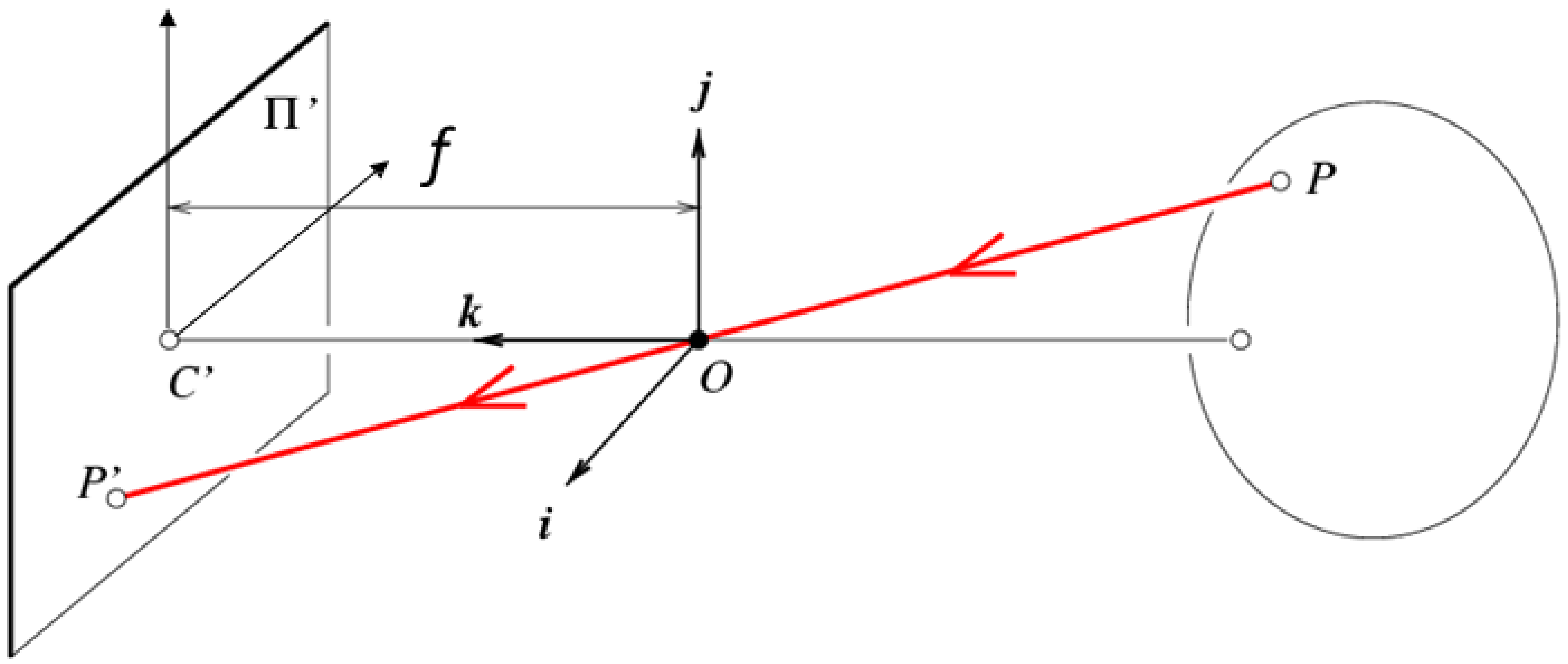
$$M = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha cot\theta & c_x & 0 \\ 0 & \dfrac{\beta}{sin\theta} & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

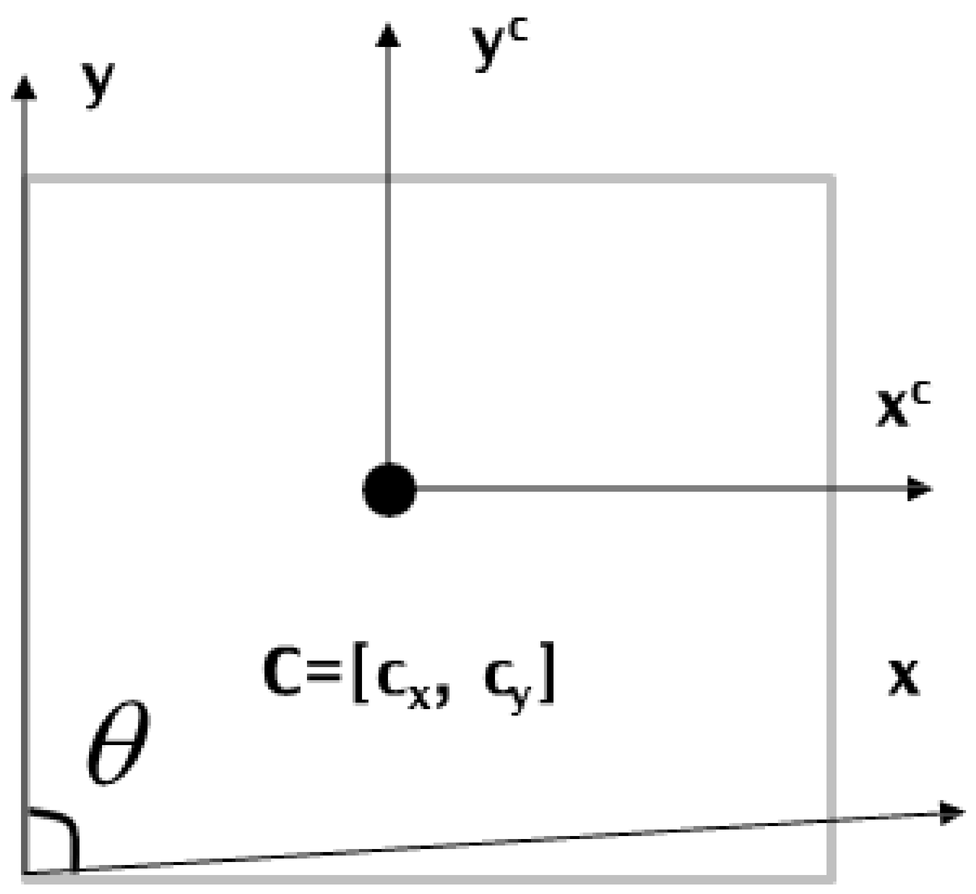
摄像机偏斜





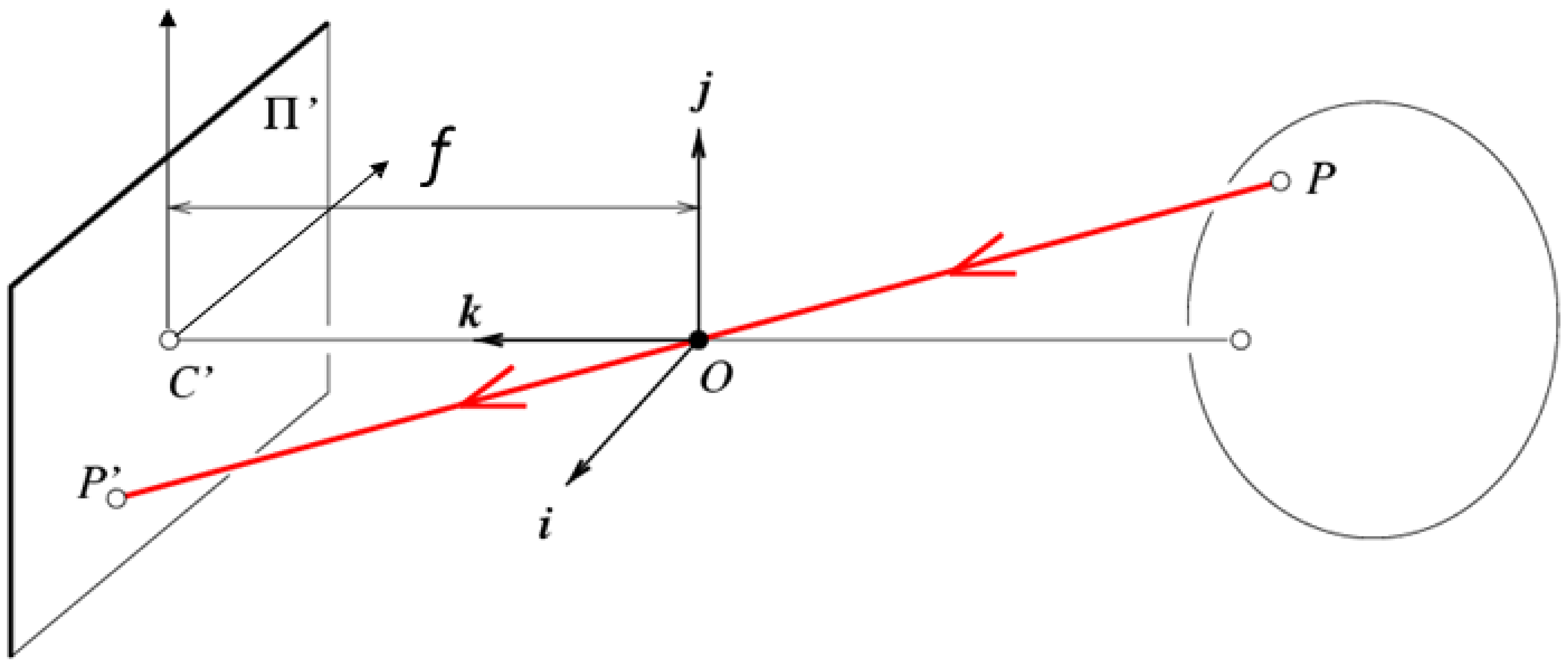
摄像机偏斜





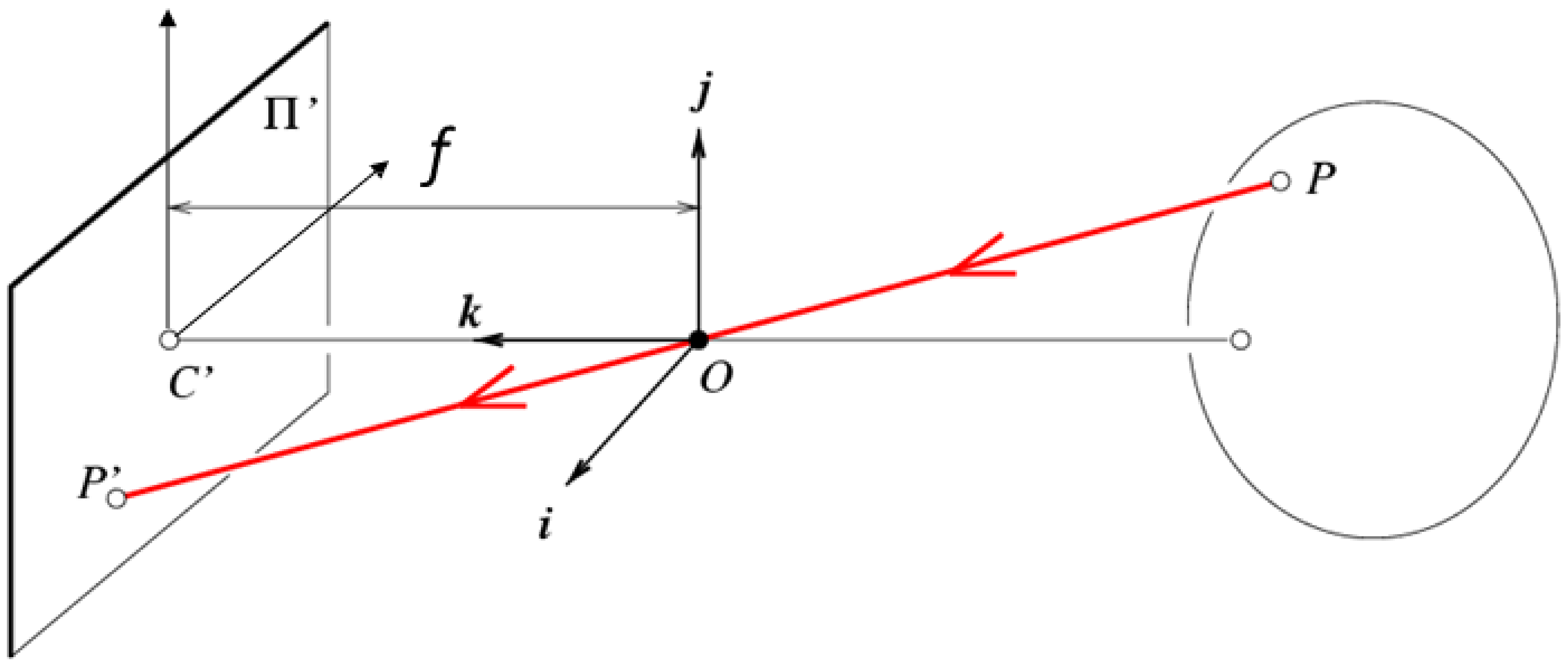
$$P' = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha cot\theta & c_x & 0 \\ 0 & \dfrac{\beta}{sin\theta} & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

摄像机坐标系下的摄像机模型



$$P' = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha cot\theta & c_x & 0 \\ 0 & \dfrac{\beta}{sin\theta} & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

摄像机坐标系下的摄像机模型



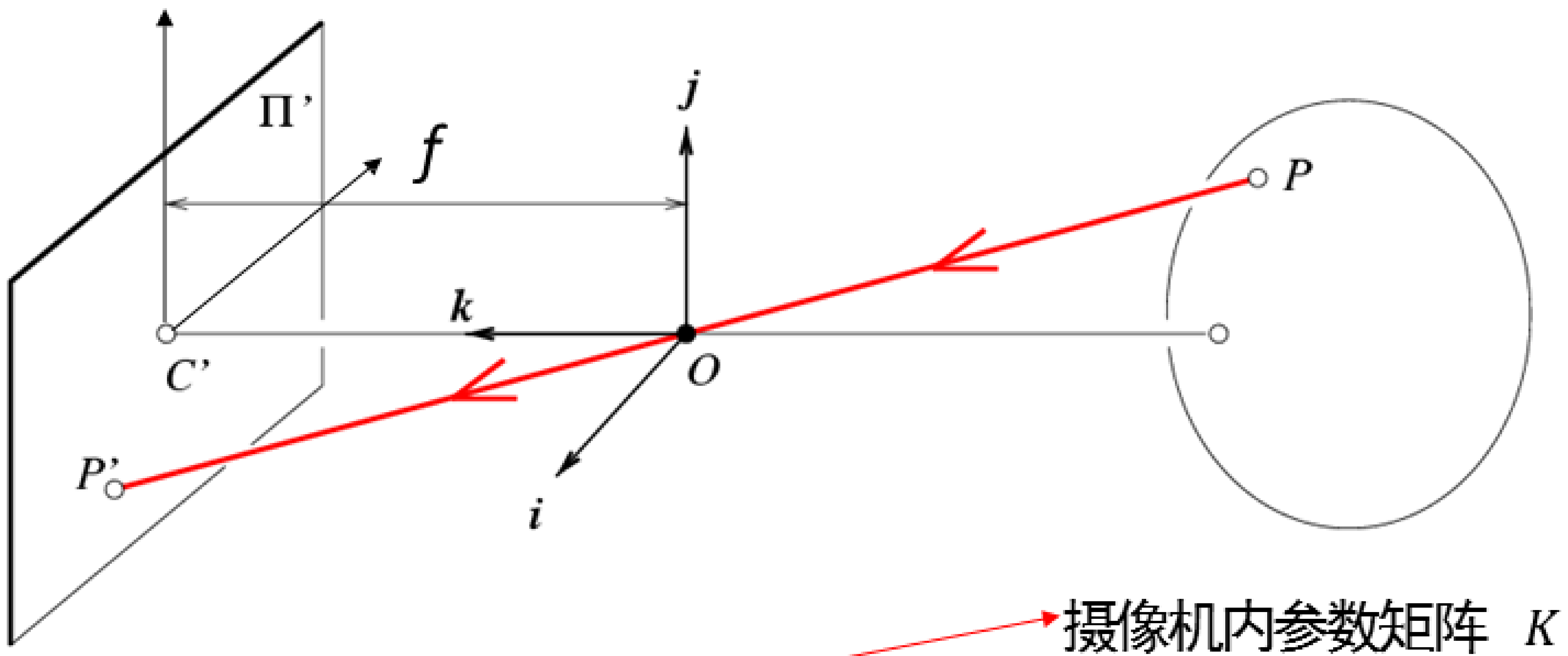
$$P' = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha cot\theta & c_x & 0 \\ 0 & \dfrac{\beta}{sin\theta} & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \boxed{M} P$$

投影矩阵

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha cot\theta & c_x & 0 \\ 0 & \dfrac{\beta}{sin\theta} & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

摄像机内参数



摄像机内参数矩阵 $K = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha cot\theta & c_x \\ 0 & \frac{\beta}{sin\theta} & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

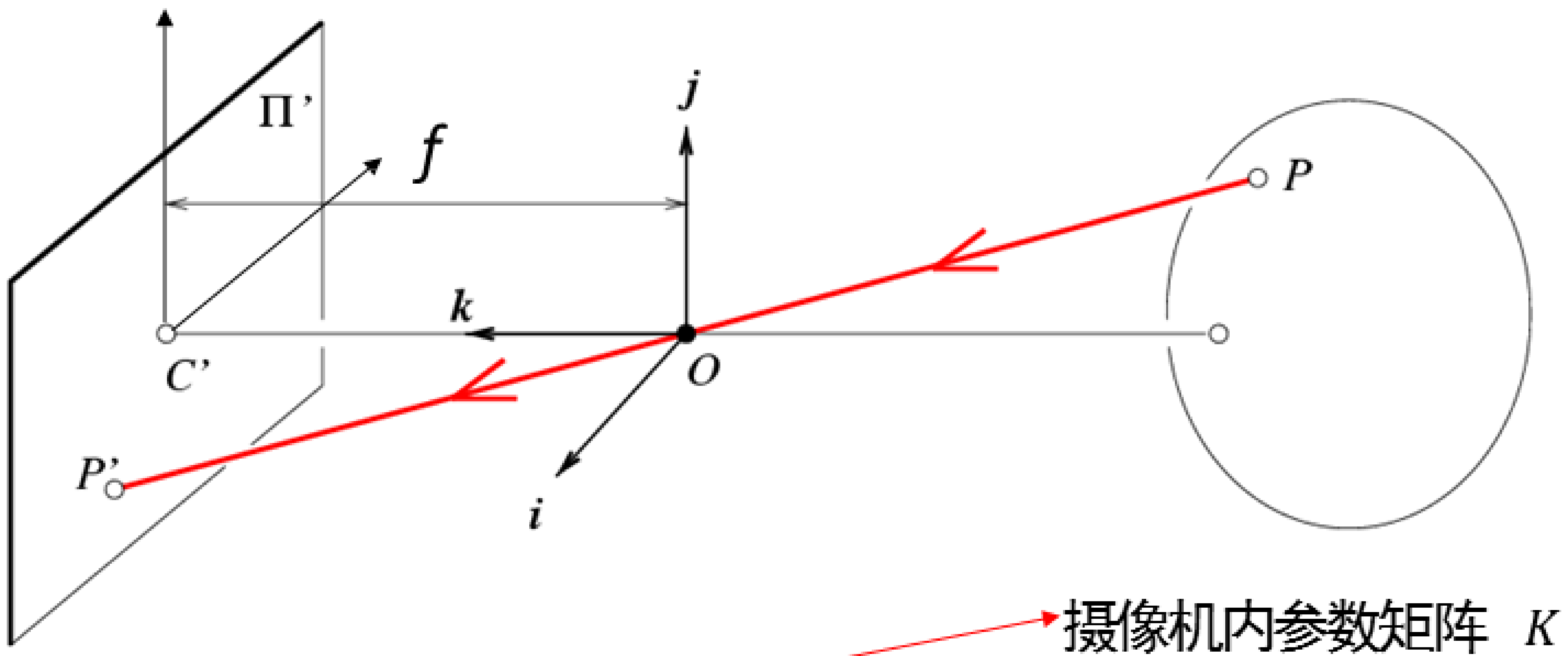
$$P' = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha cot\theta & c_x & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{sin\theta} & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \boxed{M}P$$

投影矩阵

摄像机内参数决定了空间点到图像点的映射！

摄像机内参数



摄像机内参数矩阵 $K = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha cot\theta & c_x \\ 0 & \dfrac{\beta}{sin\theta} & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$P' = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha cot\theta & c_x & 0 \\ 0 & \dfrac{\beta}{sin\theta} & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= K[I \quad 0]P$$

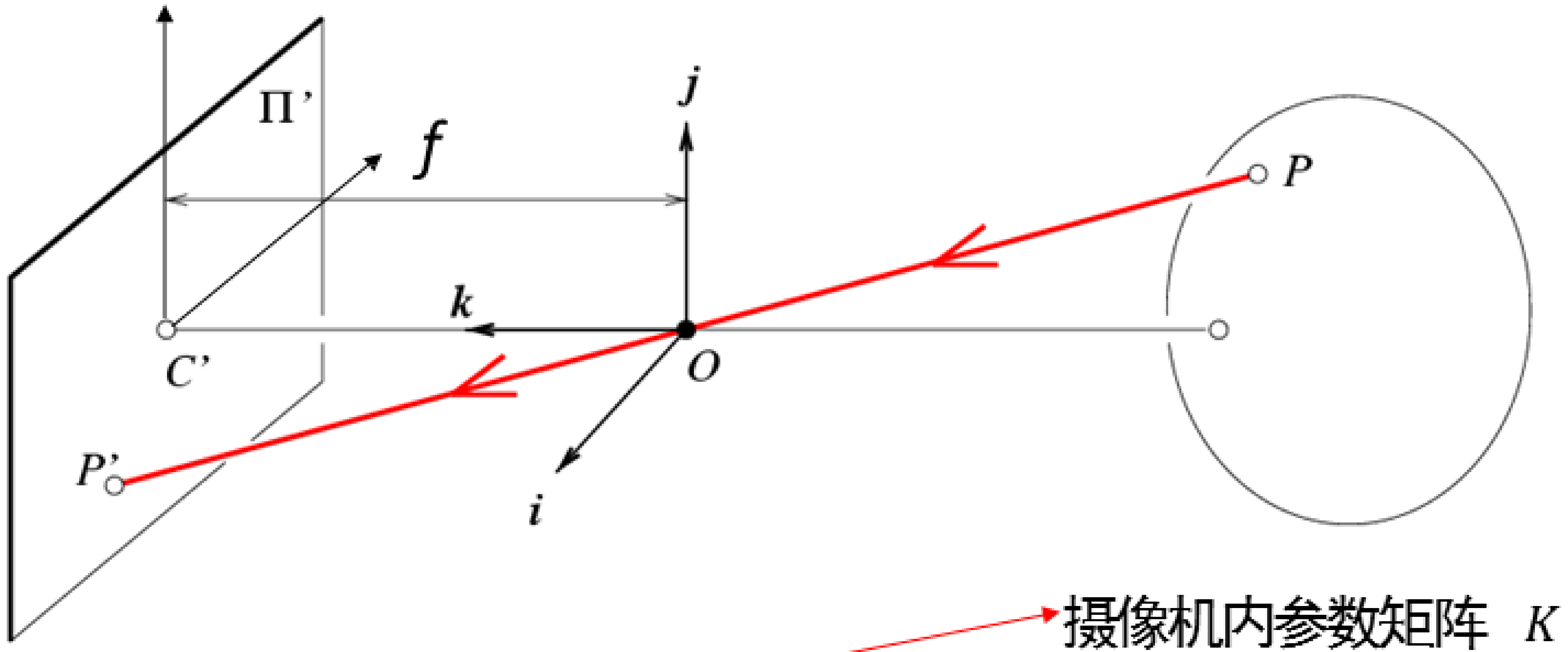
$$= \boxed{M}P$$

投影矩阵

摄像机内参数决定了空间点到图像点的映射！

摄像机内参数

问题：K有多少个自由度？



摄像机内参数矩阵 $K=\begin{bmatrix}\alpha & -\alpha\cot\theta & c_x \\ 0 & \dfrac{\beta}{\sin\theta} & c_y \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

$$P' = \begin{bmatrix}\alpha & -\alpha\cot\theta & c_x & 0 \\ 0 & \dfrac{\beta}{\sin\theta} & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y \\ z \\ 1\end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{K}[I \quad 0]P$$

$$= \boxed{M}P$$

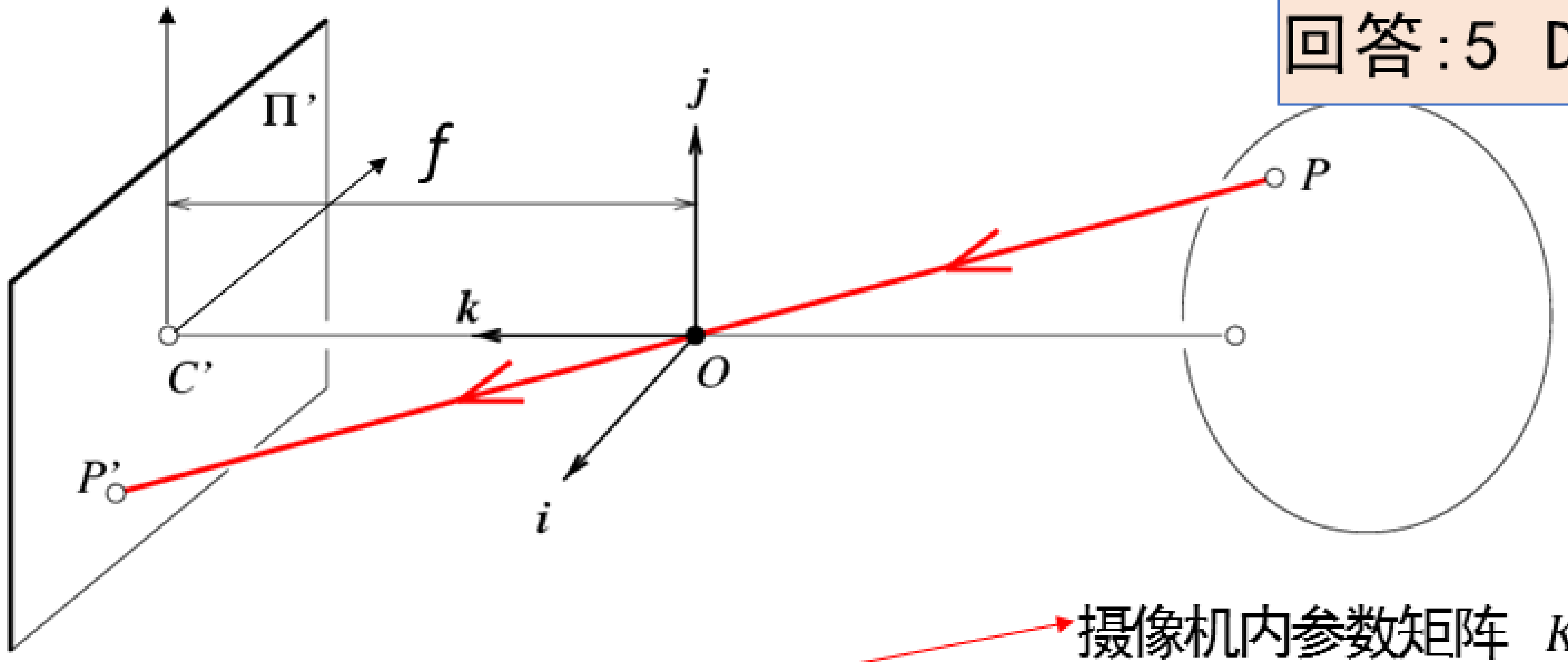
投影矩阵

摄像机内参数决定了空间点到图像点的映射！

摄像机内参数

问题：K有多少个自由度？

回答：5 DOF ！



摄像机内参数矩阵 $K = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha cot\theta & c_x \\ 0 & \frac{\beta}{sin\theta} & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$P' = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha cot\theta & c_x & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{sin\theta} & c_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{K}[I \quad 0]P$$

$$= \boxed{M}P$$

投影矩阵

摄像机内参数决定了空间点到图像点的映射！

规范化投影变换

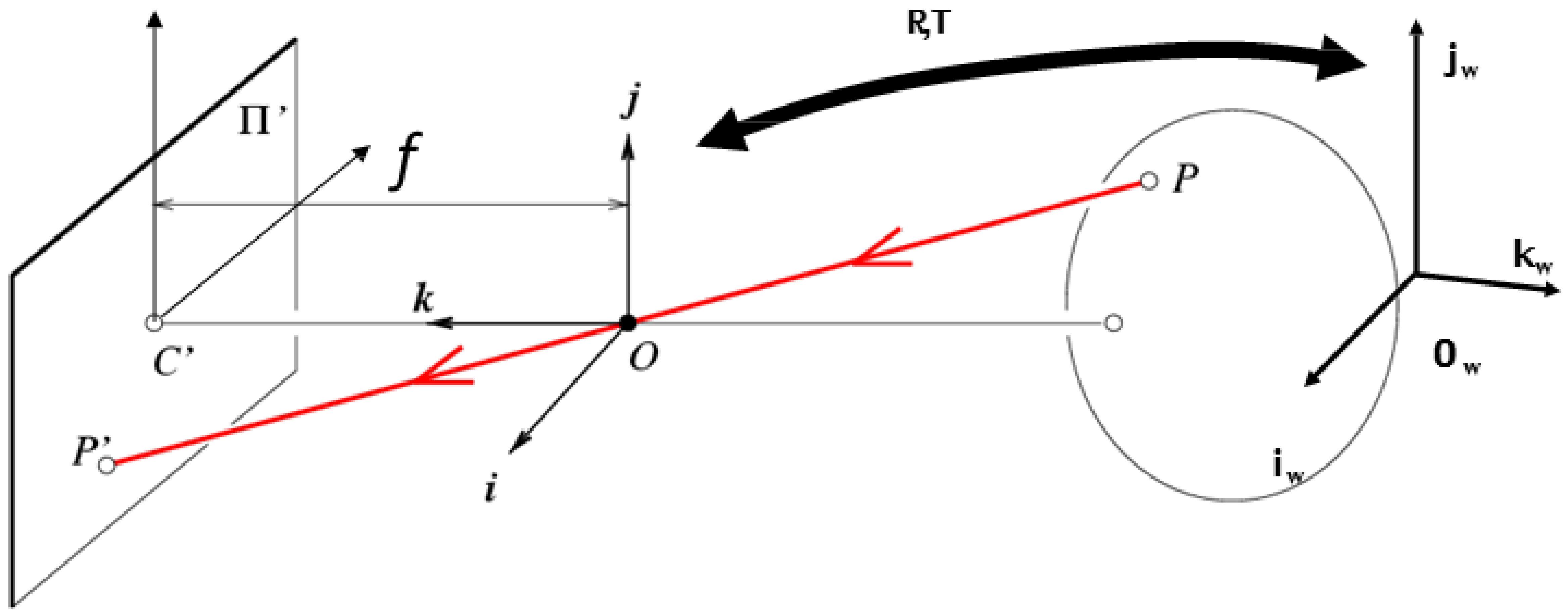
$$P' = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{M}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = M\,P$$

$$\Re^4 \xrightarrow{H} \Re^3$$

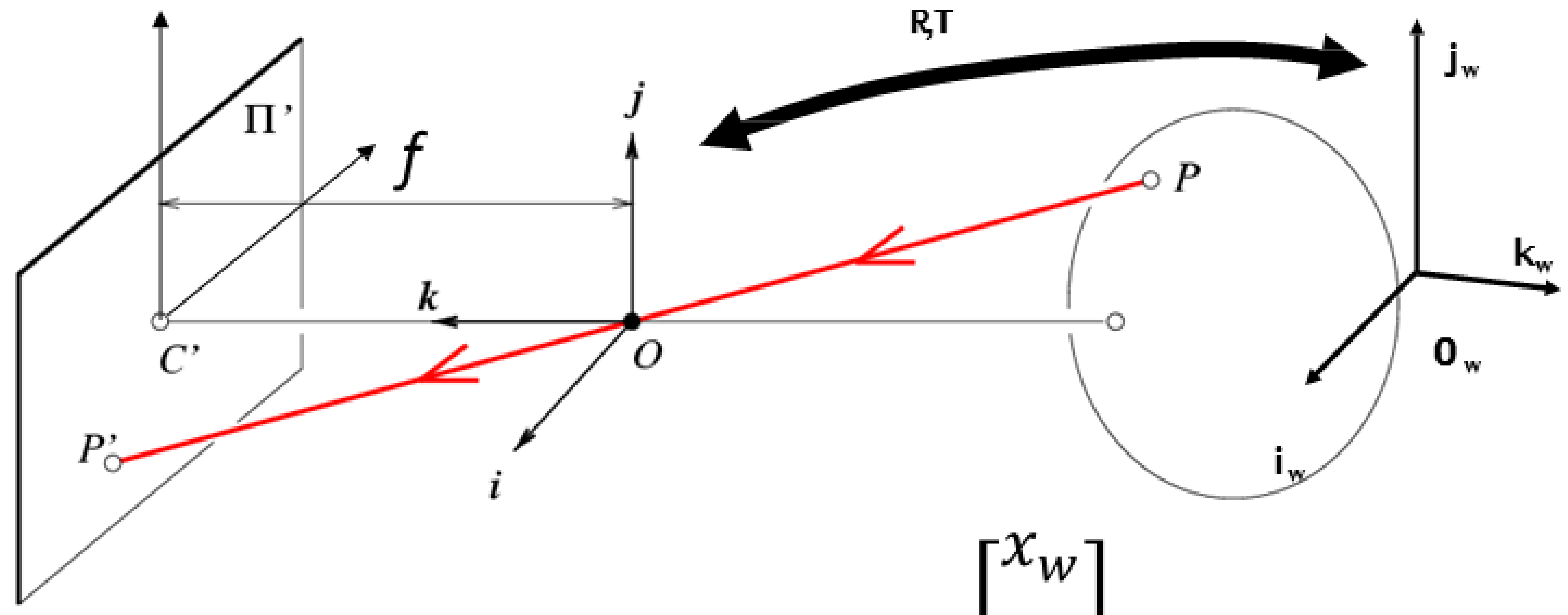
欧式坐标为 $\begin{bmatrix} \frac{x}{z} \\ \frac{y}{z} \end{bmatrix}$

世界坐标系



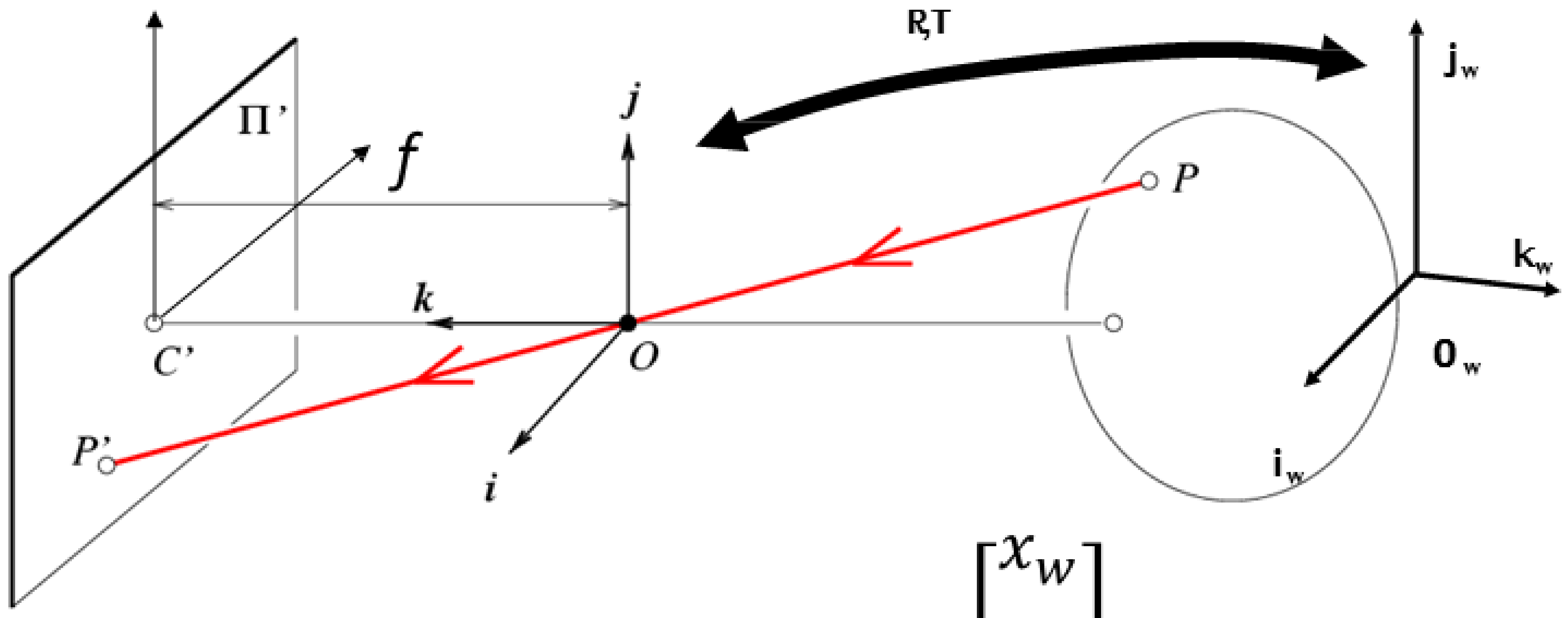
- 摄像机坐标系描述三维物体的空间信息是否方便？
- 如何将物体从世界坐标系转到摄像机坐标系？

世界坐标系



齐次坐标系： $P = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P_w \leftarrow \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix}$

世界坐标系



齐次坐标系：$P = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P_w \leftarrow \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \\ 1 \end{bmatrix}$

$$P' = K[I \quad 0]P = K[I \quad 0]\begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P_w = \underbrace{K}_{\text{内部参数}}\underbrace{\boxed{[R \quad T]}}_{\text{外部参数}} P_w = MP_w$$

问题：各个符号的物理意义及其维度分别是什么？

$$P' = K[I \quad 0]P = K[I \quad 0]\begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P_w = K[R \quad T]P_w = MP_w$$

问题：投影矩阵M有多少个自由度？

$$P' = K[I \quad 0]P = K[I \quad 0]\begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P_w = \overset{\text{内部参数}}{K}\overset{\text{外部参数}}{\boxed{[R \quad T]}} P_w = M P_w$$

问题：P'转换成欧式坐标该如何写？

内部参数 外部参数

$$P' = K[I \quad 0]P = K[I \quad 0]\begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P_w = K\boxed{[R \quad T]}P_w = MP_w = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} P_w$$

$$\xrightarrow{E} \left(\frac{m_1 P_w}{m_3 P_w}, \frac{m_2 P_w}{m_3 P_w}\right)$$

定理（Faugeras，1993）

$$M = K[\,R\ T\,] = [KR\ KT] = [A\ b] \qquad A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

令 $M = (A \quad b)$ 为3×4的矩阵，$a_i^T (i = 1,2,3)$ 表示由矩阵 A 的行

- M是透视投影矩阵的一个充分必要条件是 $\mathrm{Det}(A) \neq 0$
- M是零倾斜透视投影矩阵的一个充分必要条件是 $\mathrm{Det}(A) \neq 0$ 且

$$(a_1 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3) = 0$$

- M是零倾斜且宽高比为1的透视投影矩阵的一个充分必要条件是 $\mathrm{Det}(A) \neq 0$ 且

$$\begin{cases} (a_1 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3) = 0 \\ (a_1 \times a_3) \cdot (a_1 \times a_3) = (a_2 \times a_3) \cdot (a_2 \times a_3) \end{cases}$$

投影变换的性质

3D世界中的平行线在图像
中相交于“影消点”

1. 点投影为点
2. 线投影为线
3. 近大远小
4. 角度不再保持
5. 平行线相交

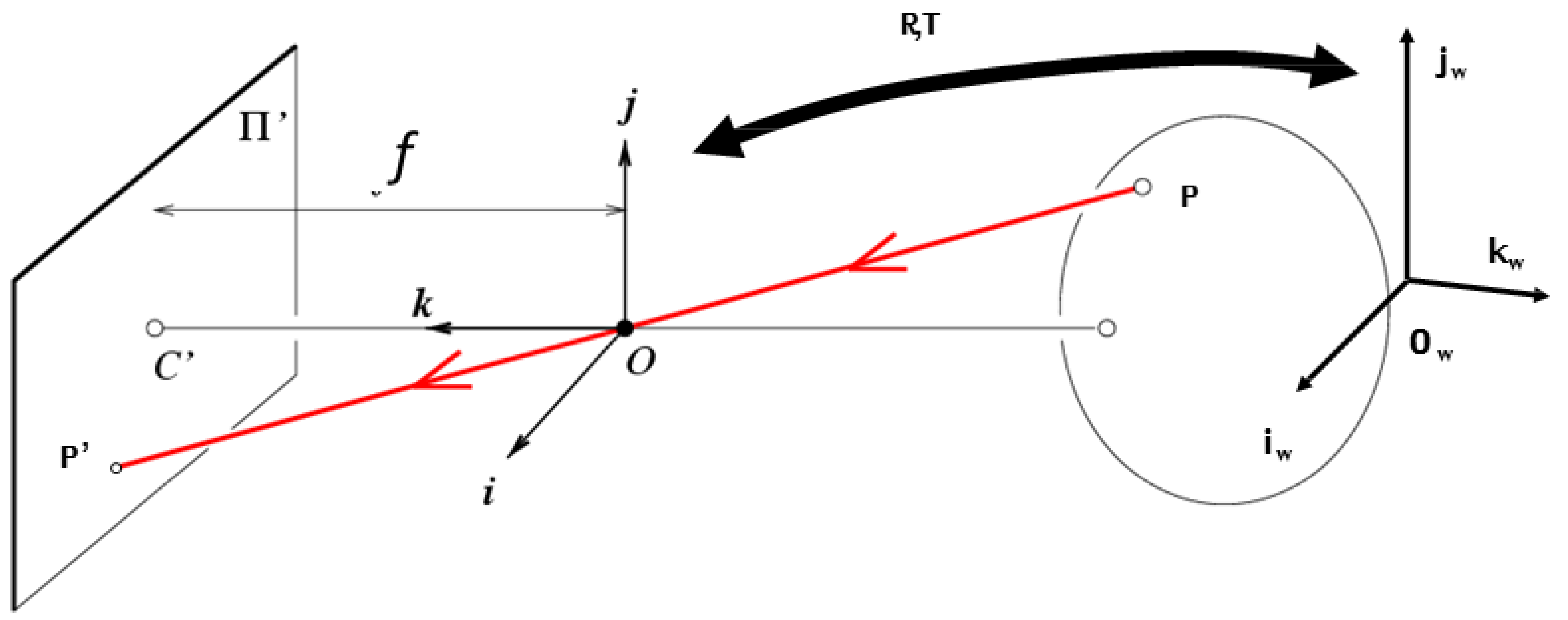
1. 摄像机几何

- 针孔摄像机 & 透镜
- 摄像机几何（完）
- 其他摄像机模型

1. 摄像机几何

- 针孔摄像机 & 透镜
- 摄像机几何
- 其他摄像机模型

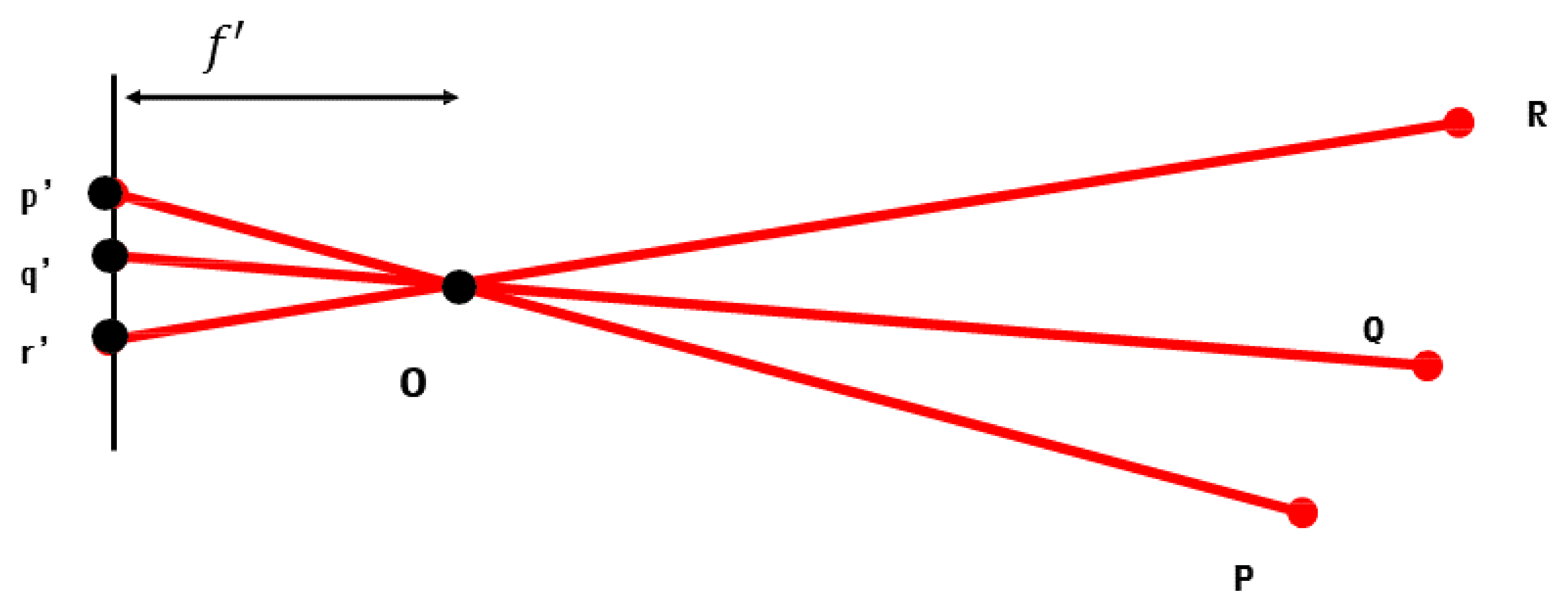
透视投影摄像机



$$P'_{3\times 1} = MP_w = K_{3\times 3}[R \quad T]_{3\times 4}P_{w4\times 1} \qquad M = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

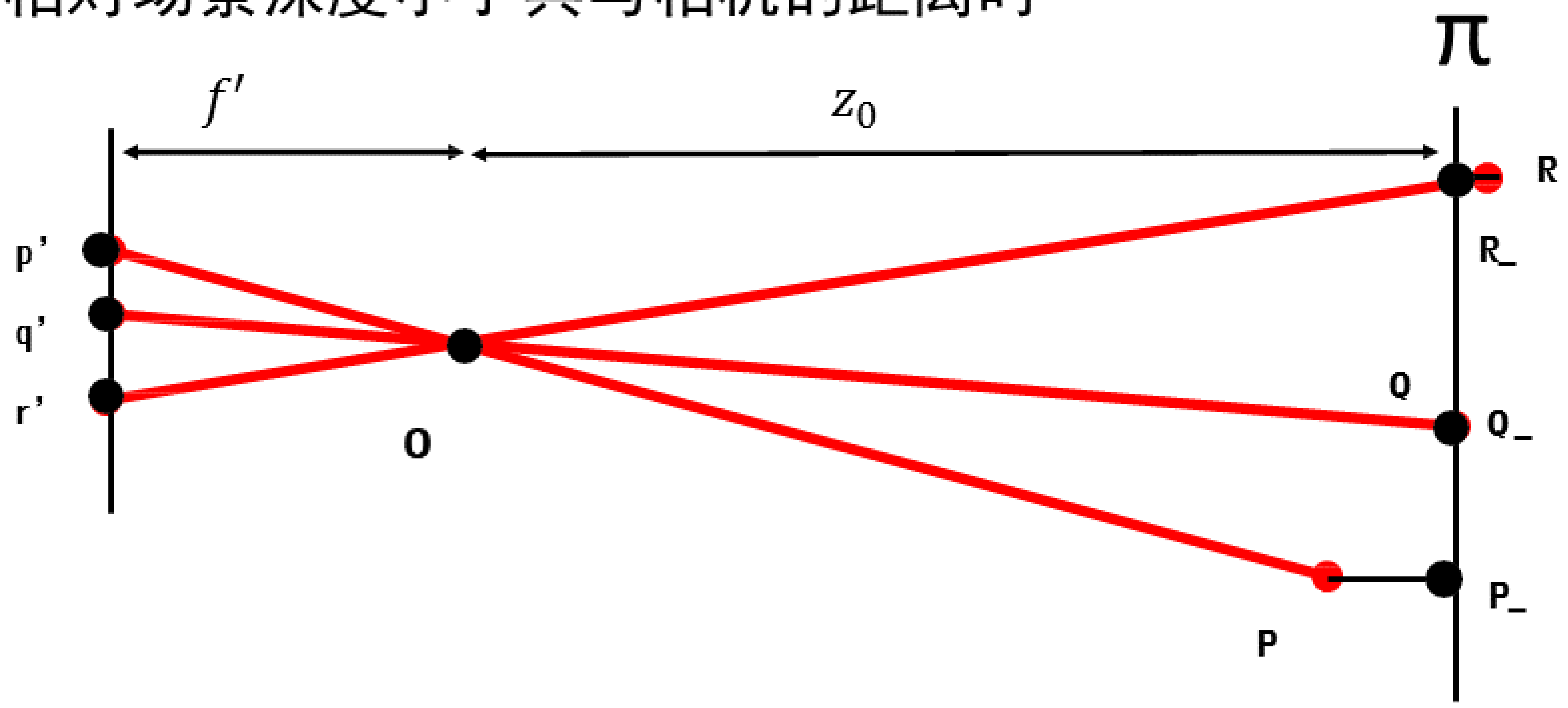
$$= \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} P_w = \begin{bmatrix} m_1 P_w \\ m_2 P_w \\ m_3 P_w \end{bmatrix} \xrightarrow{E} \left(\frac{m_1 P_w}{m_3 P_w}, \frac{m_2 P_w}{m_3 P_w}\right)$$

透视投影摄像机

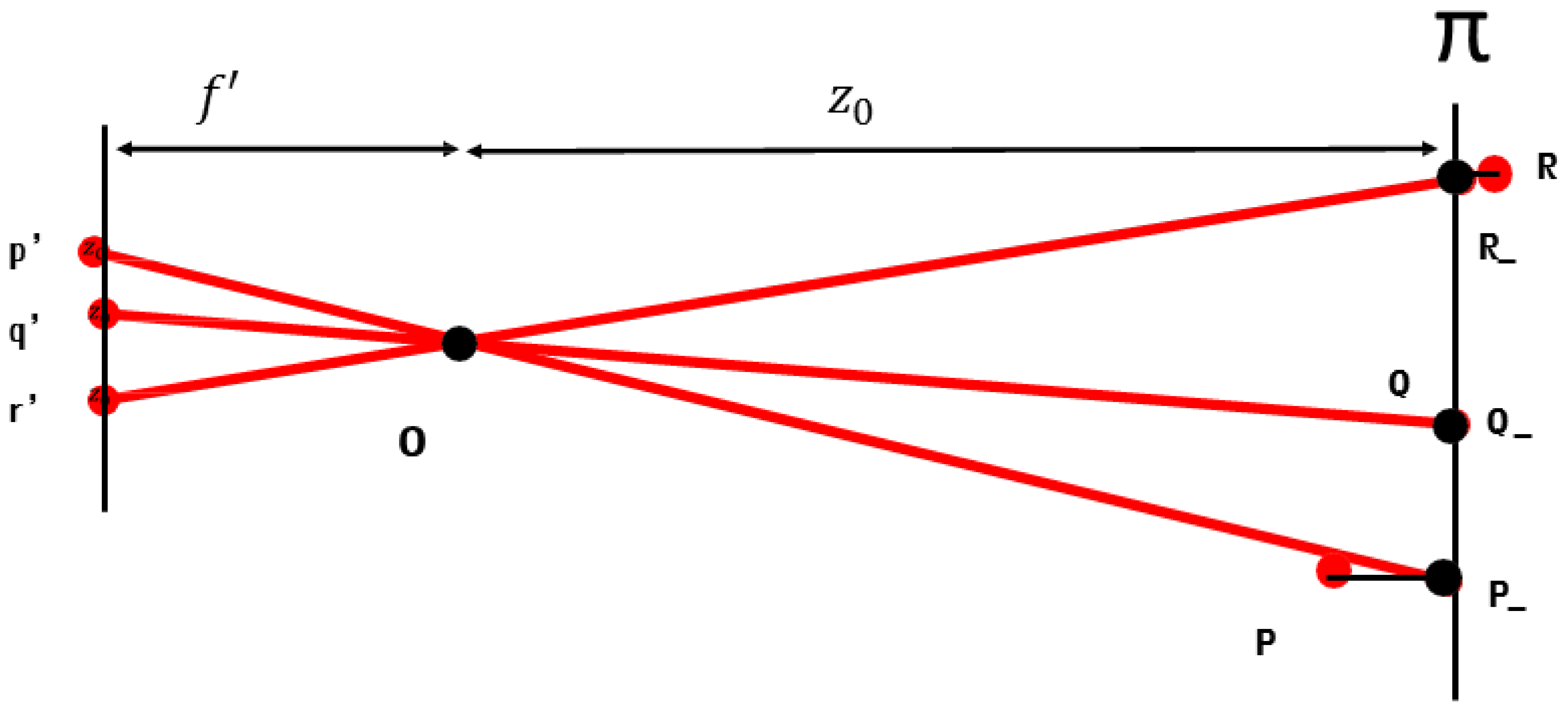


弱透视投影摄像机

当相对场景深度小于其与相机的距离时



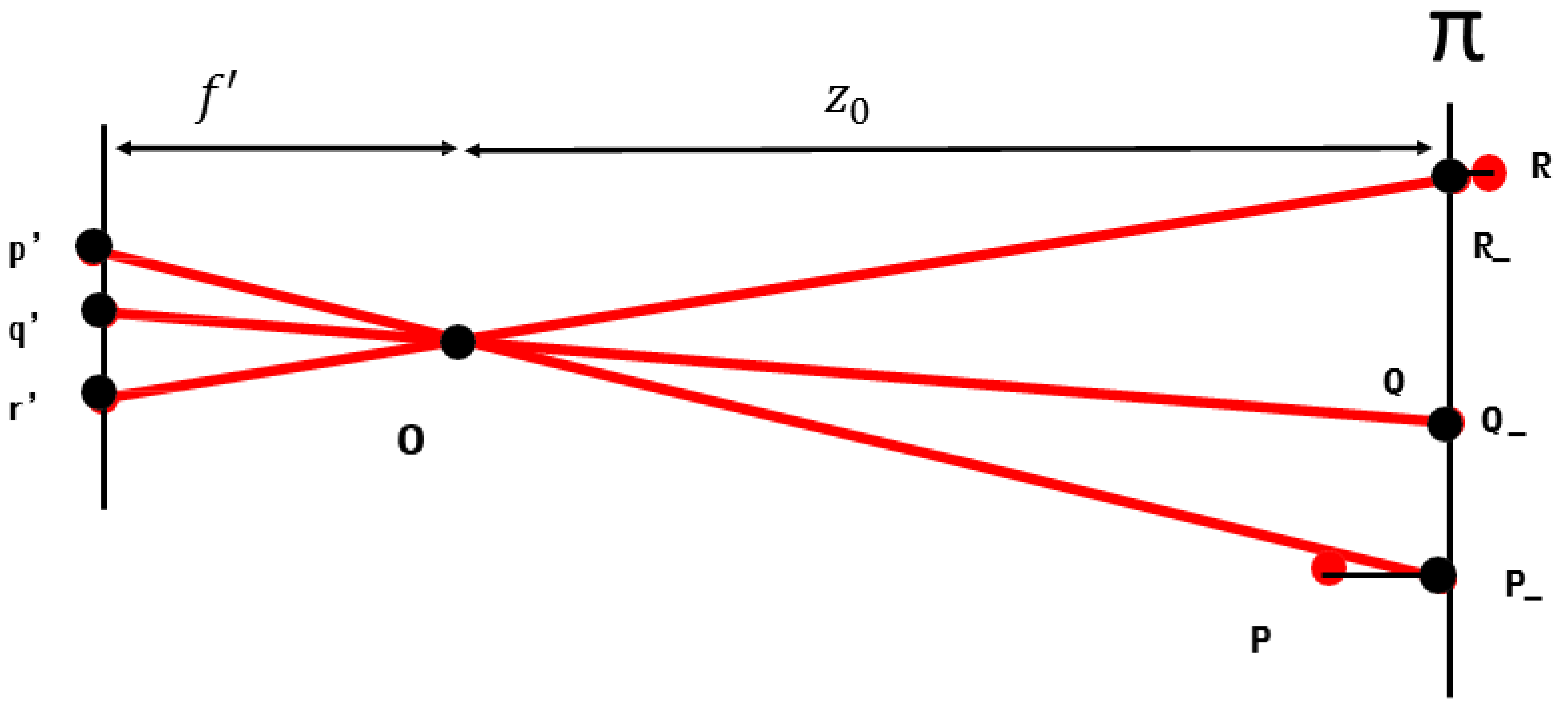
弱透视投影摄像机



$$\begin{cases} x' = \dfrac{f'}{z} x \\ y' = \dfrac{f'}{z} y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = \boxed{\dfrac{f'}{z_0}} x \\ y' = \dfrac{f'}{z_0} y \end{cases}$$

放大率 m

弱透视投影摄像机



投影（透视）

$$M = K[R \;\; T] = \begin{bmatrix} A_{2\times3} & b_{2\times1} \\ v_{1\times2} & 1 \end{bmatrix}$$

弱透视

$$\rightarrow \quad M = \begin{bmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = MP_w = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} P_w = \begin{bmatrix} m_1 P_w \\ m_2 P_w \\ m_3 P_w \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} A & b \\ v & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathbf{E}} \left(\frac{m_1 P_w}{m_3 P_w}, \frac{m_2 P_w}{m_3 P_w}\right)$$

透视

$$P' = MP_w = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} P_w = \begin{bmatrix} m_1 P_w \\ m_2 P_w \\ 1 \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} A & b \\ v & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} & m_1 & & \\ & m_2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

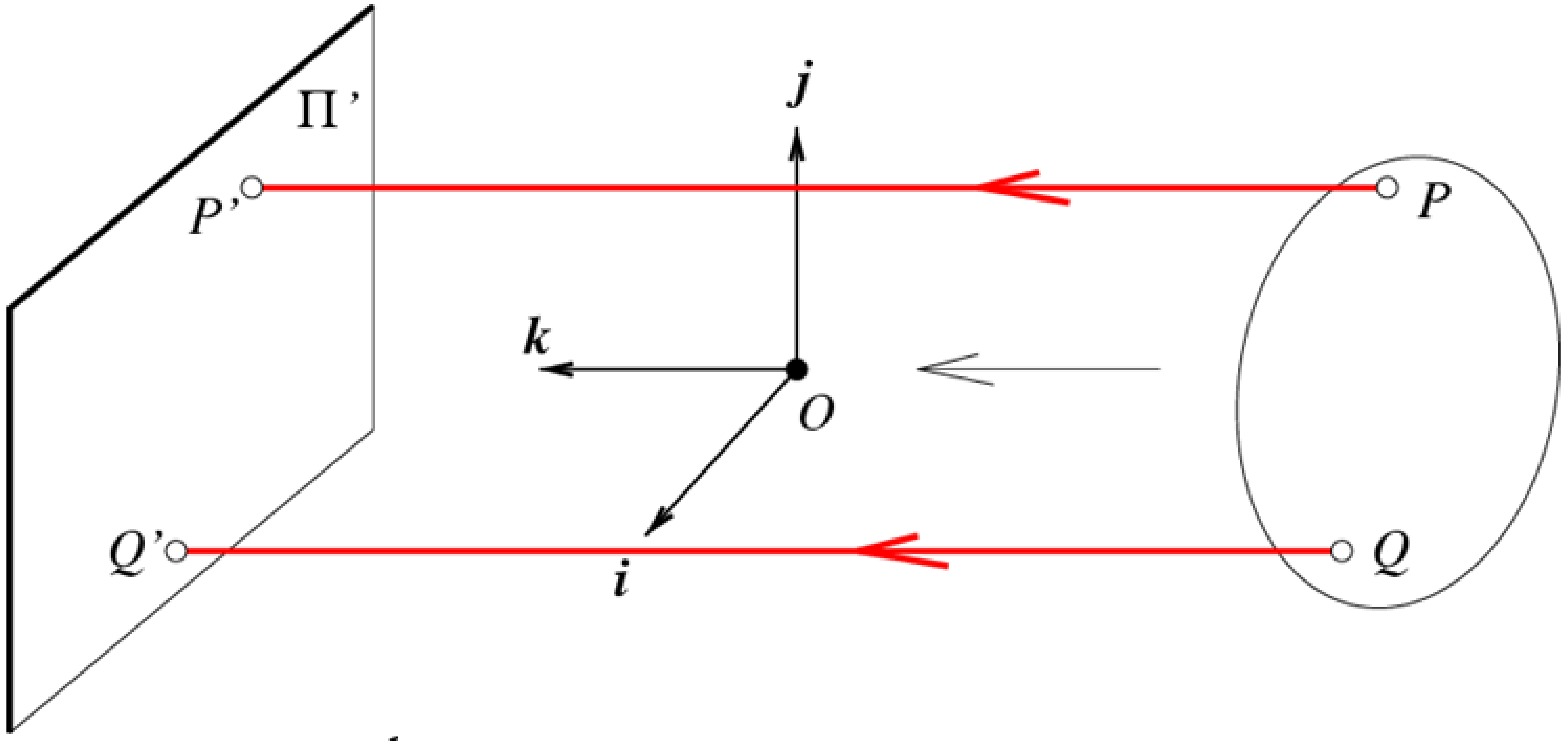
$$\xrightarrow{\mathbf{E}} (m_1 P_w, m_2 P_w)$$

放 大 率

弱透视

正交投影摄像机

摄像机中心到像平面的距离无限远时



$$\begin{cases} x' = \dfrac{f'}{z} x \\ y' = \dfrac{f'}{z} y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

各种摄像机模型的应用场合

- 正交投影
  - 更多应用在建筑设计(AUTOCAD）或者工业设计行业
- 弱透视投影在数学方面更简单
  - 当物体较小且较远时准确，常用于图像识别任务
- 透视投影对于3D到2D映射的建模更为准确
  - 用于运动恢复结构或SLAM

1. 摄像机几何

- 针孔摄像机 & 透镜
- 摄像机几何
- 其他摄像机模型（完）