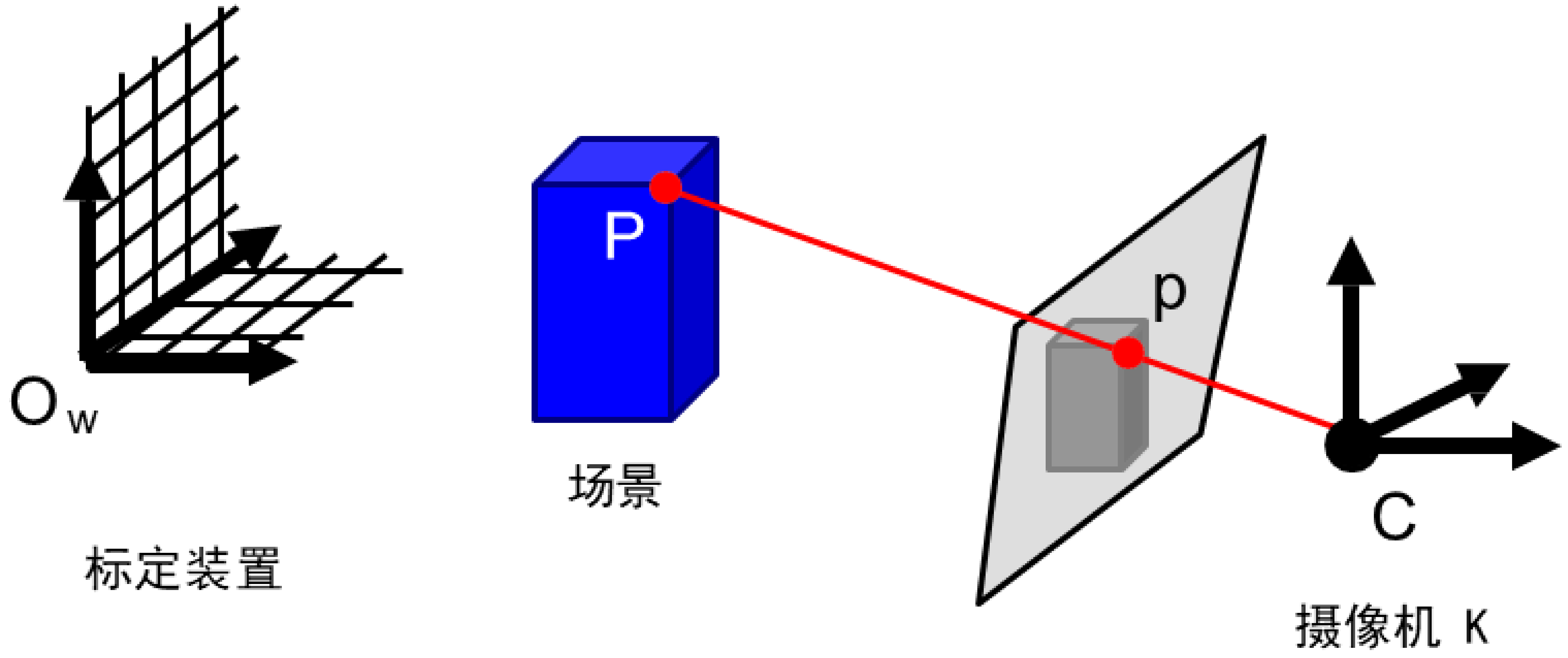
4. 三维重建基础与极几何

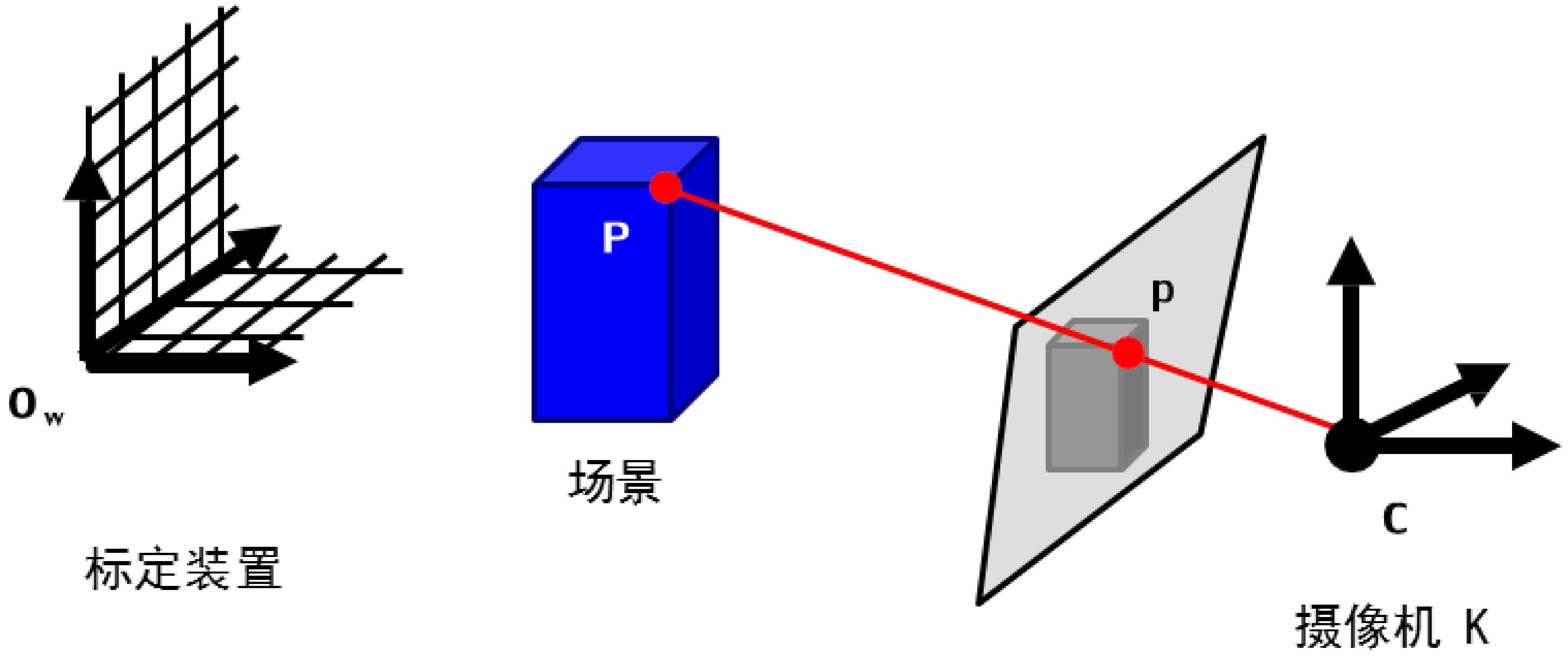
- 三维重建基础
- 极几何、本质矩阵与基础矩阵
- 基础矩阵估计

摄像机标定与单视图重构



标定装置		→ 摄像机的位置、姿态、内参数 K
无穷远处的点和线 线、面的垂直关系	+	→ 从场景恢复结构和摄像机内参数 K
场景先验知识 （点对应关系，线、面几何等等）		

从单张图像恢复场景几何



为什么困难?

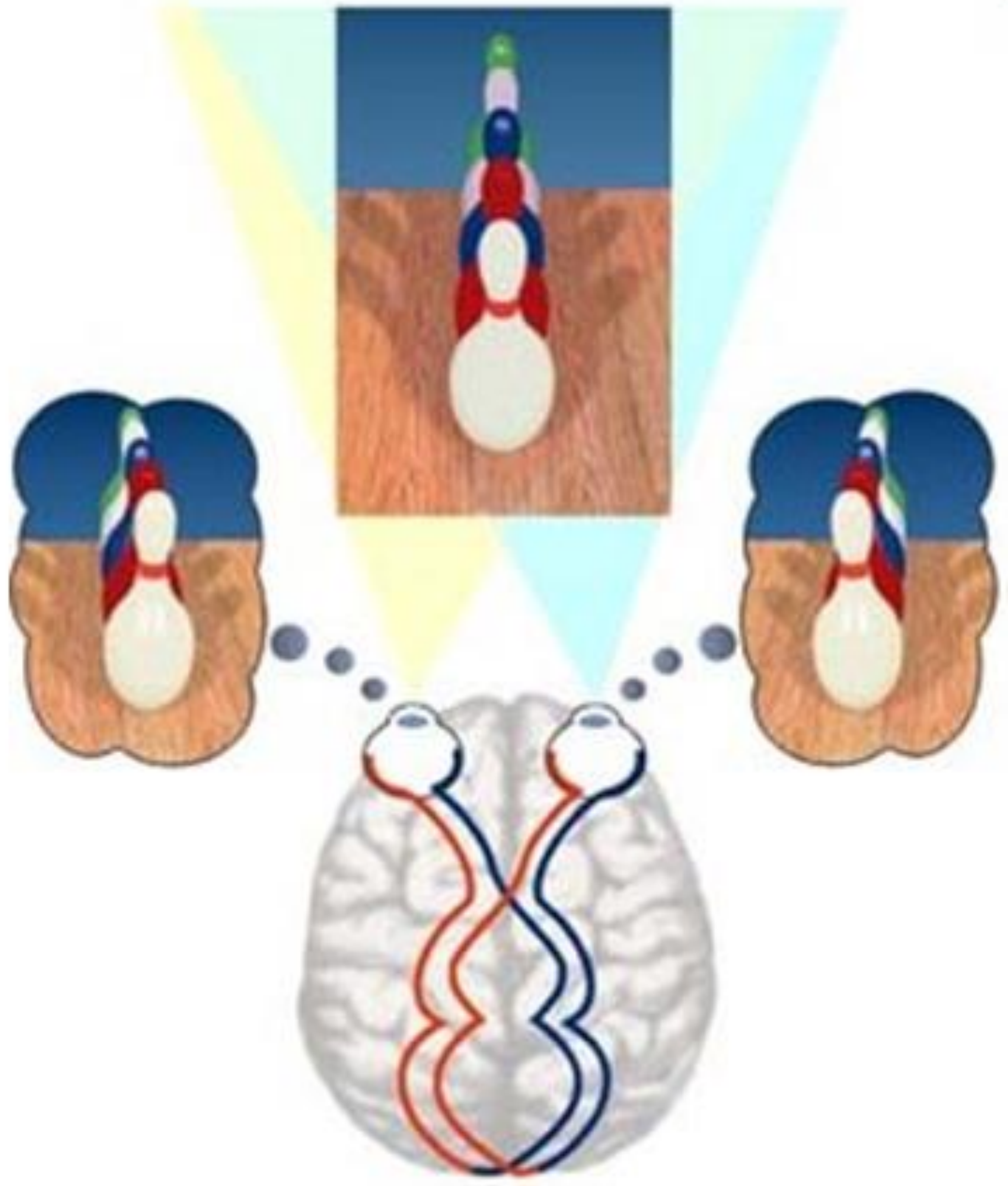
从单幅视图恢复结构

单幅视图2D到3D的映射具有多义性

困惑否？

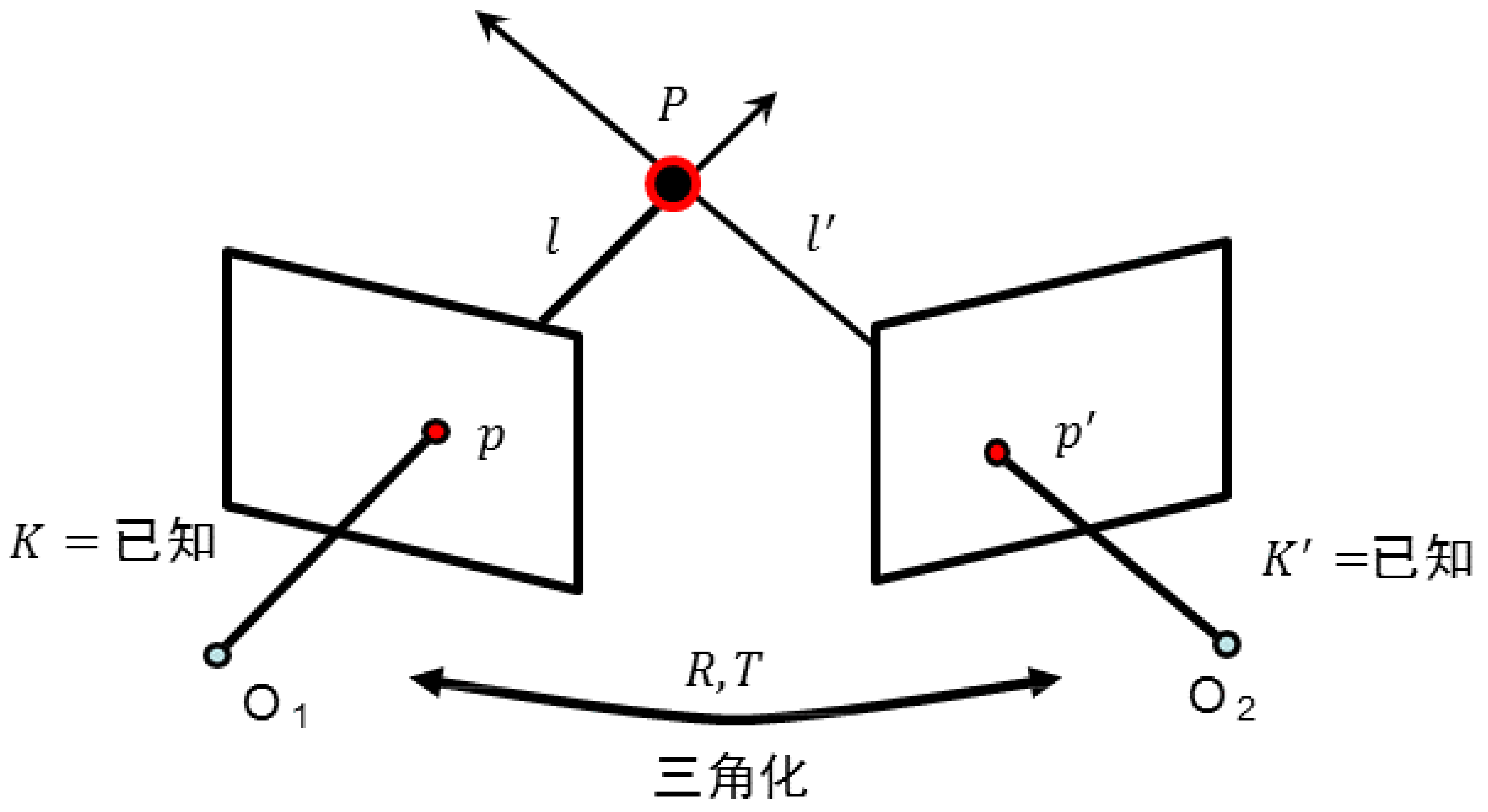
Courtesy slide S. Lazebnik

两只眼睛……



三角化

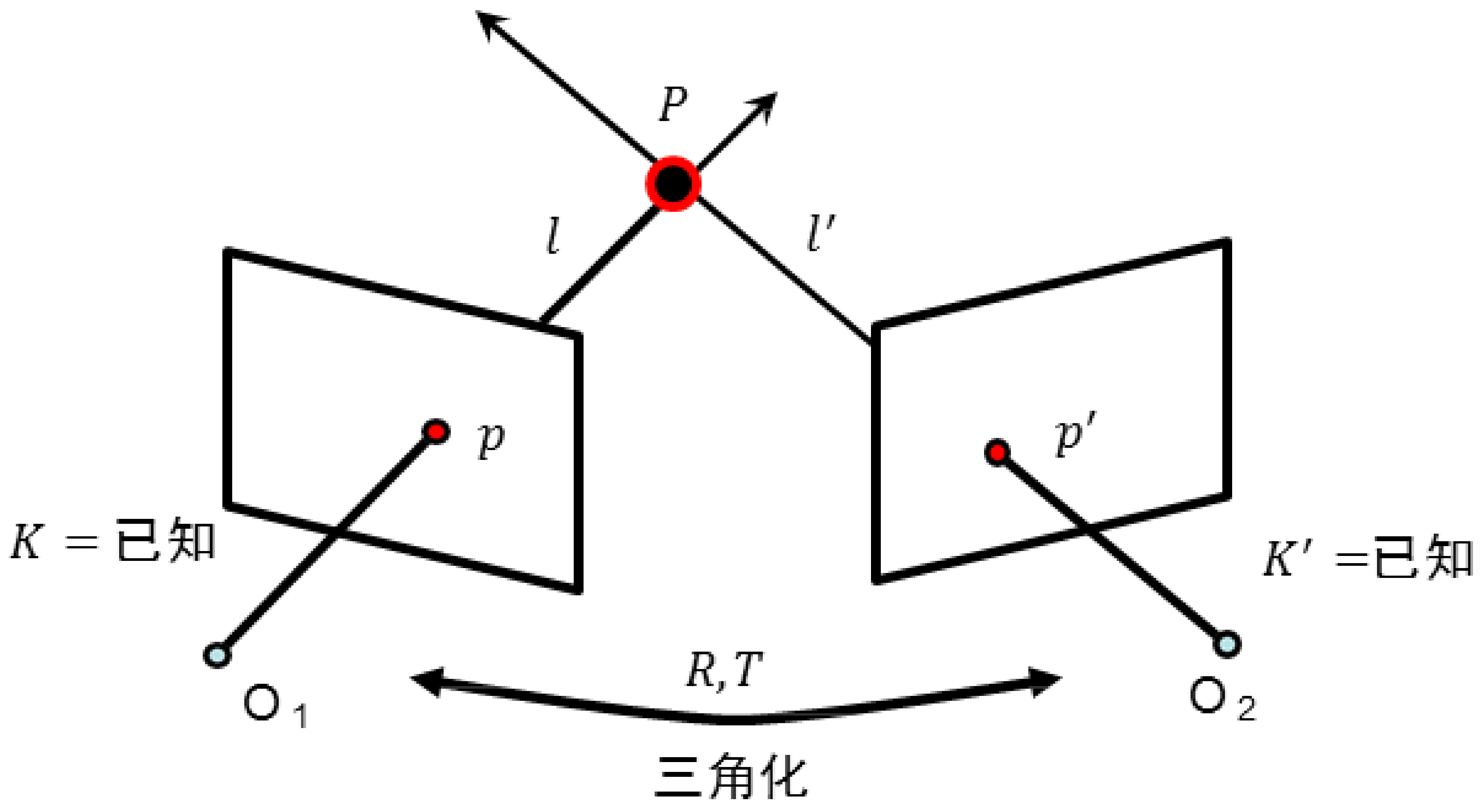
$$P = l \times l'$$



三角化

$$P = \cancel{l} \times l'$$

噪声的存在，两条直线通常不相交！



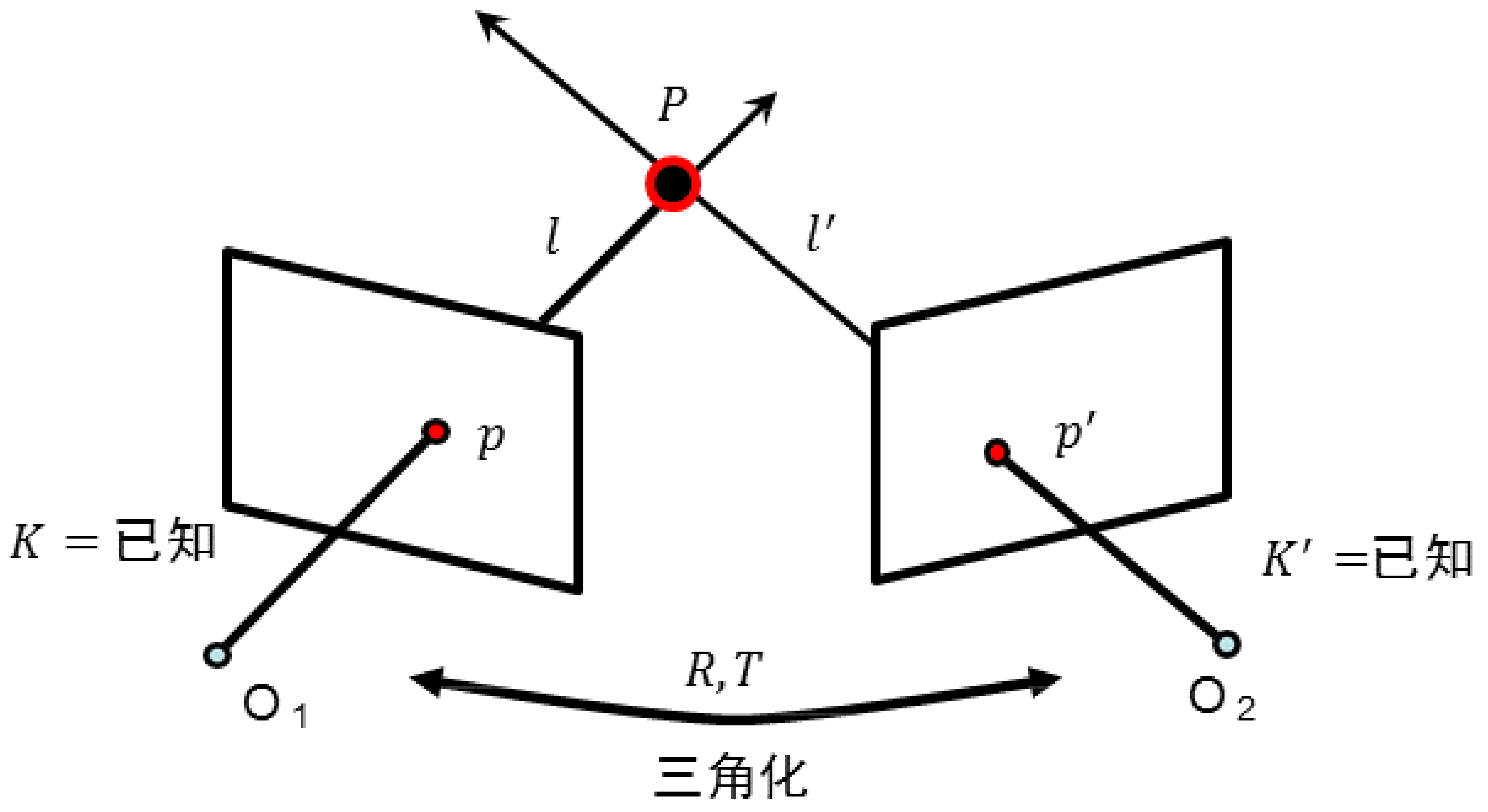
三角化

$$P = l \times l'$$

噪声的存在，两条直线通常不相交！

问题：已知p和p'，K和K'以及R,T

求解：P点的三维坐标？



三角化

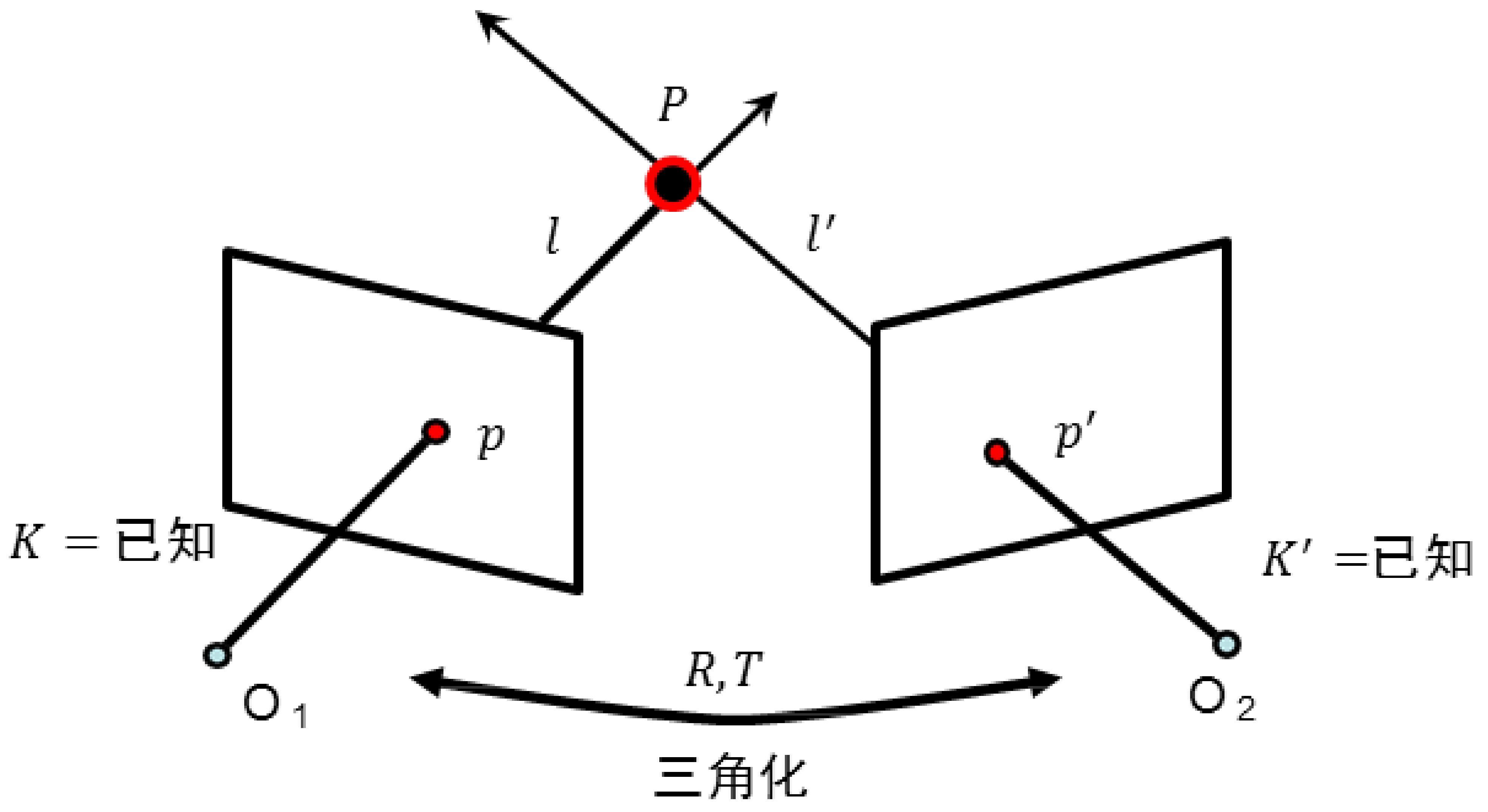
$$P = l \times l'$$

噪声的存在，两条直线通常不相交！

问题：已知p和p'，K和K'以及R,T

求解：P点的三维坐标？

- 线性解法
- 非线性解法



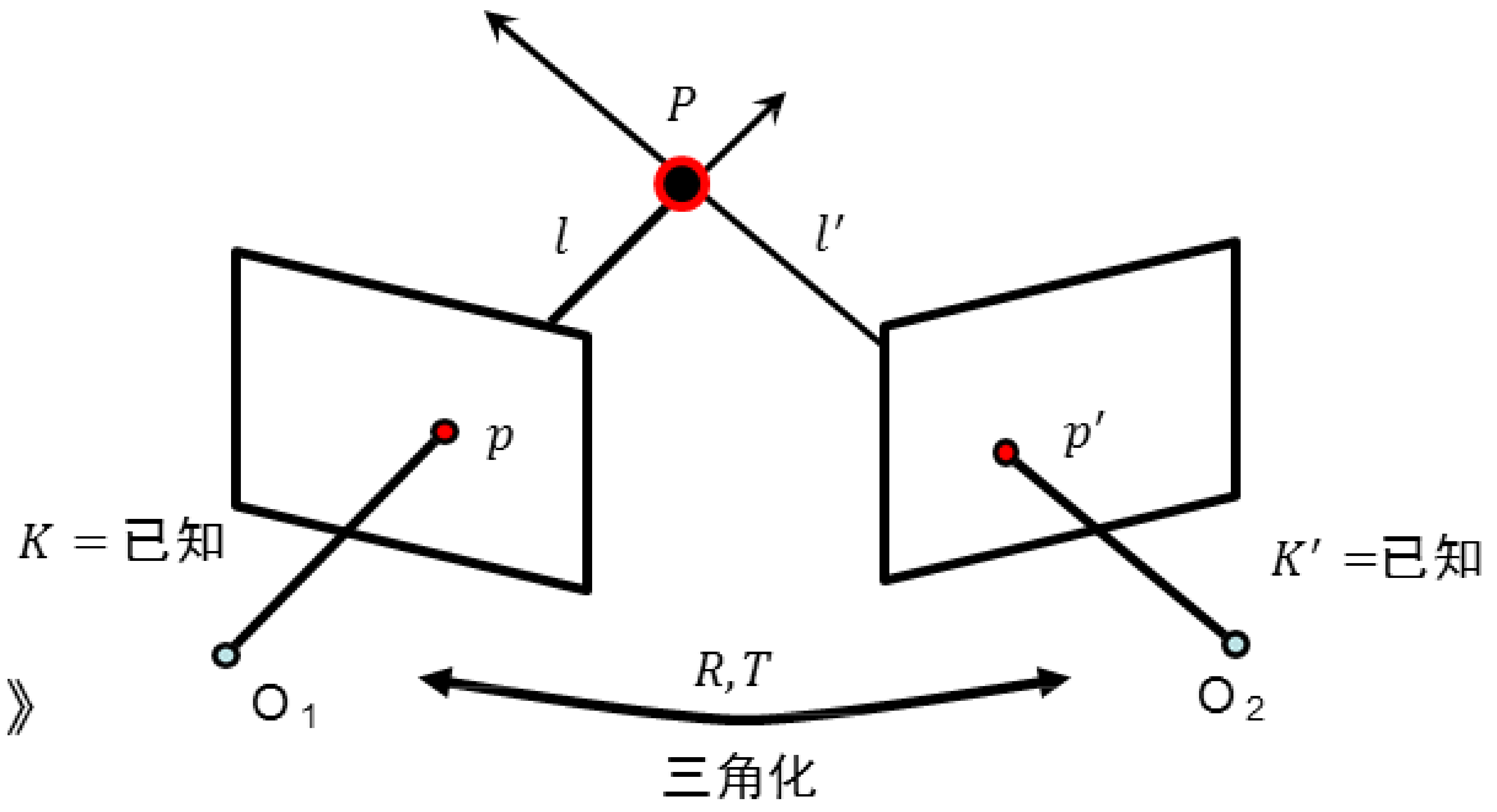
三角化

$$P = l \times l'$$

噪声的存在，两条直线通常不相交！

问题：已知p和p'，K和K'以及R,T

求解：P点的三维坐标？



- 线性解法

《Multiple View Geometry in Computer Vision》

- 非线性解法

三角化

$$P = l \times l'$$

噪声的存在，两条直线通常不相交！

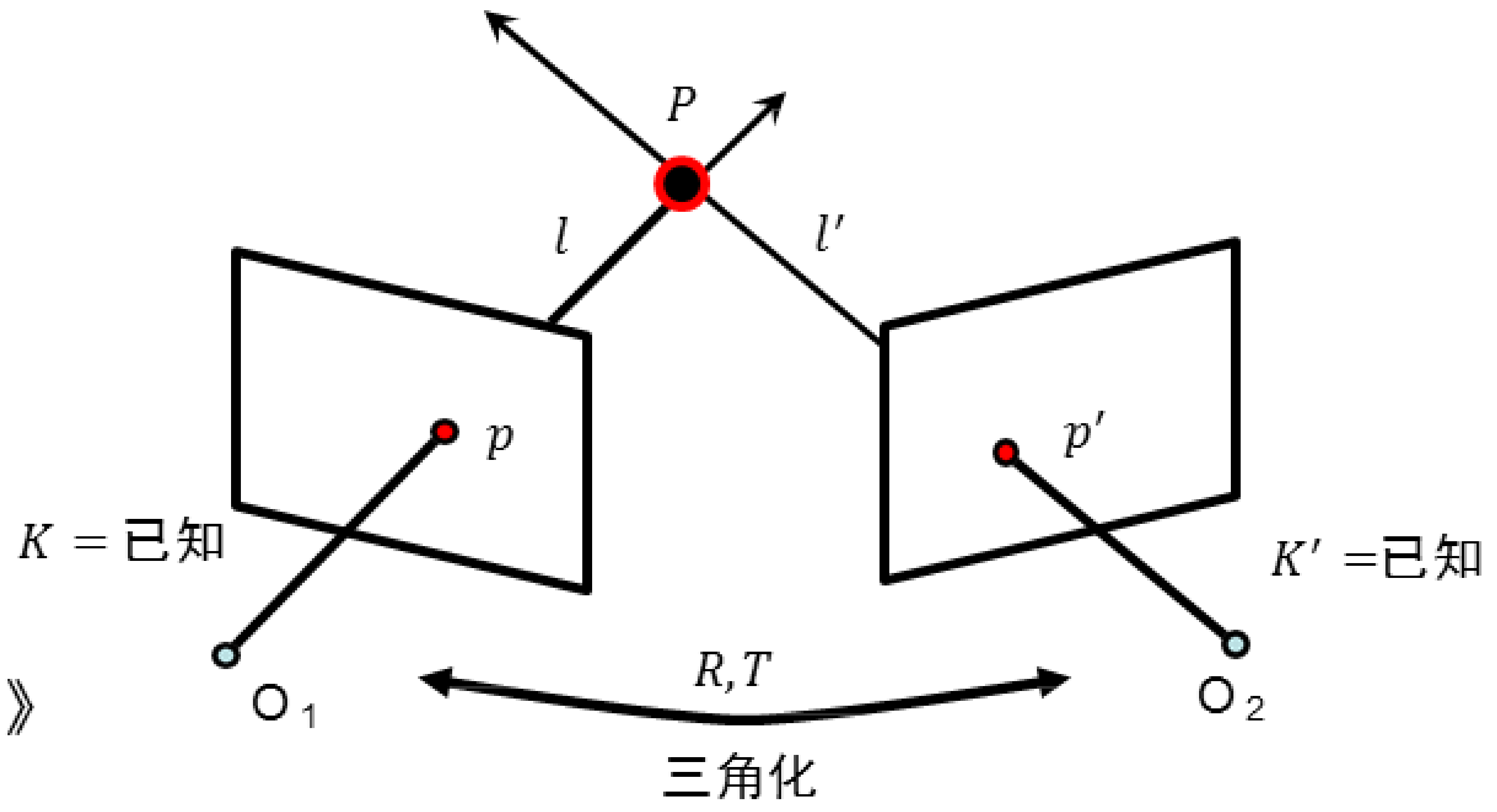
问题：已知p和p'，K和K'以及R,T

求解：P点的三维坐标？

- 线性解法

《Multiple View Geometry in Computer Vision》

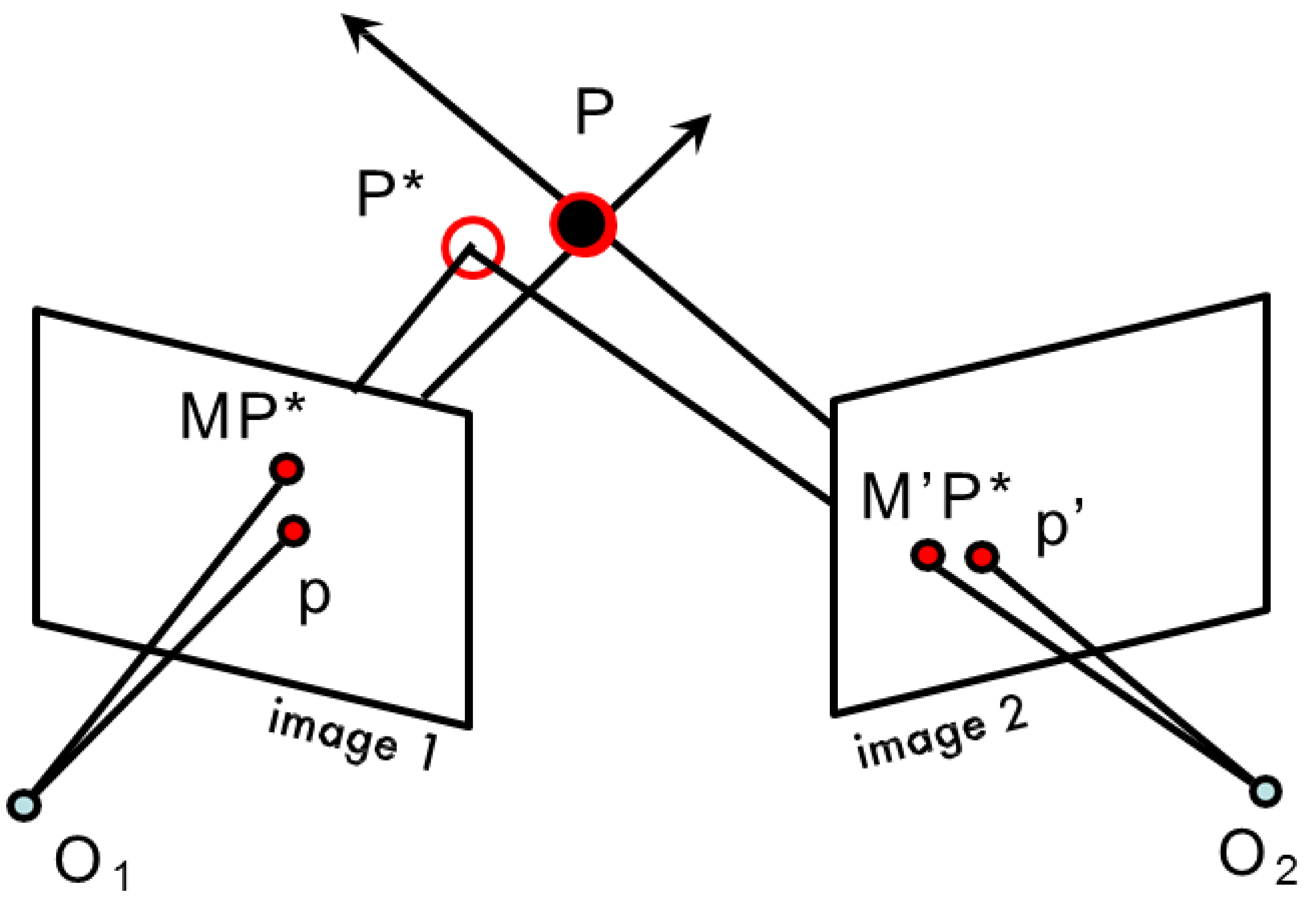
- 非线性解法



三角化（非线性）

- 寻找P* 最小化

$$d(p,M\ P^*)+d(p',M'P^*)$$

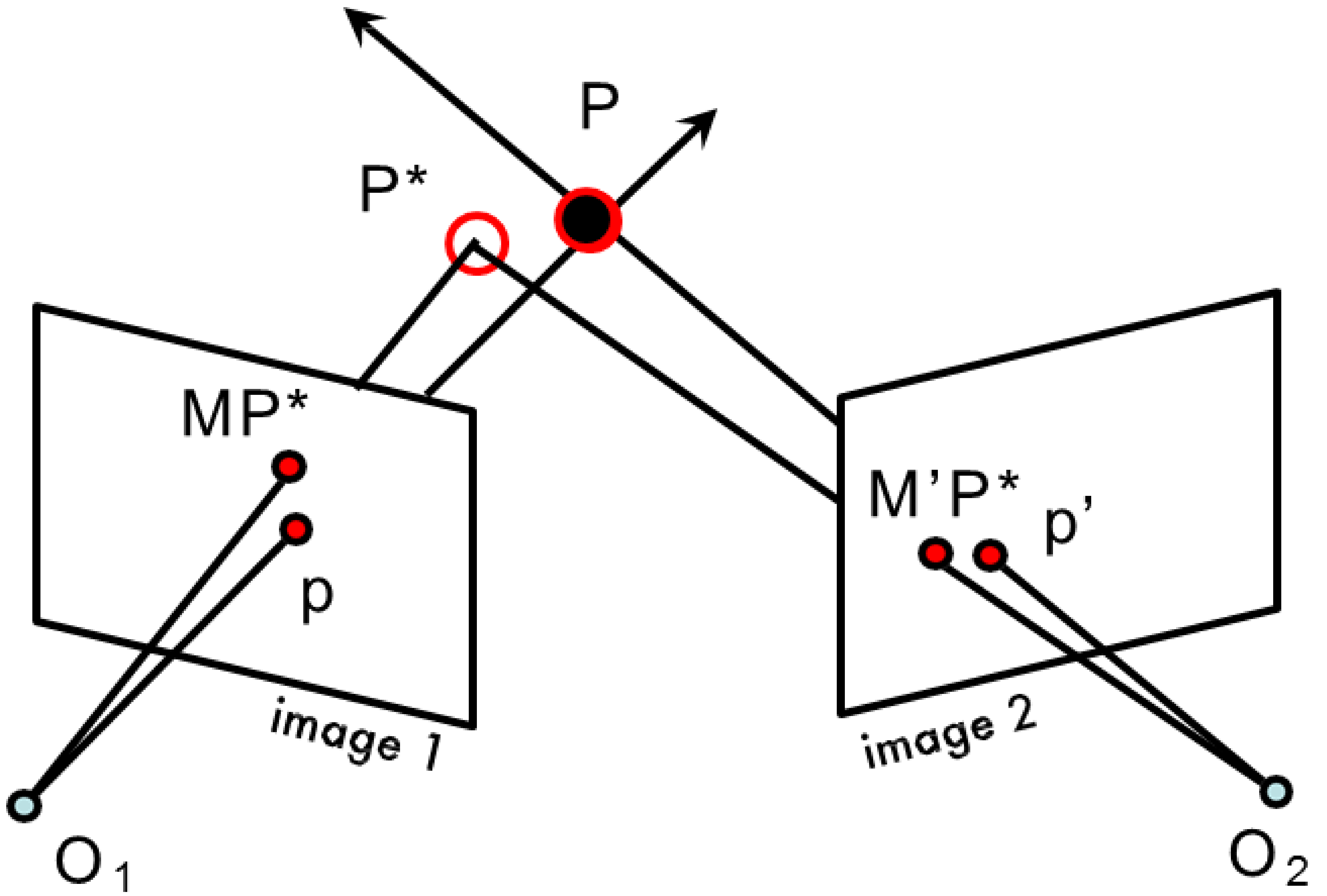


三角化（非线性）

- 寻找P* 最小化

$$d(p, M\ P^*) + d(p', M'P^*)$$

求解：牛顿法 与 列文伯格-马夸尔特法（L-M方法）



多视图几何的关键问题

- **摄像机几何**：从一张或者多张图像中求解摄像机的内、外参数
- **场景几何**：通过二至多幅图寻找 3D 场景坐标
- **对应关系**：已知一个图像中的 p 点，如何在另外一个图像中找到 p' 点

4. 三维重建基础与极几何

- 三维重建基础（完）
- 极几何、本质矩阵与基础矩阵
- 基础矩阵估计

4. 三维重建基础与极几何

- 三维重建基础
- 极几何
- 基础矩阵估计

极几何

- 极几何
- 本质矩阵
- 基础矩阵

多视图几何的第三个关键问题

- **对应关系**：已知一个图像中的 p 点，如何在另外一个图像中找到 p' 点

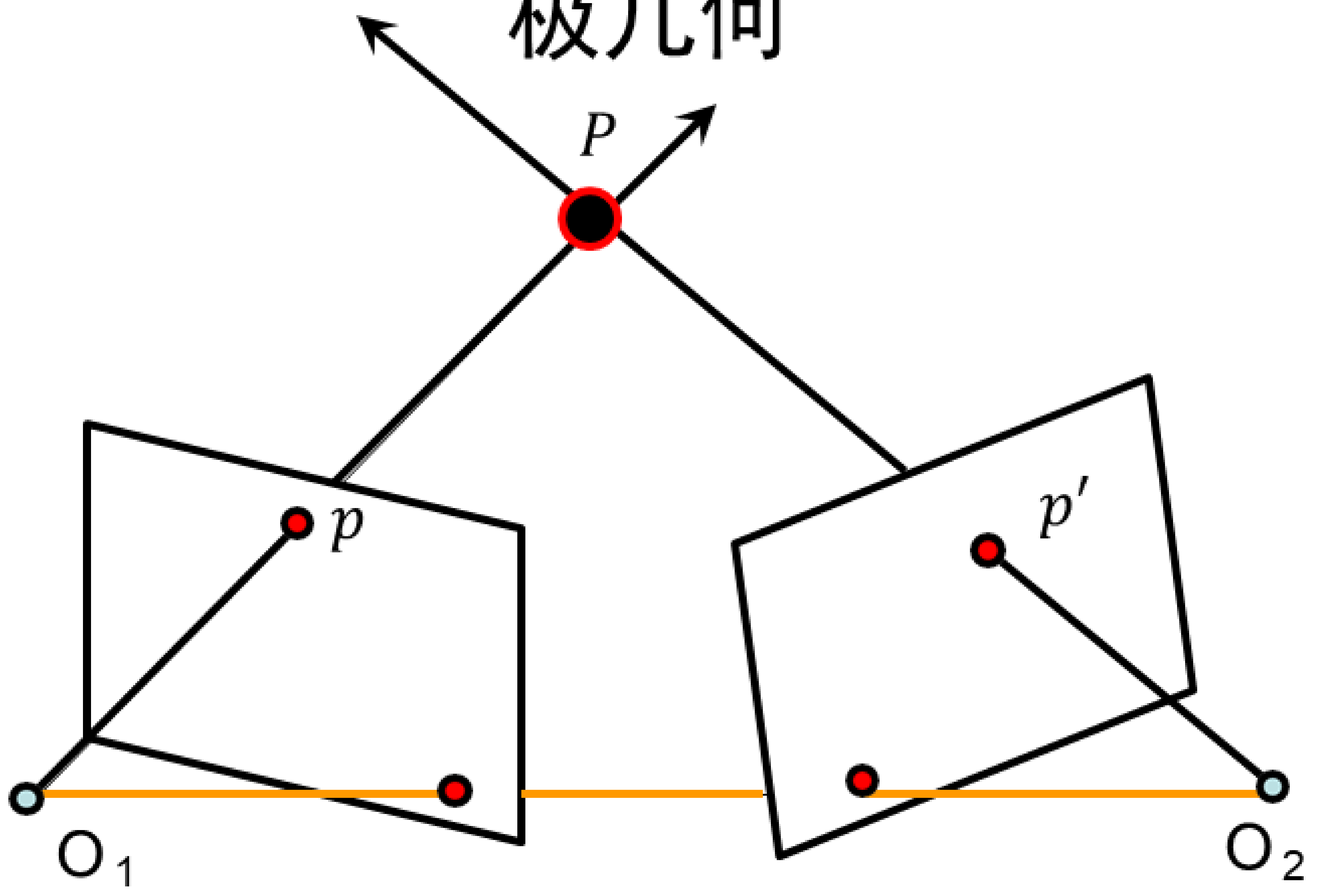
什么是极几何？

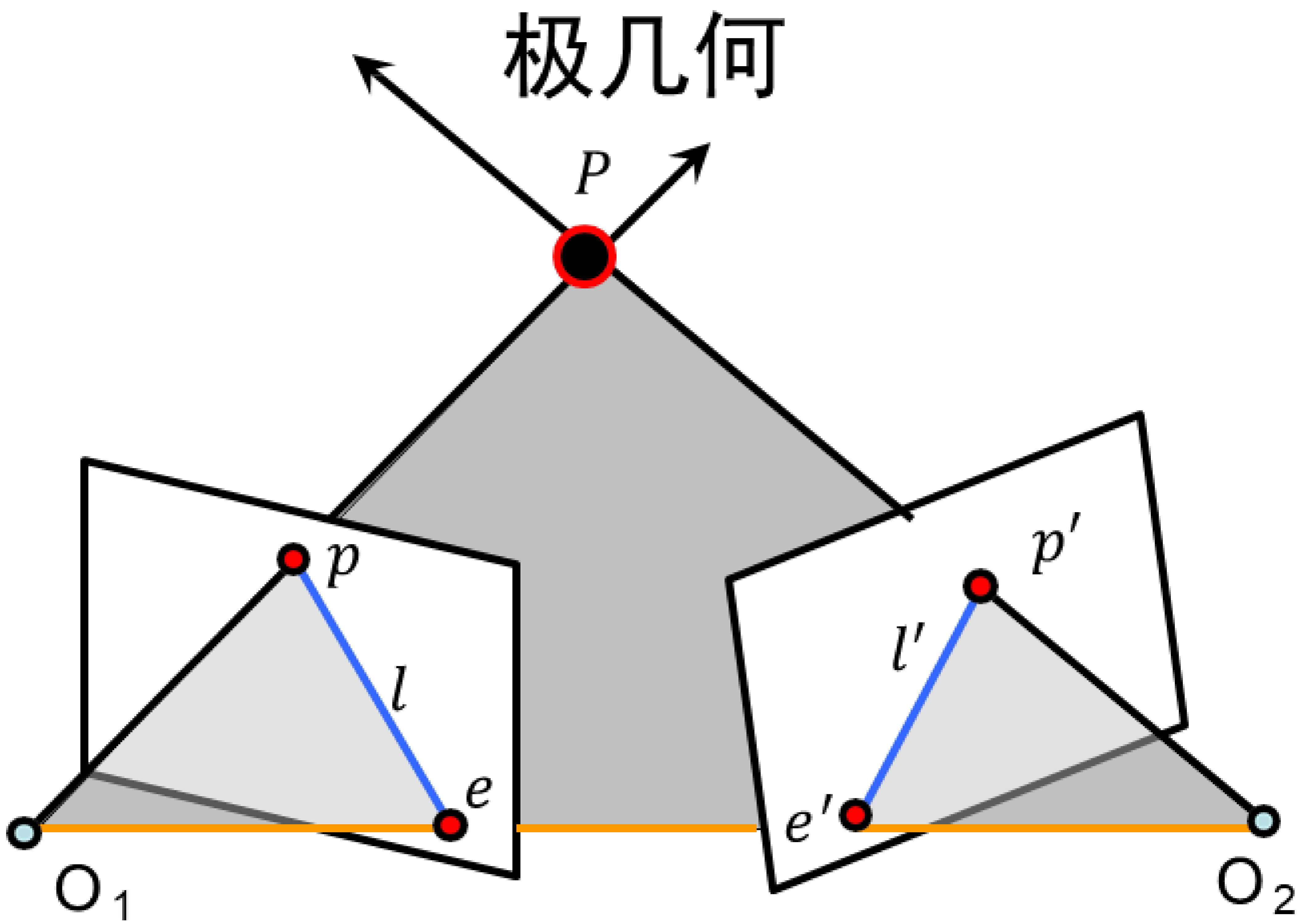
- 极几何描述了同一场景或者物体的两个视点图像间的几何关系；

多视图几何的第三个关键问题

- **对应关系**：已知一个图像中的 p 点，如何在另外一个图像中找到 p' 点

极几何





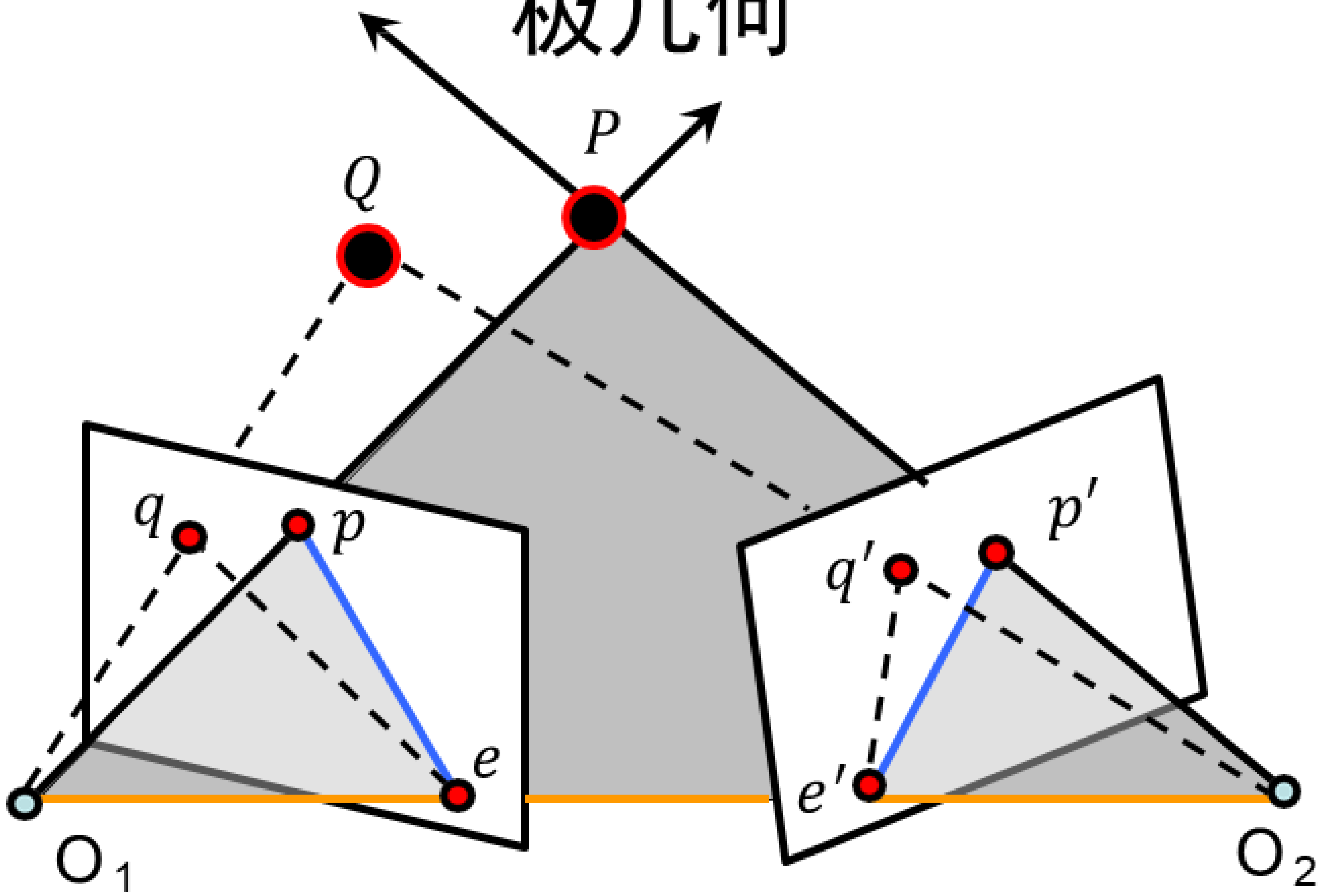
极平面：过点P，O_1与O_2的平面

基线：O_1与O_2的连线

极线：极平面与成像平面的交线

极点：基线与成像平面的交点

极几何



极平面：过点P，O_1与O_2的平面

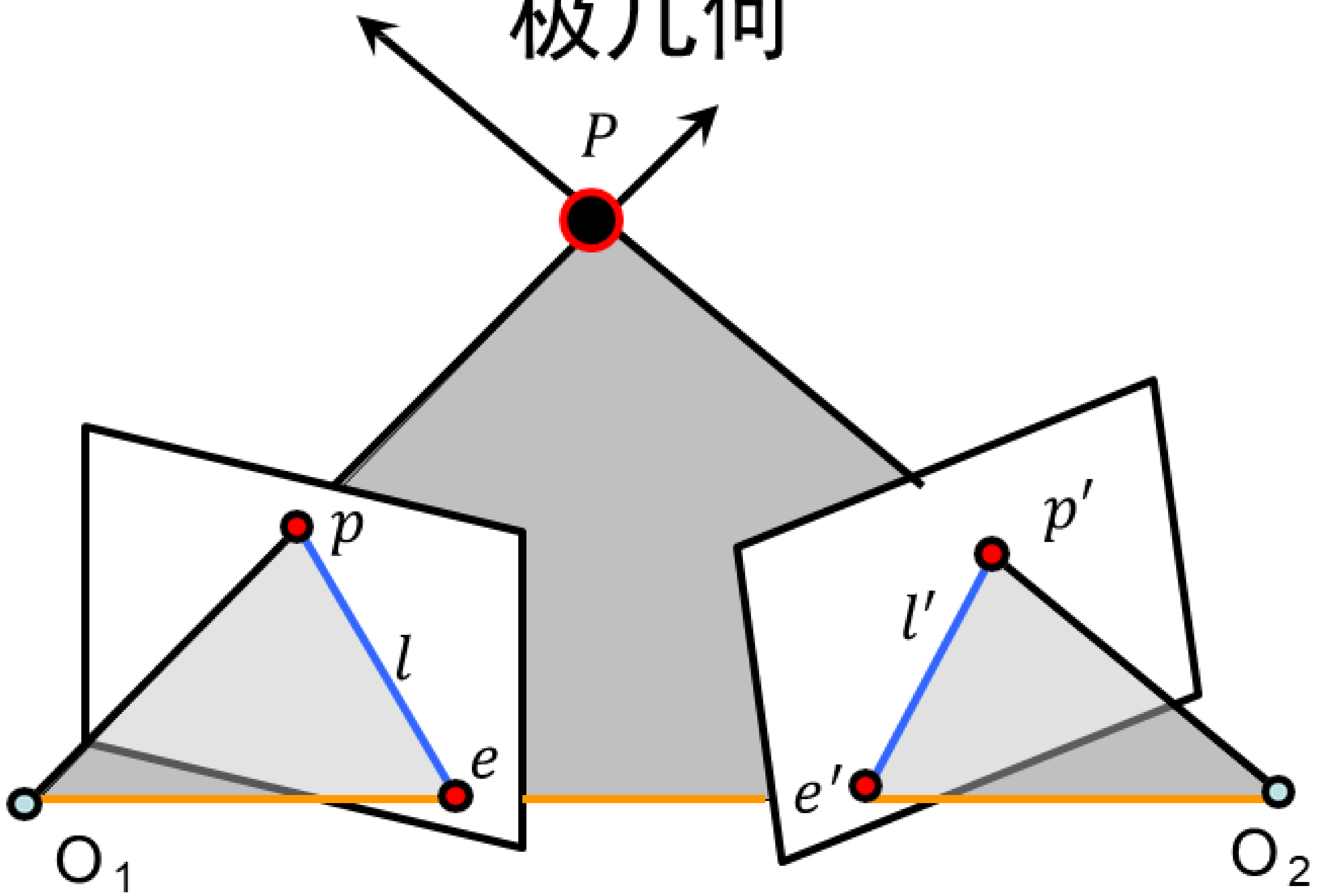
基线：O_1与O_2的连线

极线：极平面与成像平面的交线

极点：基线与成像平面的交点

- 极平面相交与基线
- 极线相交于极点

极几何



作用：
将搜索范围缩小到
对应的极线上。

极平面：过点P，O_1与O_2的平面

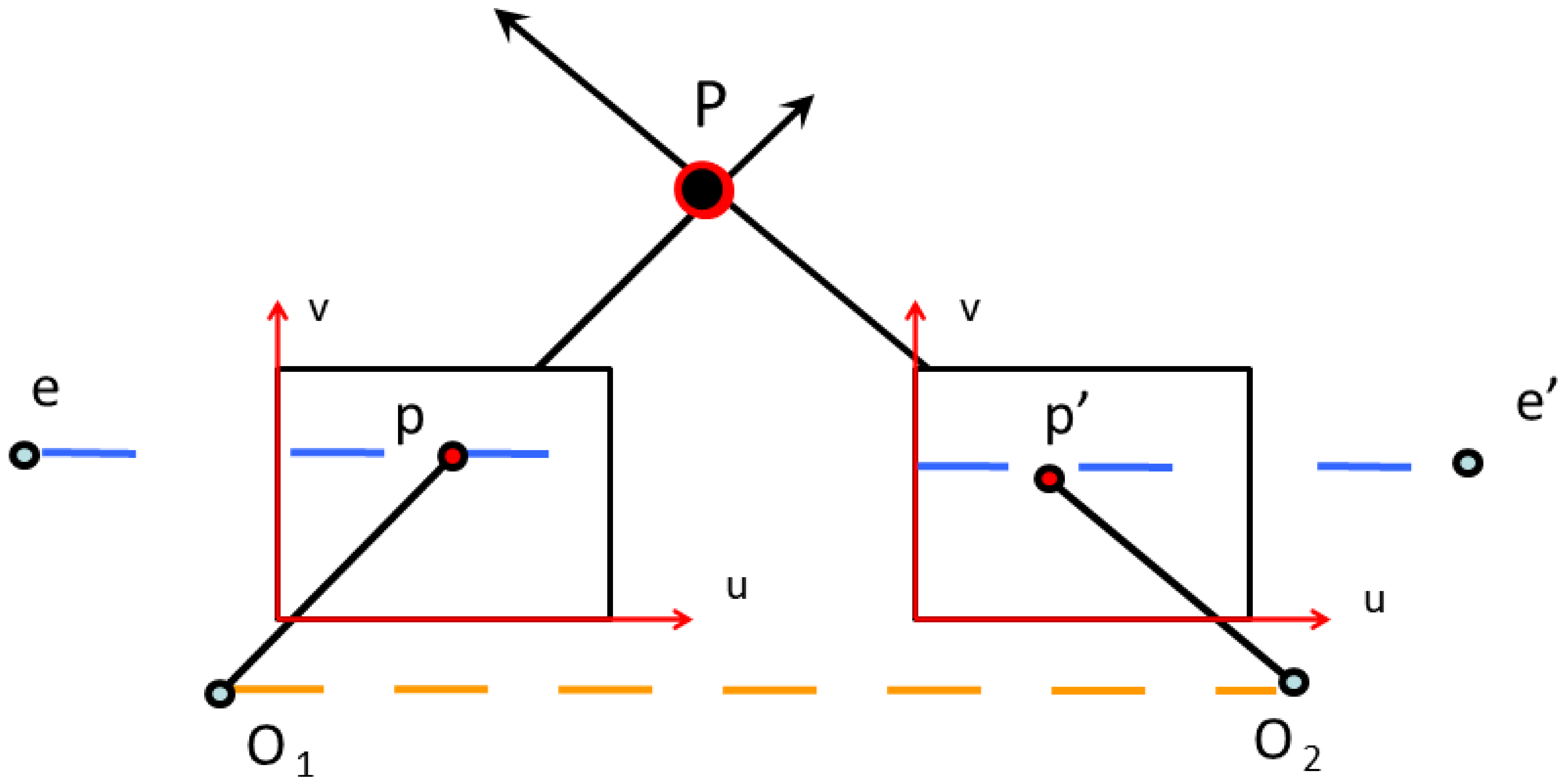
基线：O_1与O_2的连线

极线：极平面与成像平面的交线

极点：基线与成像平面的交点

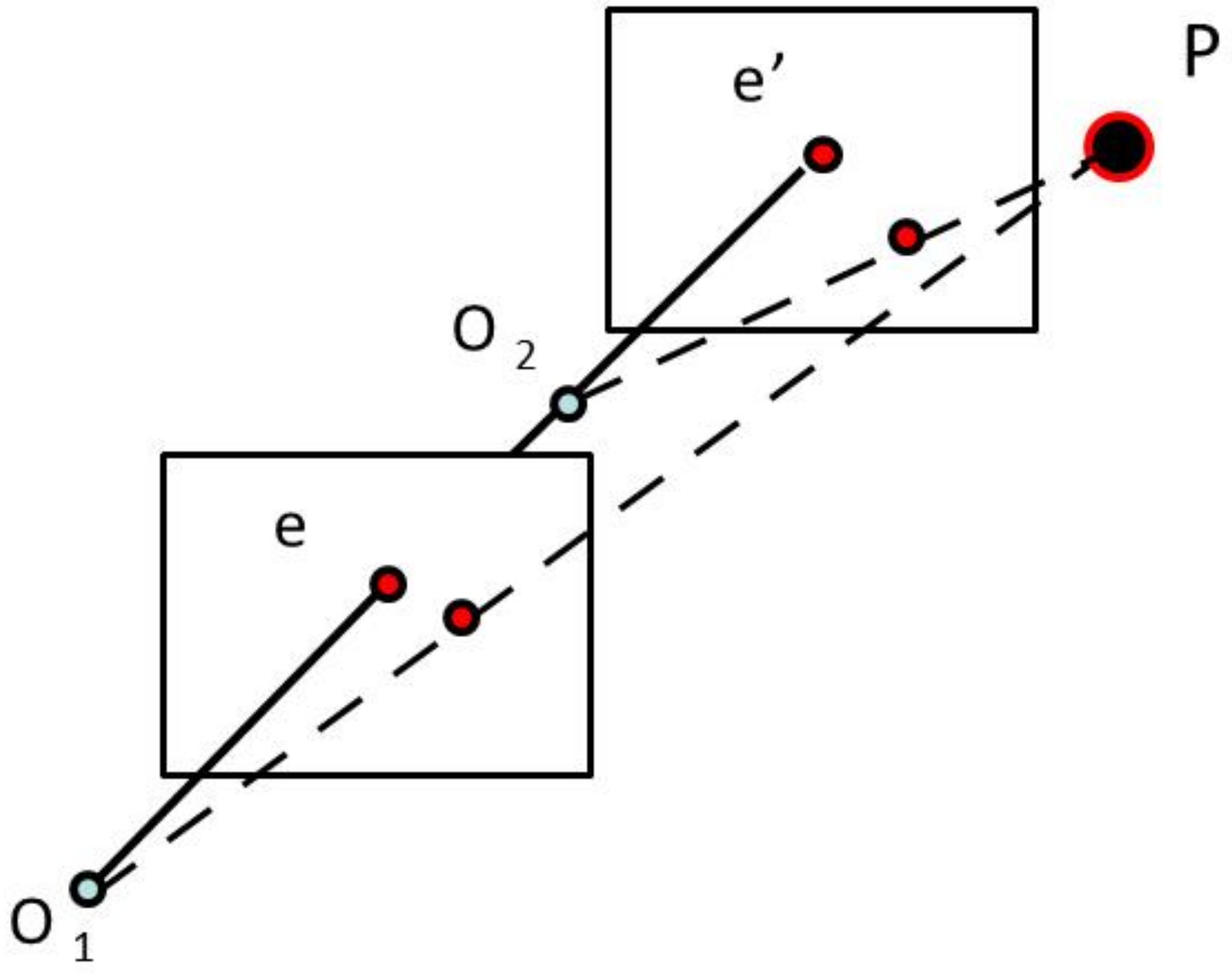
- 极平面相交与基线
- 极线相交于极点
- p 的对应点在极线 l' 上
- p' 的对应点在极线 l 上

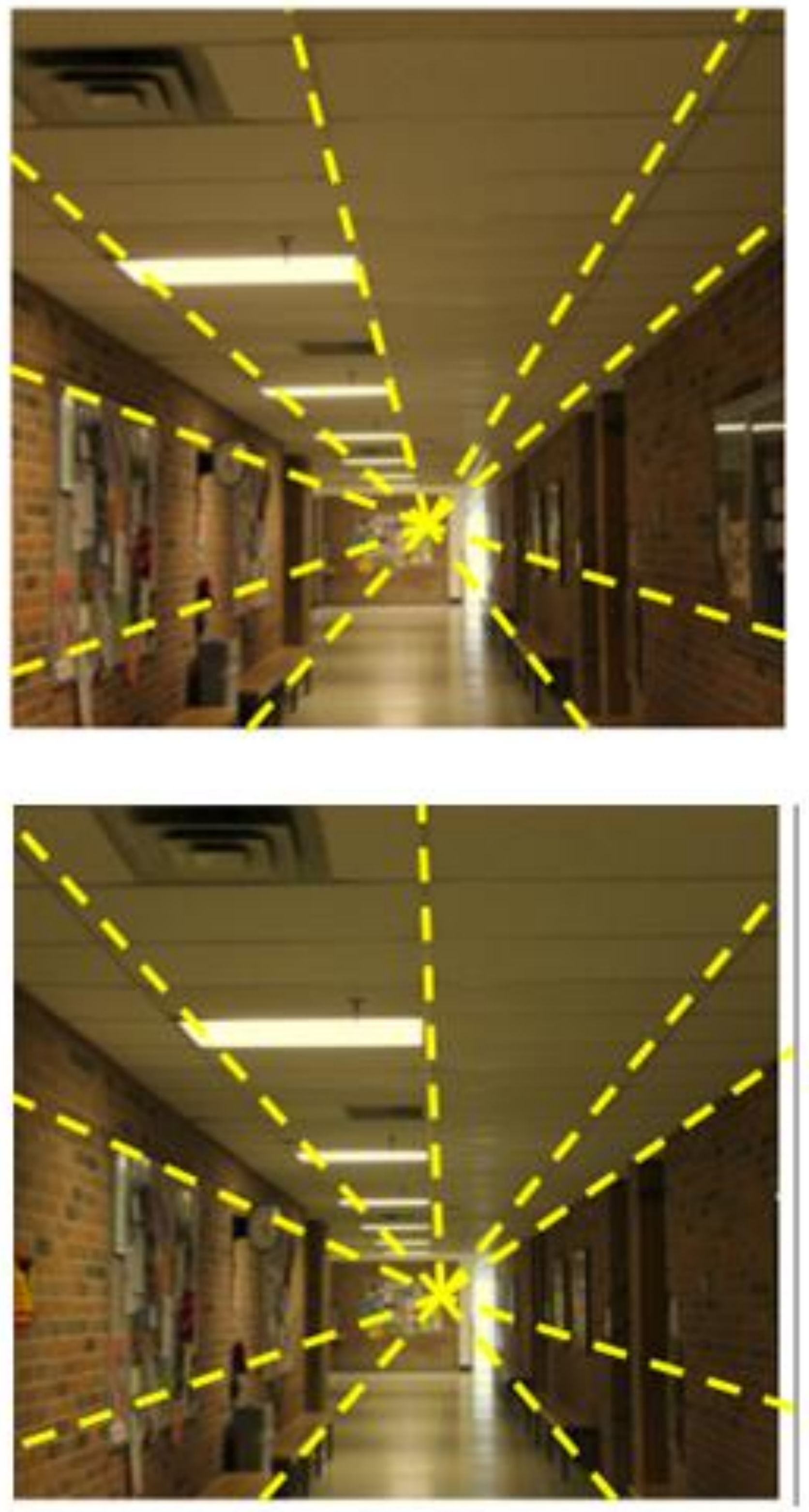
极几何特例：平行视图



- 两个图像平面平行；
- 基线平行于图像平面，极点e和e'位于无穷远处
- 极线平行于图像坐标系的u轴

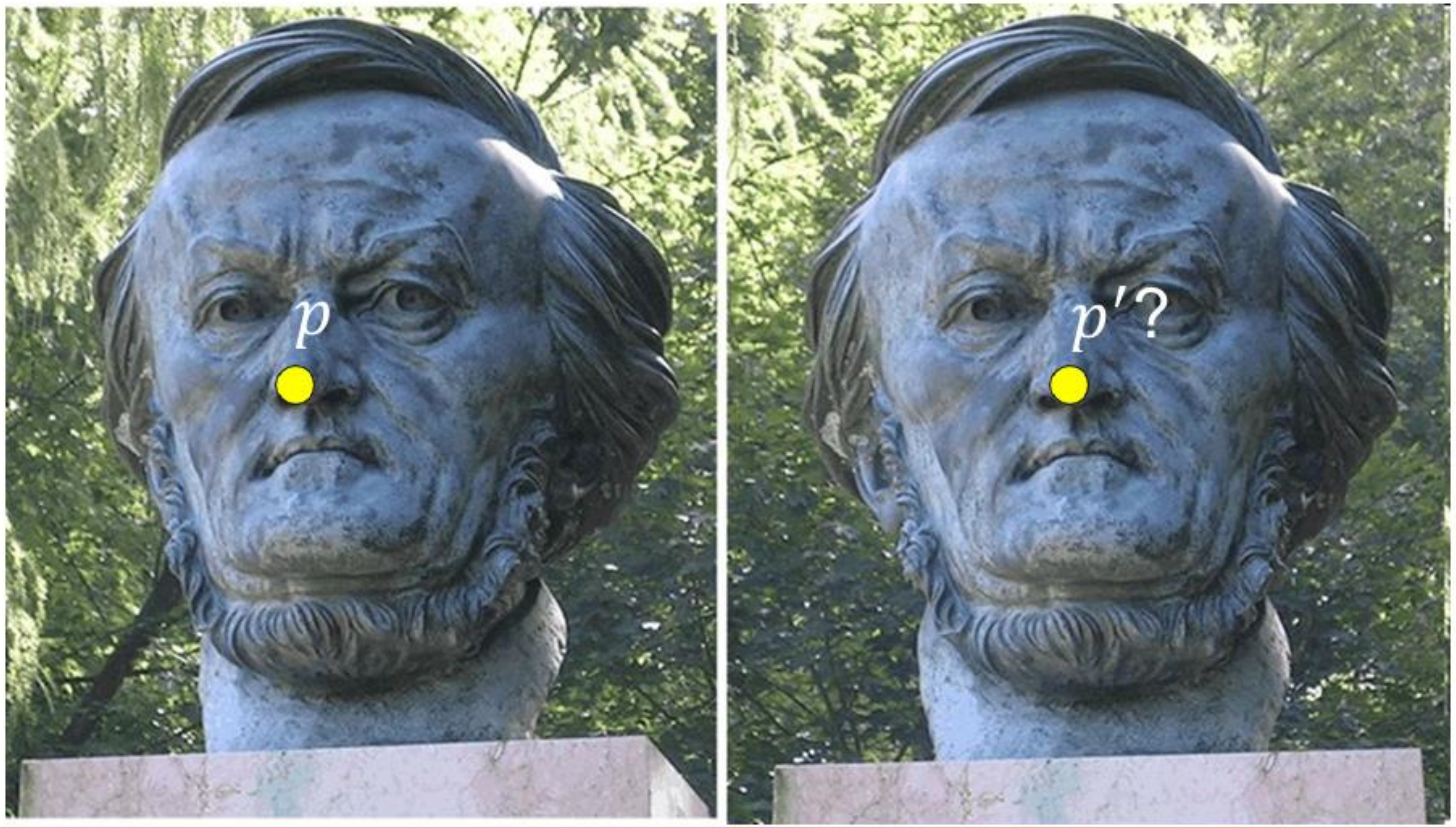
极几何特例2：前向平移（无旋转）





两幅图上极点的位置相同，极点称作展开焦点(focus of expansion)。

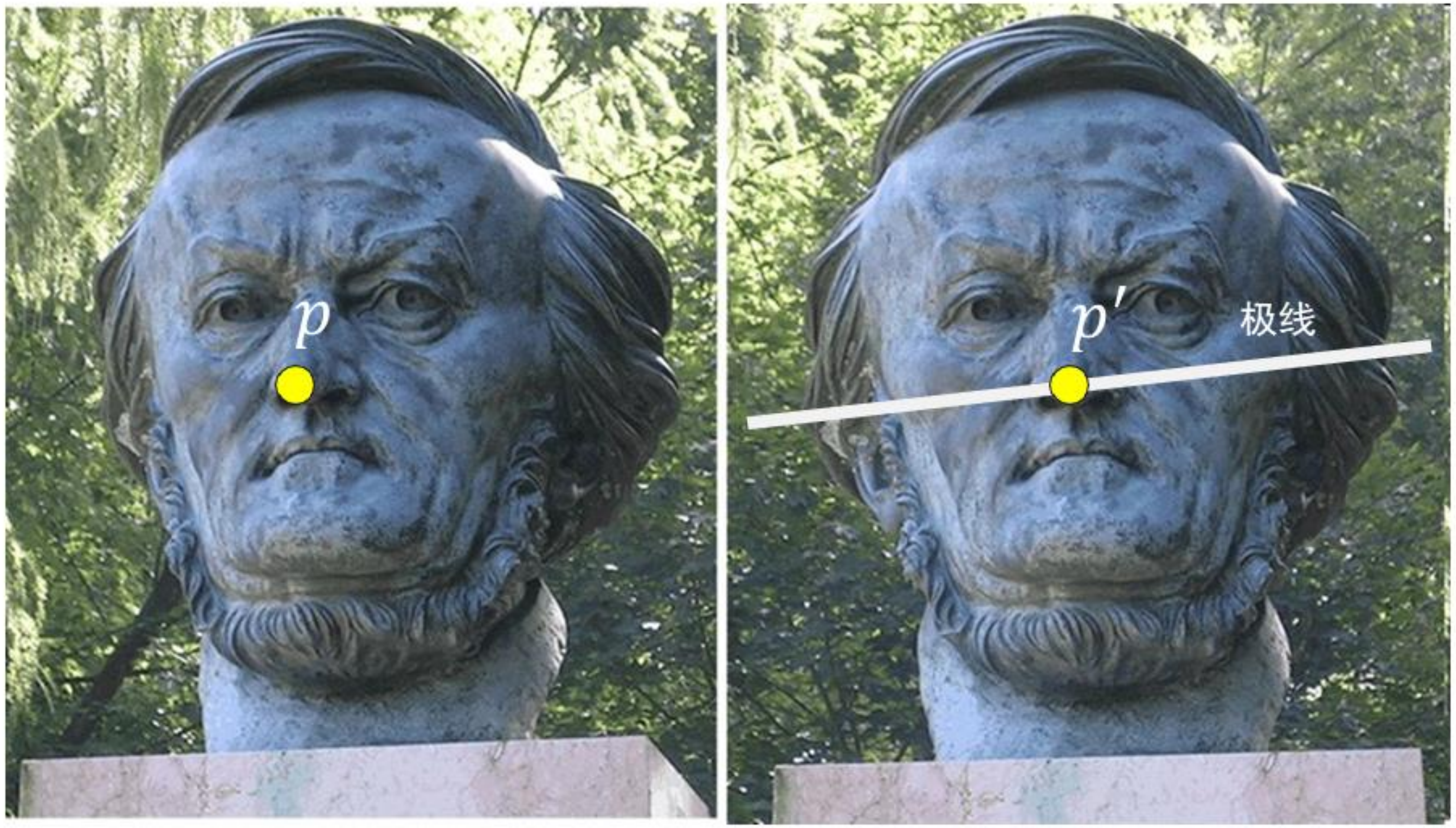
极几何约束



多视图几何的第三个关键问题

- **对应关系**：已知一个图像中的 p 点，如何在另外一个图像中找到 p' 点

极几何约束



通过极几何约束，将搜索范围缩小到对应的极线上。

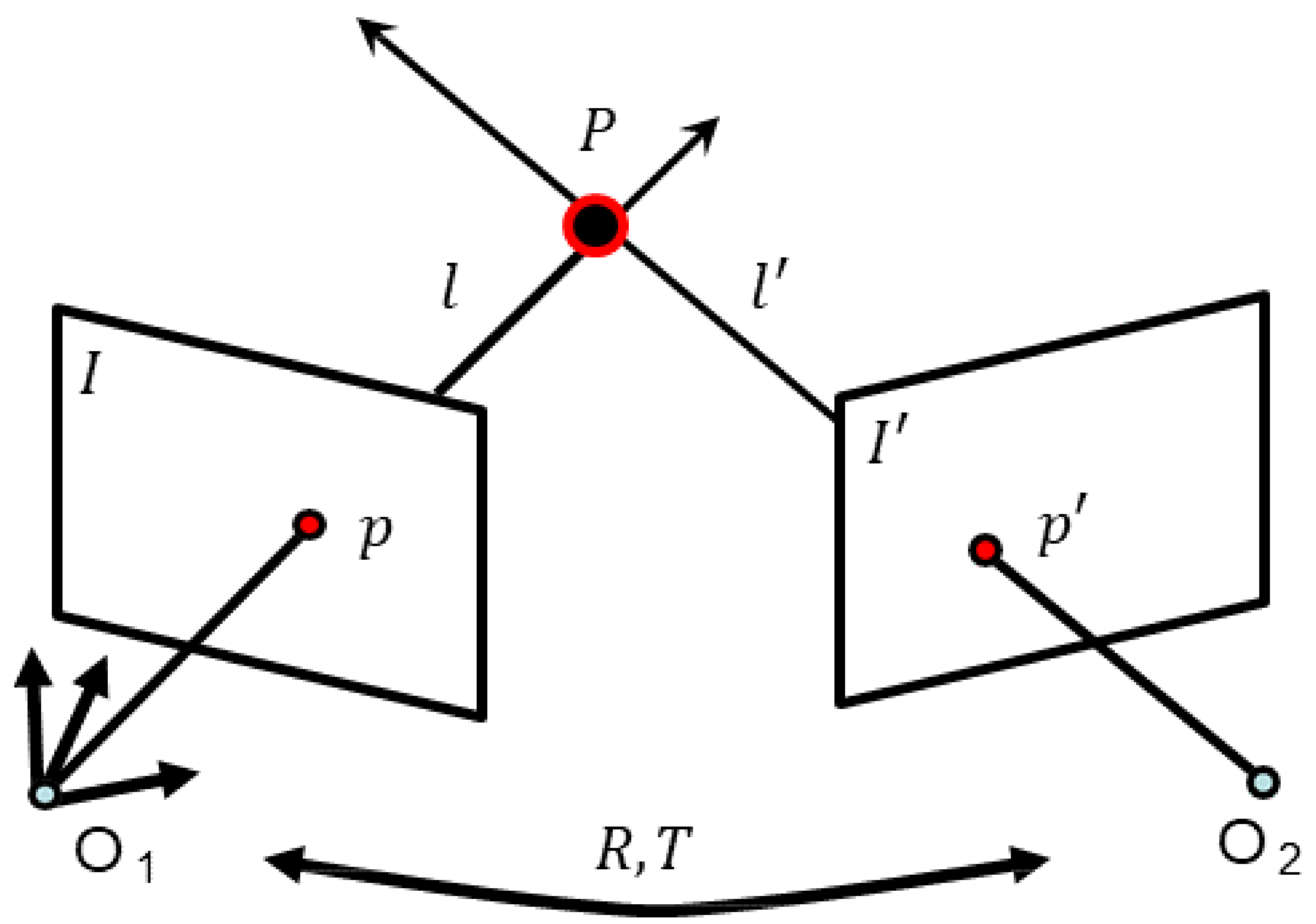
什么是本质矩阵？

➢ 本质矩阵对规范化摄像机拍摄的两个视点图像间的极几何关系进行代数描述；

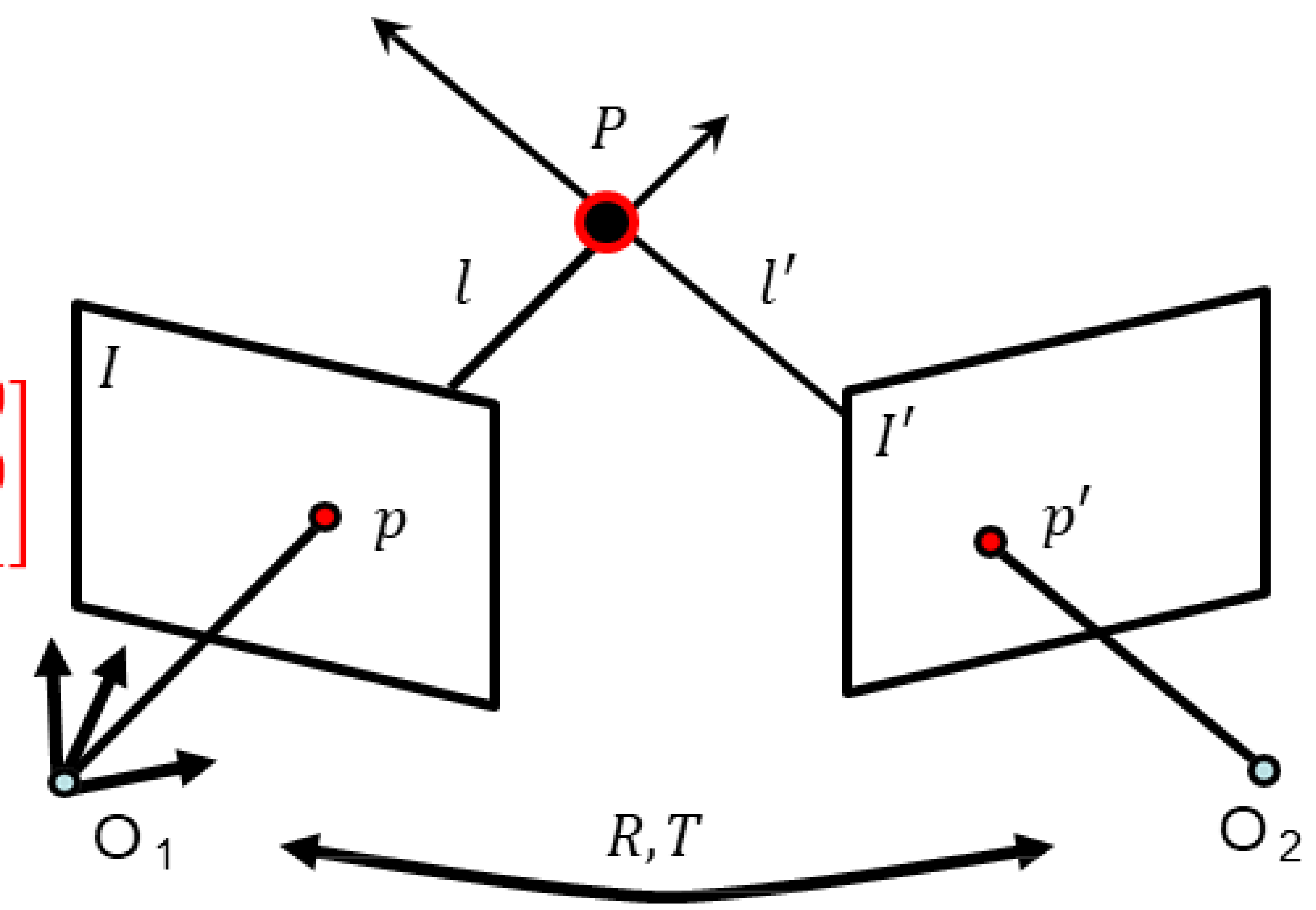
多视图几何的第三个关键问题

- **对应关系**：已知一个图像中的 p 点，如何在另外一个图像中找到 p' 点

极几何约束——本质矩阵



极几何约束——本质矩阵



$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$K' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

图像 I 上的点 p 像素坐标为 (u, v)

图像 I'上的点 p' 像素坐标为 (u', v')

$K = K'$已知且为规范化相机

规范化投影变换

$$P' = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{M}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

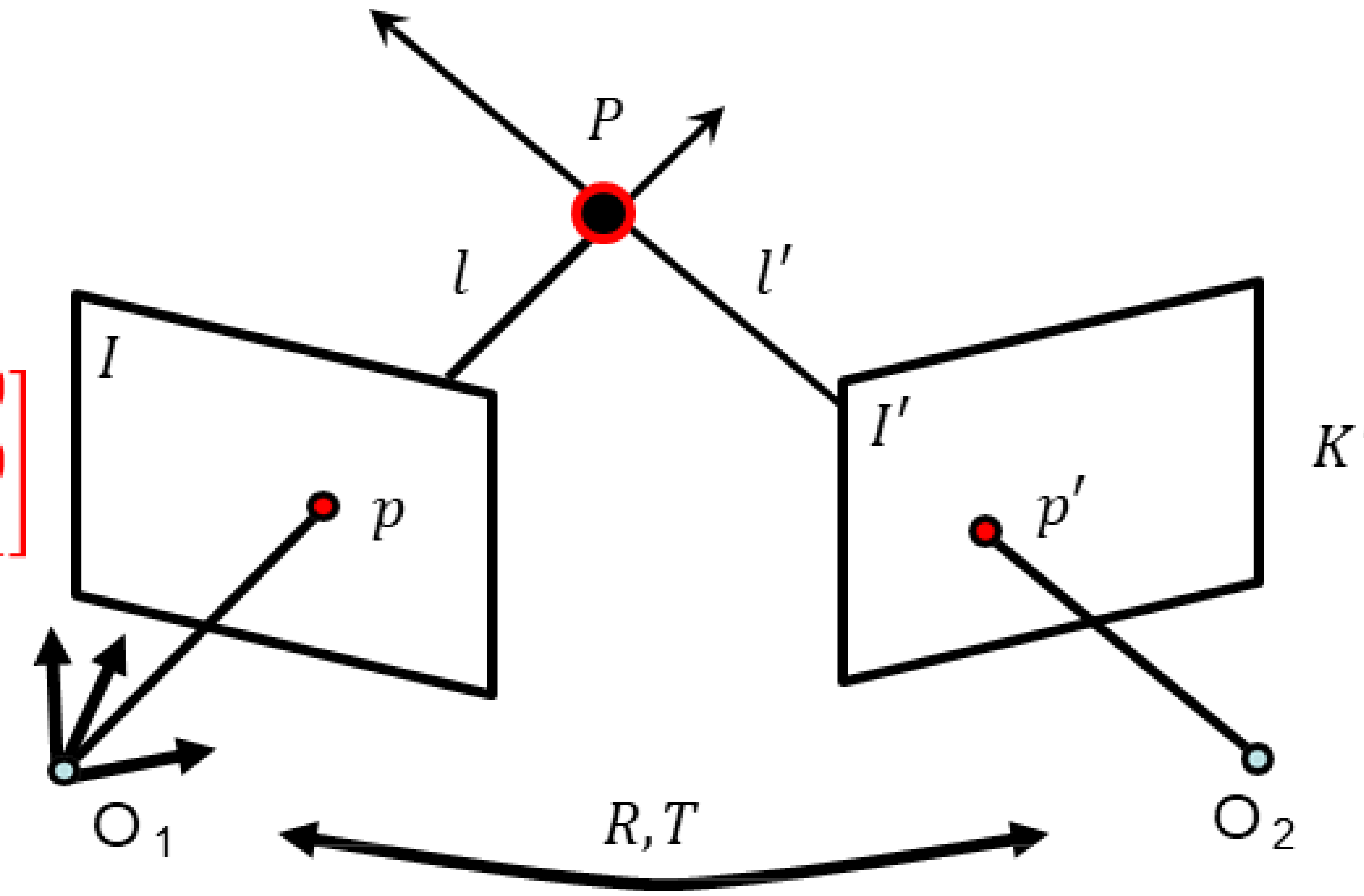
$$P' = M\,P$$

$$\Re^4 \xrightarrow{H} \Re^3$$

摄像机坐标系下三维点的欧式（非齐次）坐标　=　图像点的其次坐标

极几何约束——本质矩阵

$$K=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$



$$K'=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

图像 I 上的点 p 像素坐标为 (u,v)

图像 I'上的点 p' 像素坐标为 (u',v')

$K=K'$已知且为规范化相机 ⇨ 三维点的欧式（非齐次）坐标 = 图像点的齐次坐标

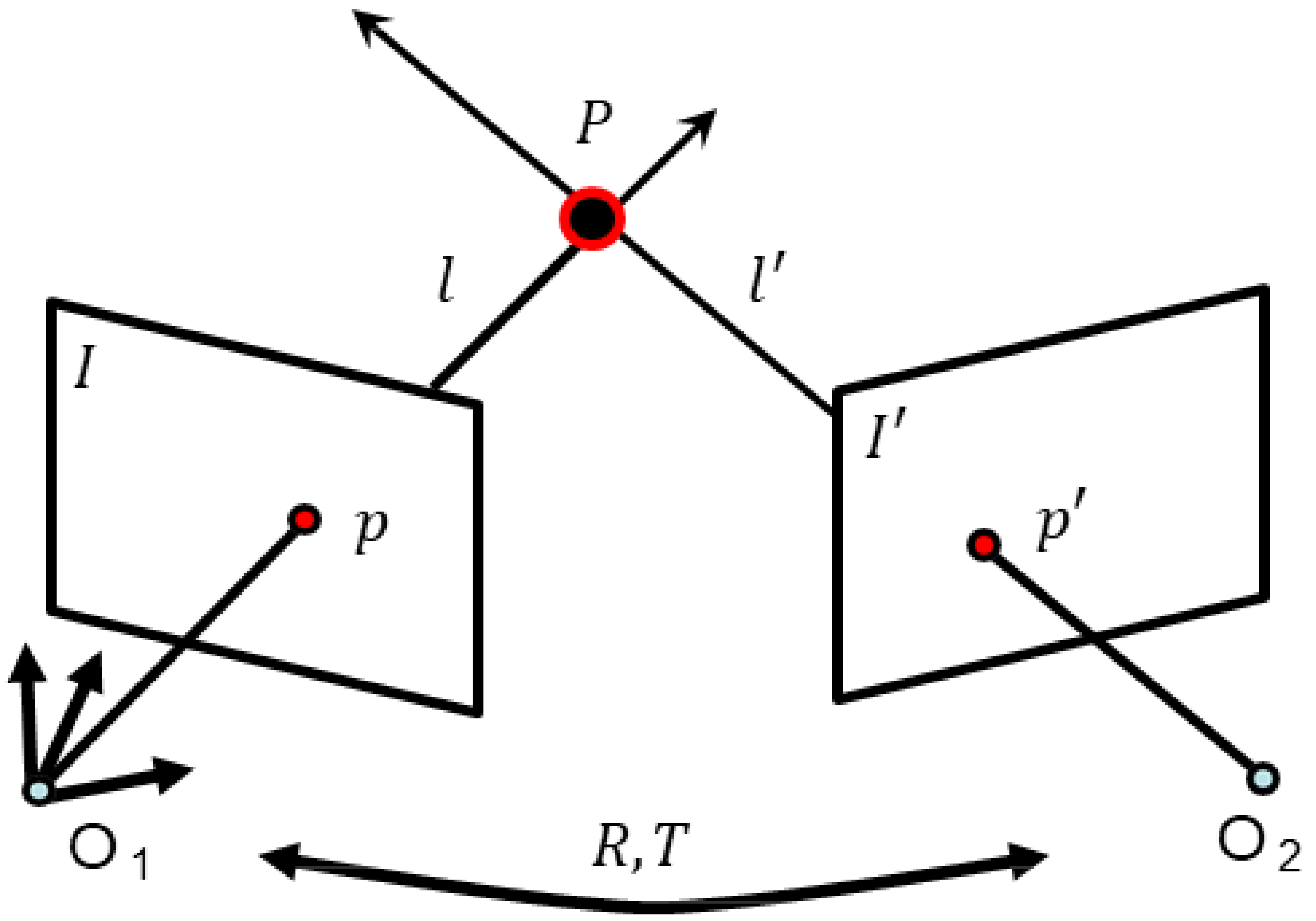
空间点 p 在 O_1 坐标系下的非齐次坐标为 $(u,v,1)$

空间点 p' 在 O_2 坐标系下的非齐次坐标为 $(u',v',1)$

极几何约束——本质矩阵

空间点 p 在 O_1 坐标系下的
非齐次坐标为 $(u, v, 1)$
空间点 p' 在 O_2 坐标系下的
非齐次坐标为 $(u', v', 1)$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$K' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

问题：三维点 p' 在O_1的坐标= ？

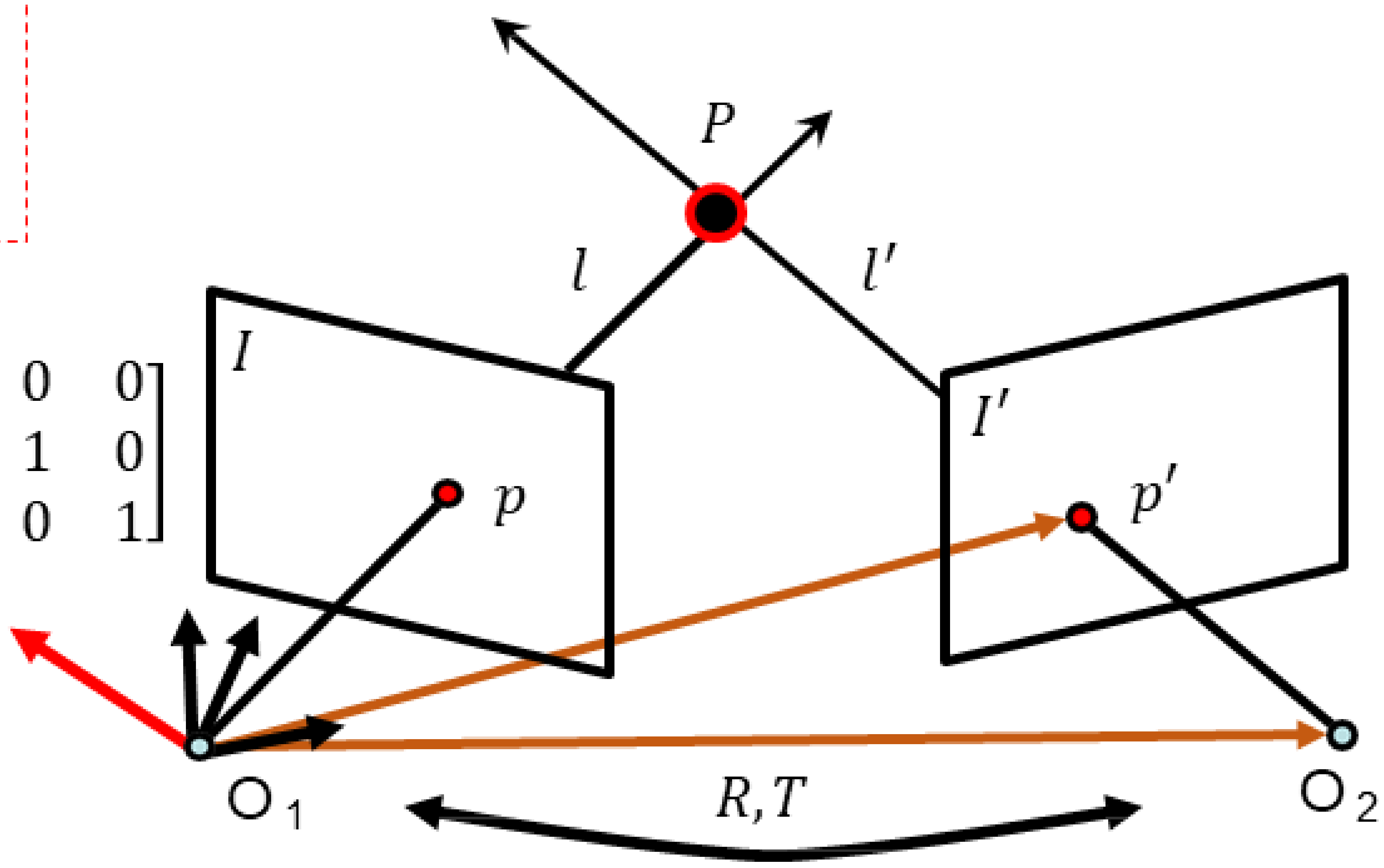
三维点O_2 在O_1的坐标= ？

极几何约束——本质矩阵

空间点 p 在 O_1 坐标系下的非齐次坐标为 $(u, v, 1)$

空间点 p' 在 O_2 坐标系下的非齐次坐标为 $(u', v', 1)$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$K' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

p' 在O_1的坐标$= R^T p' - R^T T$

O_2在O_1的坐标$= -R^T T$

⇒ $R^T T \times (R^T p' - R^T T)$ 垂直于极平面

⇓

$[R^T T \times (R^T p' - R^T T)]^T \cdot p = 0$

⇐

$$\boxed{p'^T [T \times R] p = 0}$$

叉乘的矩阵表示

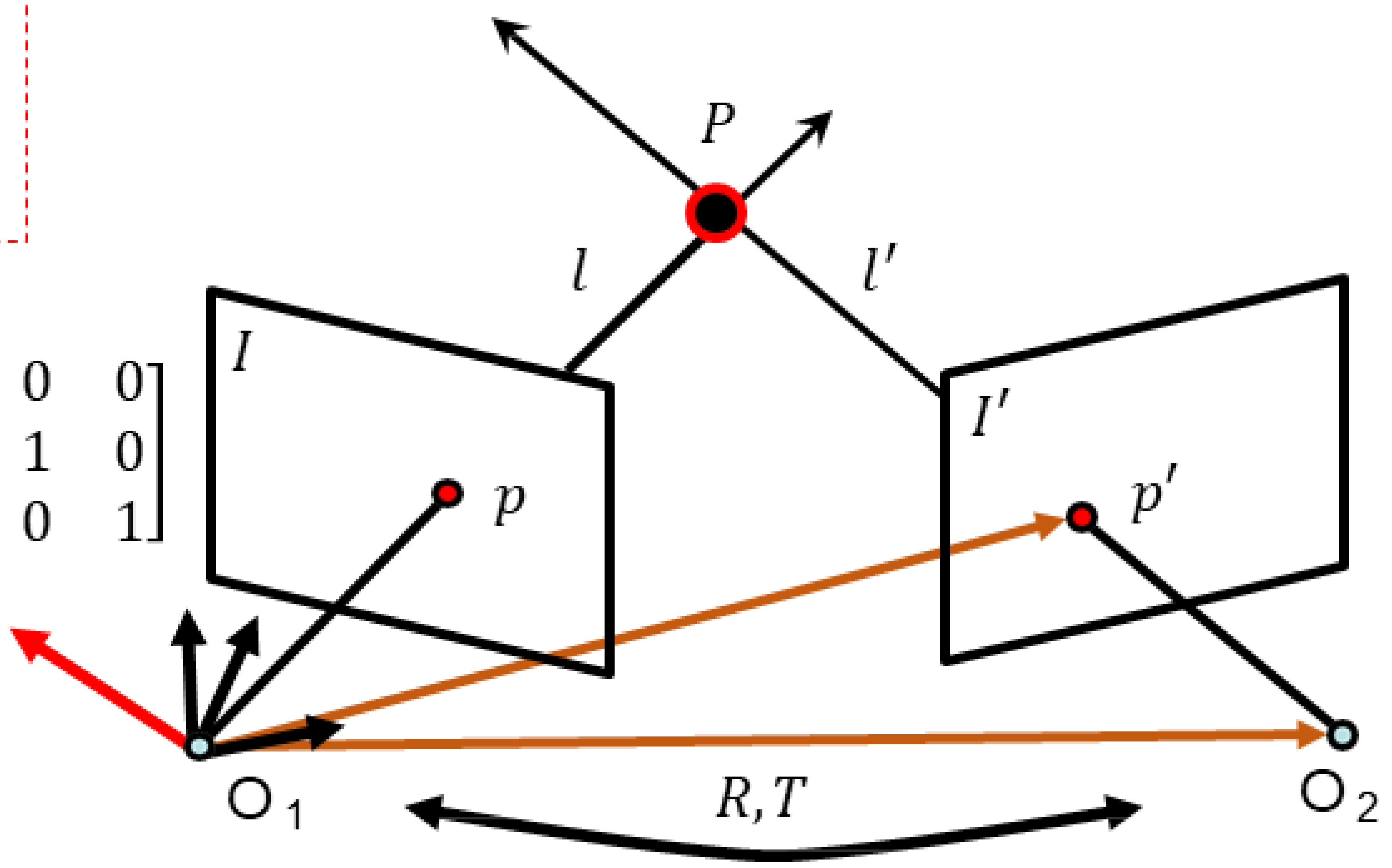
$$a \times b = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = [a_\times]b$$

极几何约束——本质矩阵

空间点 p 在 O_1 坐标系下的非齐次坐标为 $(u, v, 1)$

空间点 p' 在 O_2 坐标系下的非齐次坐标为 $(u', v', 1)$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$K' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

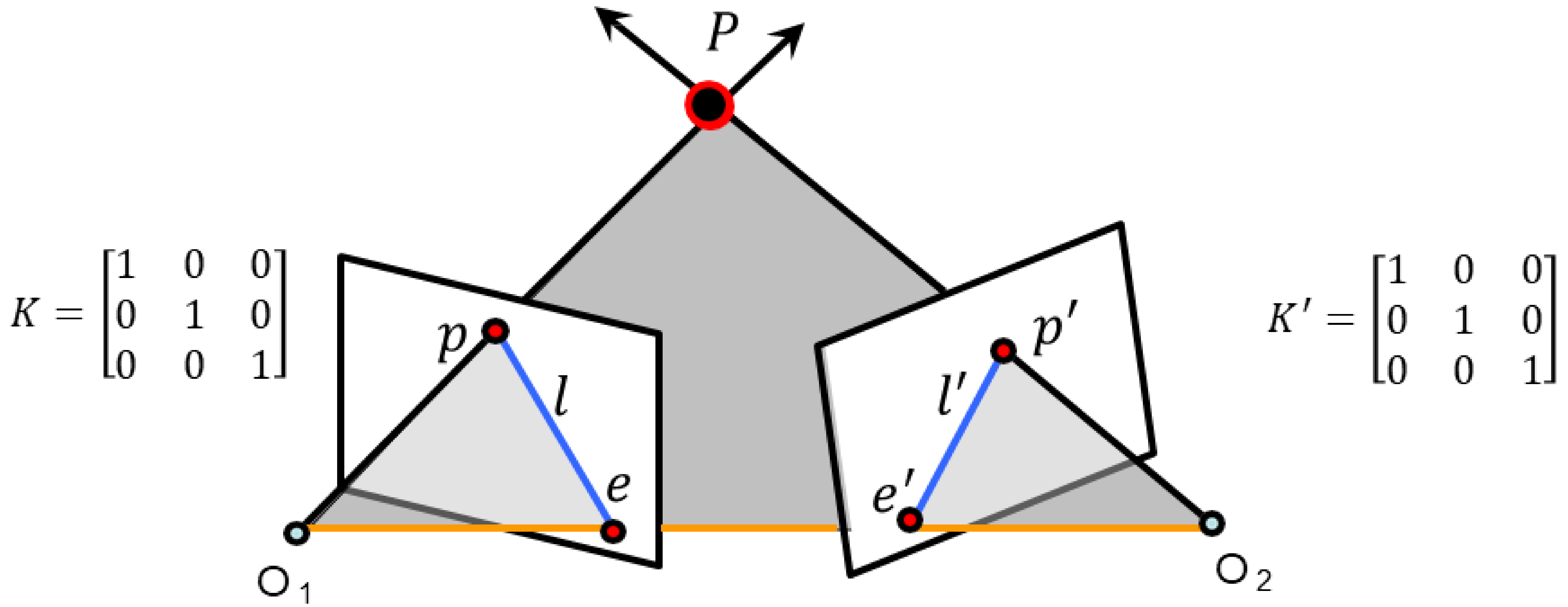
$$E = T \times R = [T_\times]R$$

E = 本质矩阵

$$p'^T [T \times R] p = p'^T [T_\times] R p = 0$$

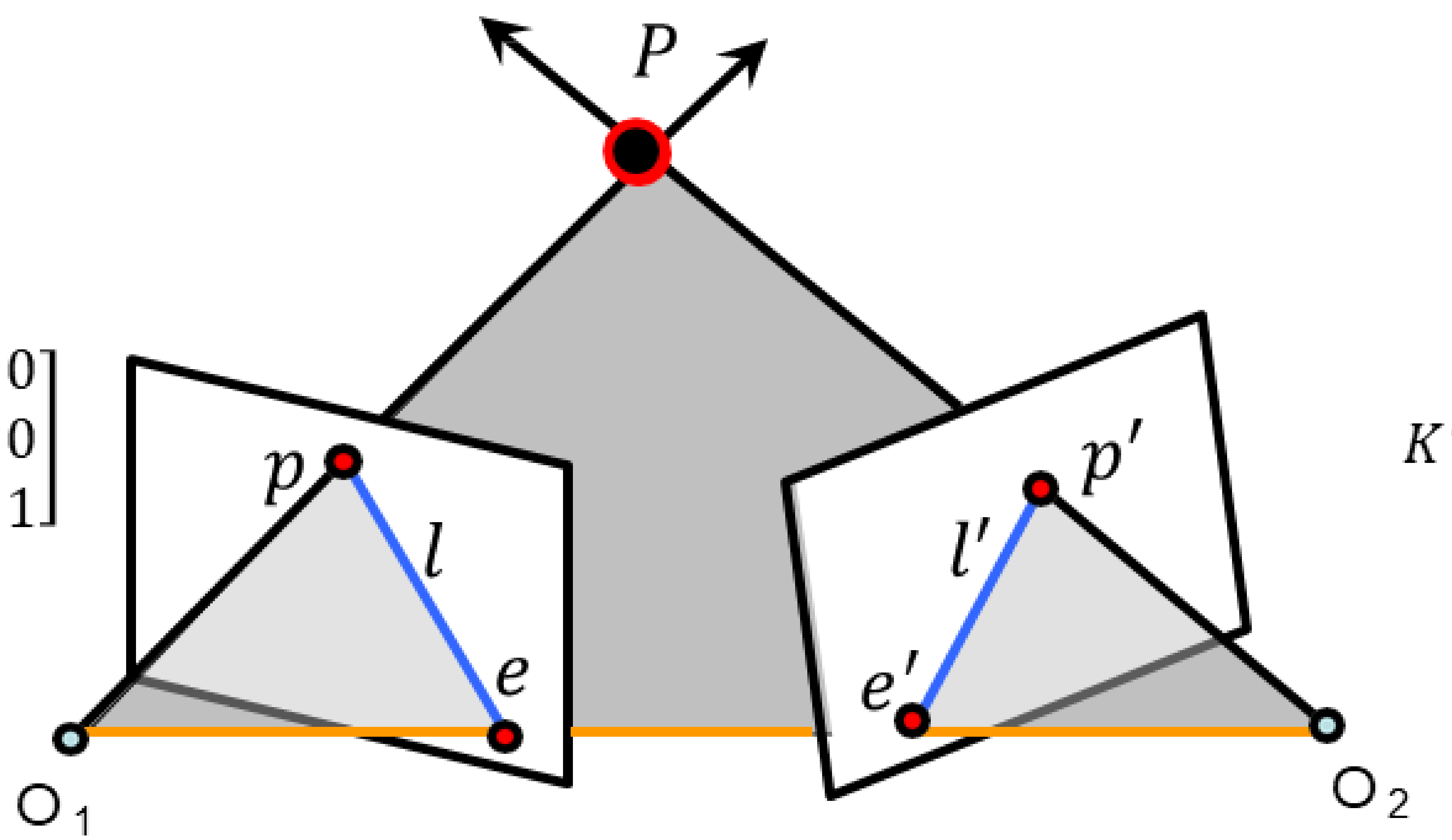
$$\boxed{p'^T E p = 0}$$

极几何约束-本质矩阵



$$\boxed{p'^T E p = 0}$$

极几何约束-本质矩阵



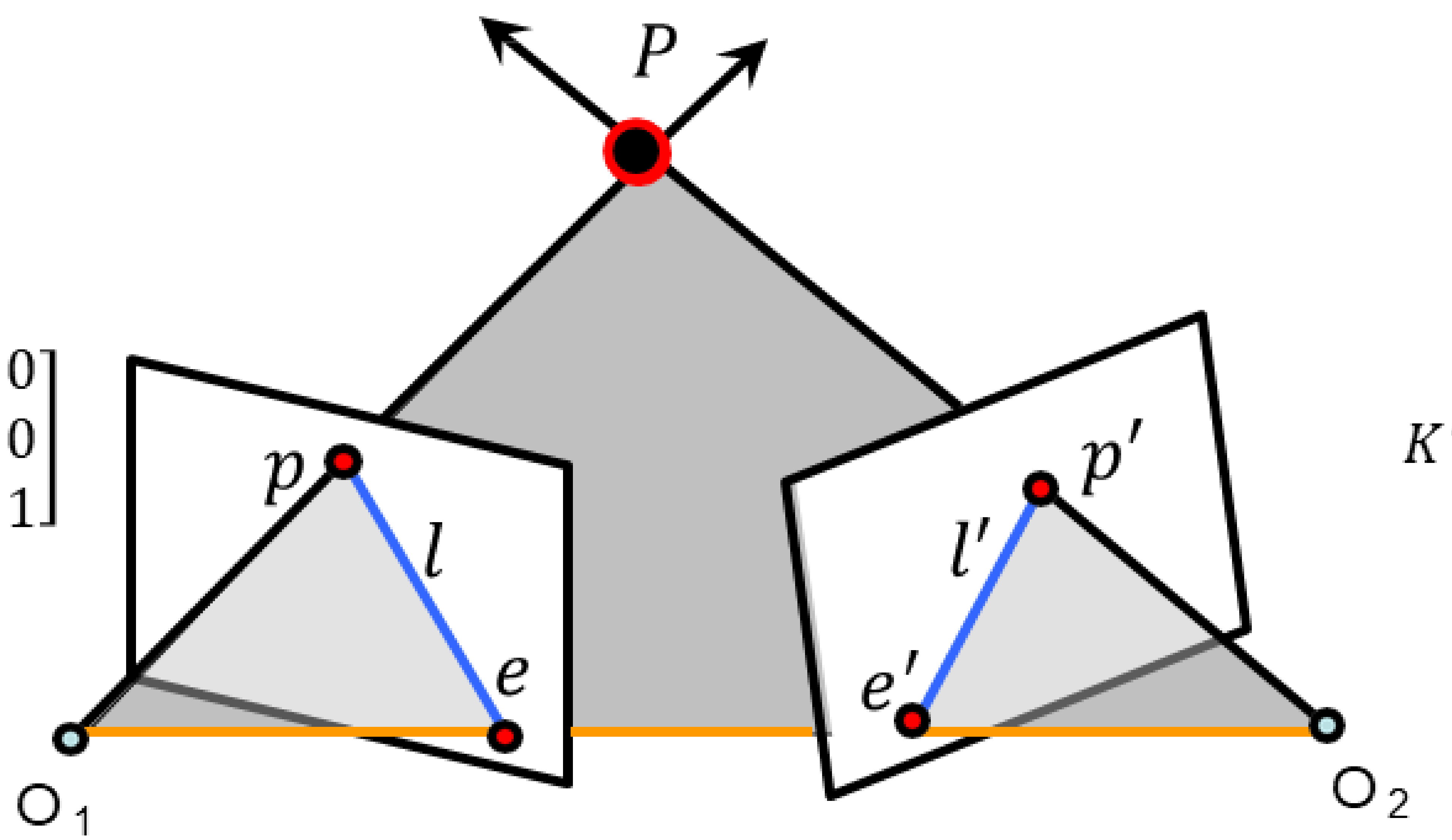
$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- p 对应的极线是 l'（$l' = Ep$）
- p'对应的极线是 l（$l = E^T p'$）

$$\boxed{p'^T E p = 0}$$

极几何约束-本质矩阵



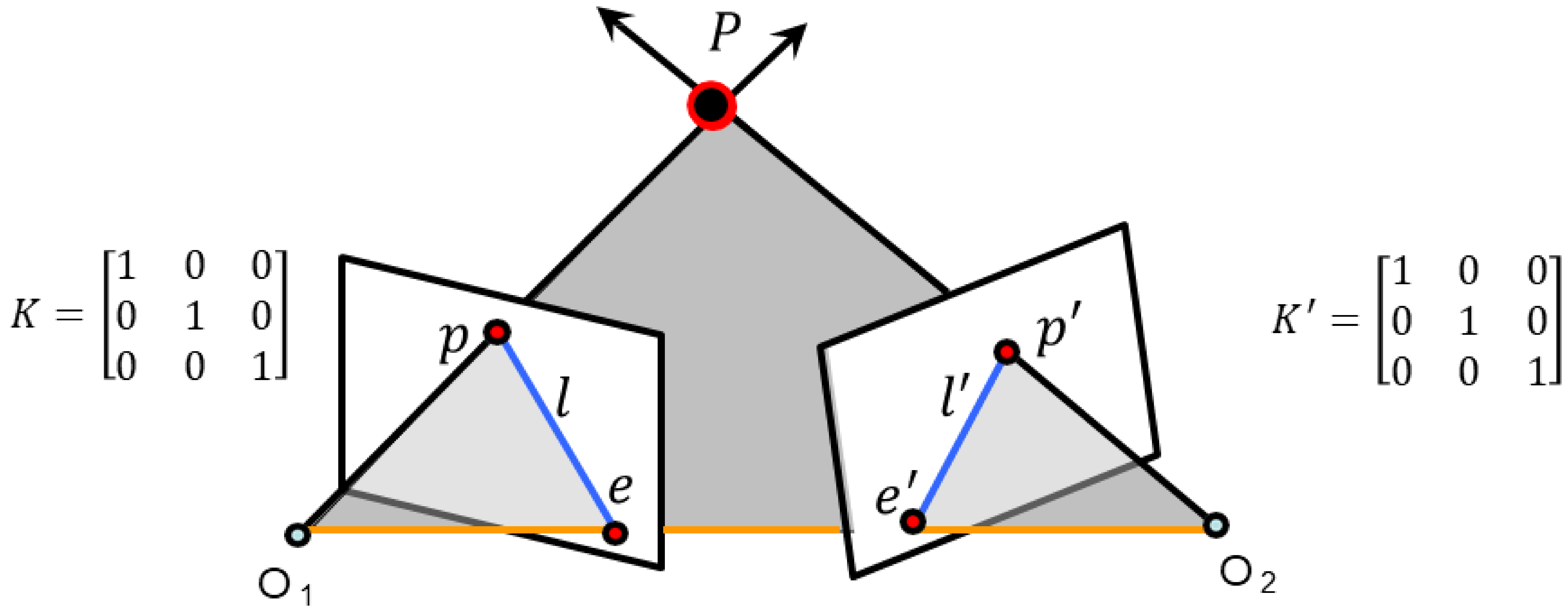
$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- p 对应的极线是 l'（$l' = Ep$）
- p'对应的极线是 l（$l = E^T p'$）
- $Ee = 0$ 与 $E^T e' = 0$

$$\boxed{p'^T E p = 0}$$

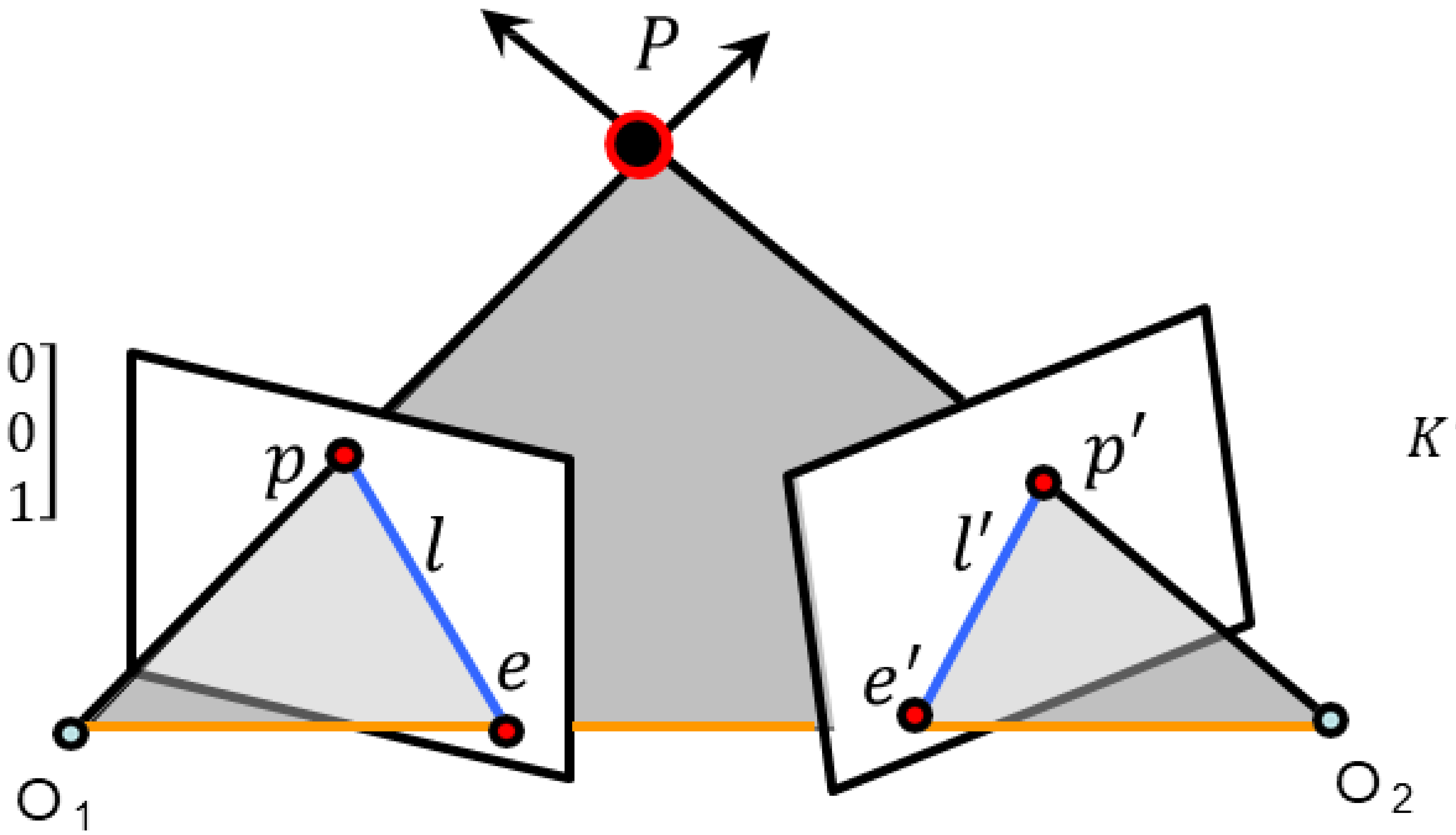
极几何约束-本质矩阵



- p 对应的极线是 l'（$l' = Ep$）
- p'对应的极线是 l（$l = E^T p'$）
- $Ee = 0$ 与 $E^T e' = 0$
- E 是奇异的(秩2)

$$\boxed{p'^T E p = 0}$$

极几何约束-本质矩阵



$$K=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$K'=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

- p 对应的极线是 l'（$l'=Ep$）
- p'对应的极线是 l（$l=E^Tp'$）
- $Ee=0$ 与 $E^Te'=0$
- E 是奇异的(秩2)
- E 5个自由度 （三个旋转+三个平移, $\det(E)=0$去掉一个自由度）

$$\boxed{p'^TEp=0}$$

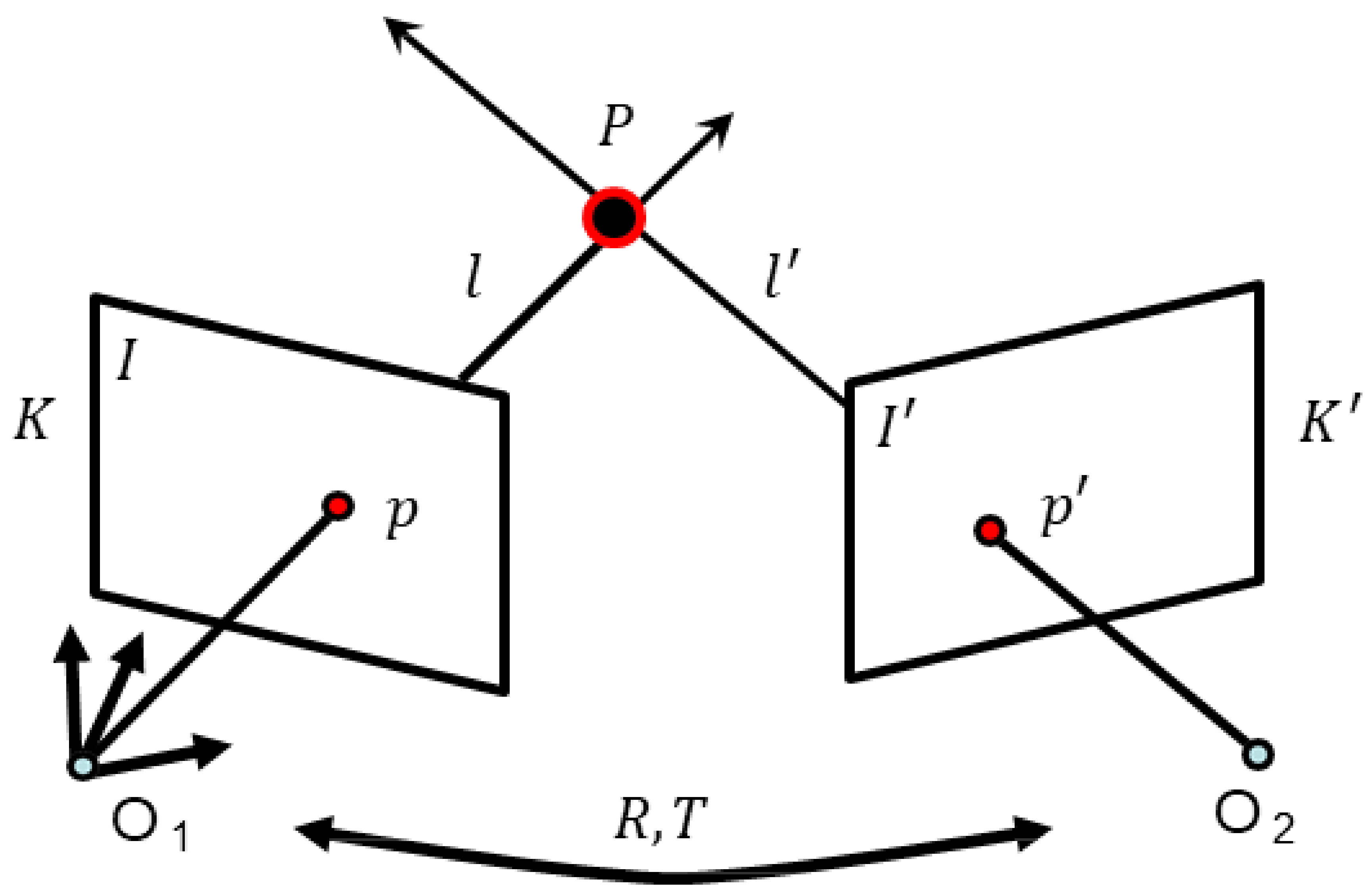
什么是基础矩阵？

- 基础矩阵对一般的透视摄像机拍摄的两个视点的图像间的极几何关系进行代数描述。

多视图几何的第三个关键问题

- **对应关系：**已知一个图像中的 p 点，如何在另外一个图像中找到 p' 点

极几何约束——基础矩阵

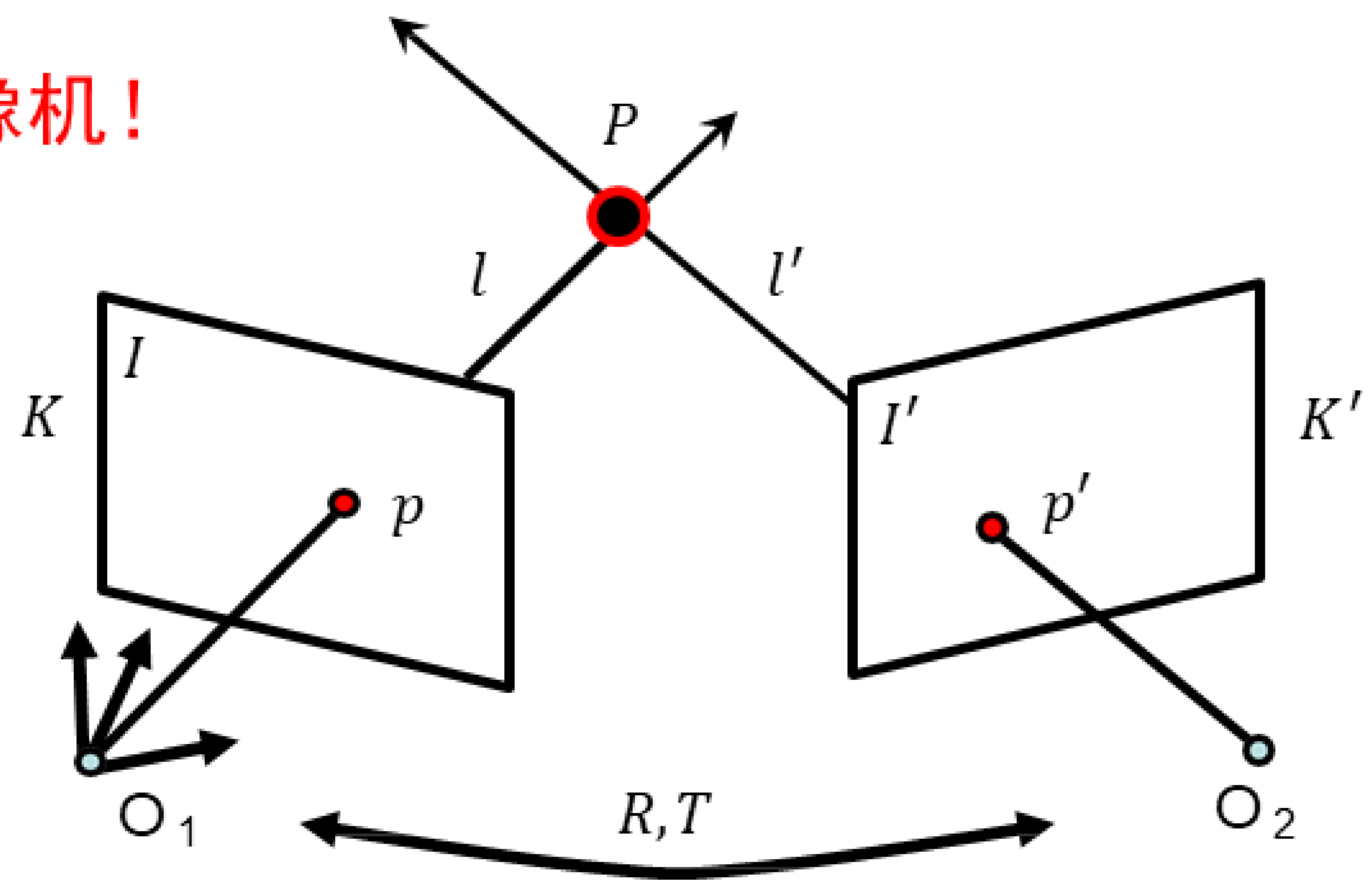


图像 I 上的点 p 像素坐标为 (u,v)

图像 I' 上的点 p' 像素坐标为 (u',v')

极几何约束——基础矩阵

思路：变换到规范化摄像机！

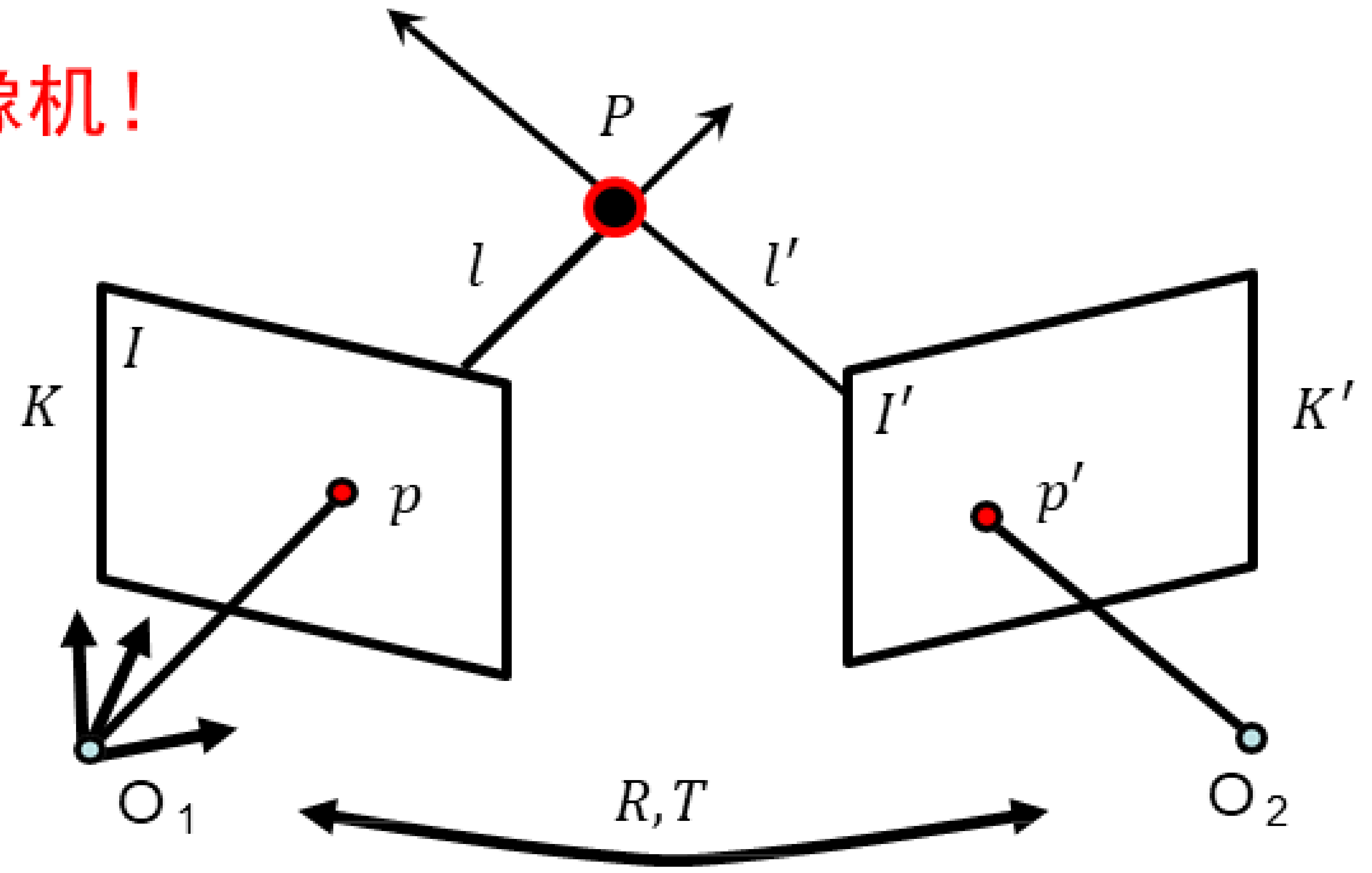


图像 I 上的点 p 像素坐标为 (u,v)

图像 I' 上的点 p' 像素坐标为 (u',v')

极几何约束——基础矩阵

思路：变换到规范化摄像机！

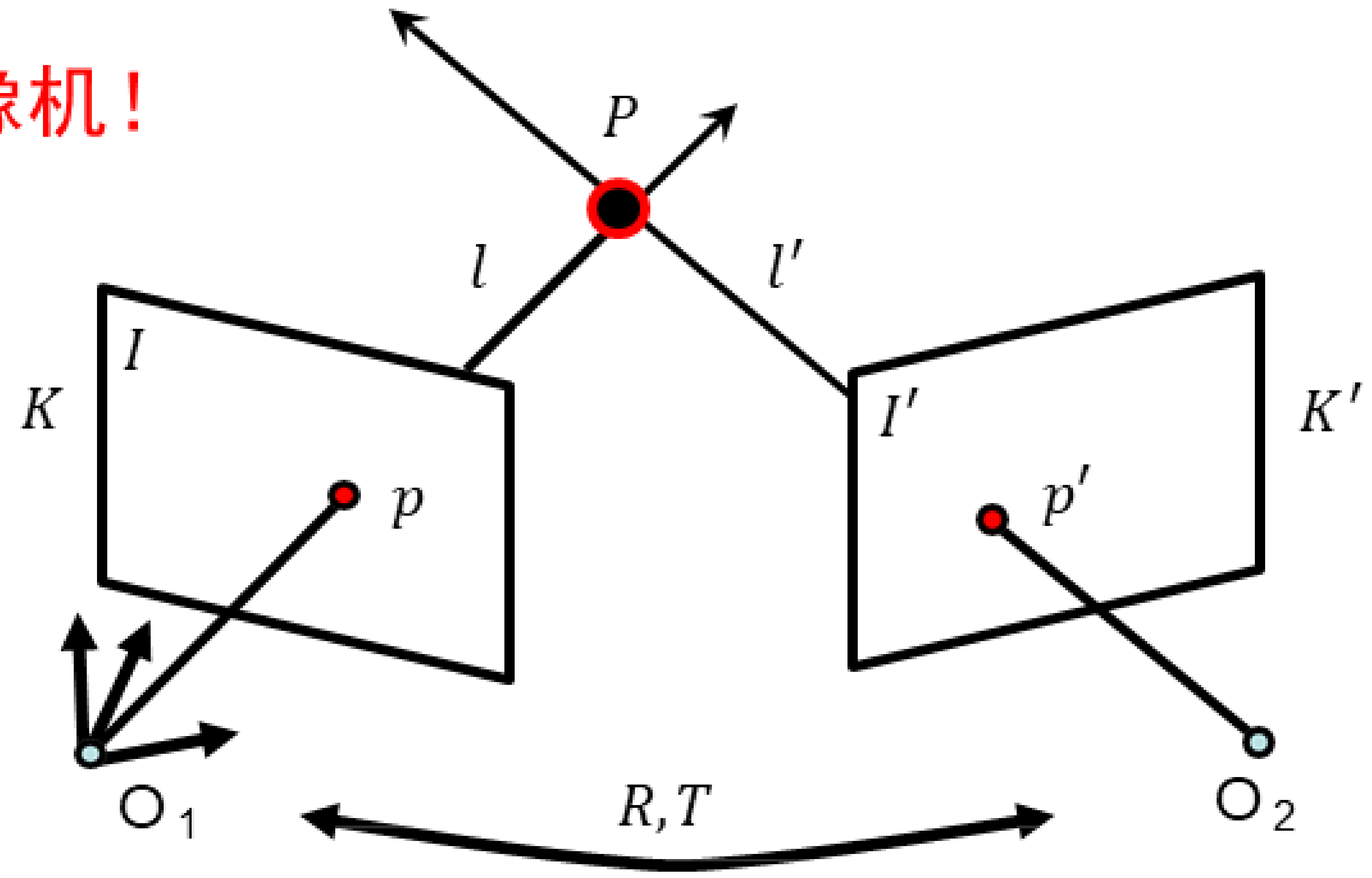


图像 I 上的点 p 像素坐标为 (u,v)　　图像 I' 上的点 p' 像素坐标为 (u',v')

$$p = K[I\ 0]P \qquad K^{-1}p = K^{-1}K[I\ 0]P = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}P \qquad \boxed{p_c = K^{-1}p} \qquad p_c = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}P$$

极几何约束——基础矩阵

思路：变换到规范化摄像机！



图像 I 上的点 p 像素坐标为 (u,v)

图像 I' 上的点 p' 像素坐标为 (u',v')

$$p = K[I\ 0]P \qquad K^{-1}p = K^{-1}K[I\ 0]P = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}P$$

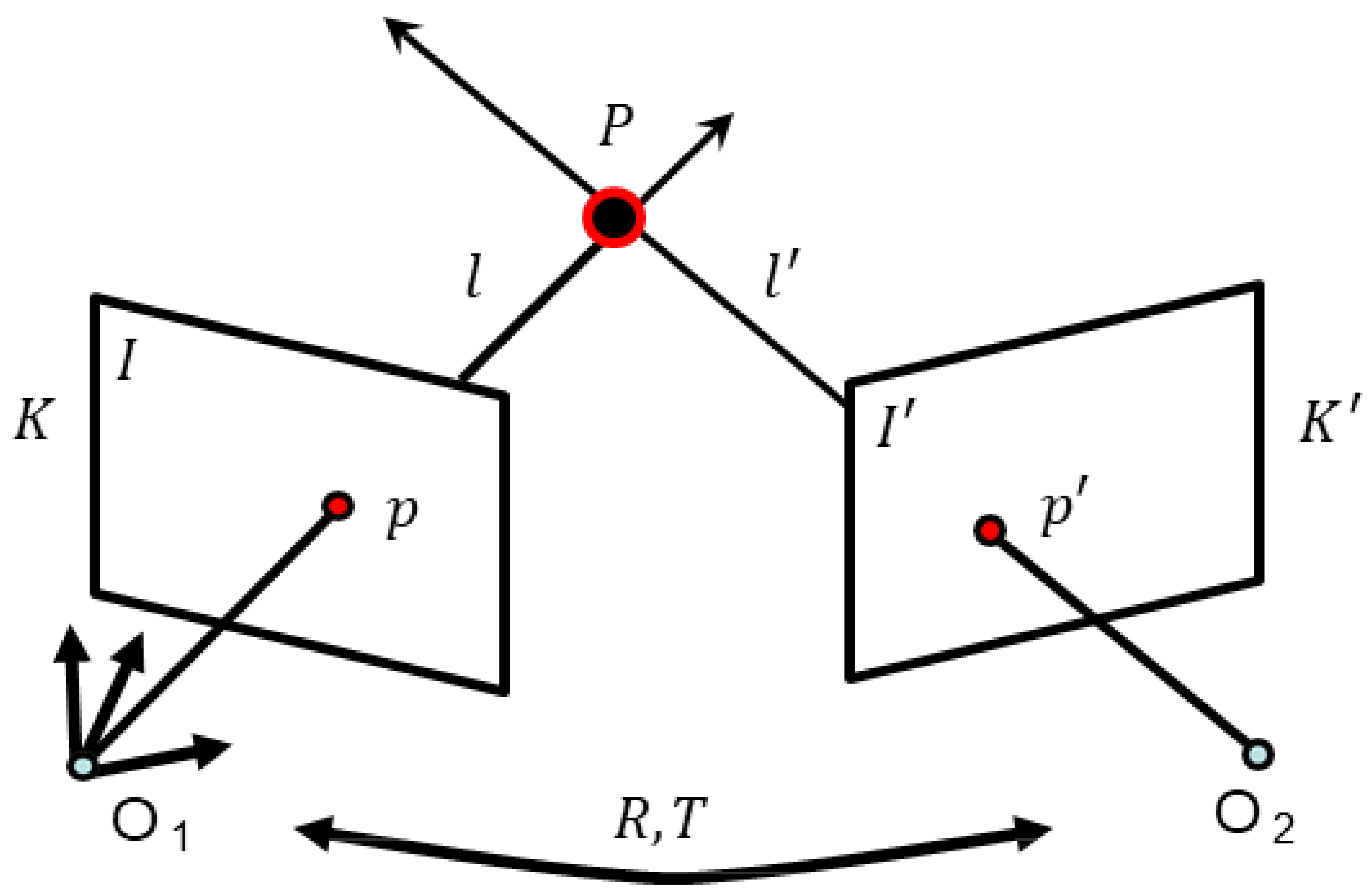
$$\boxed{p_c = K^{-1}p} \qquad p_c = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}P$$

$$\boxed{p'_c = K'^{-1}p'}$$

极几何约束——基础矩阵

$\boxed{p_c = K^{-1}p}$

$\boxed{p'_c = K'^{-1}p'}$



图像 I 上的点 p 像素坐标为 (u,v)

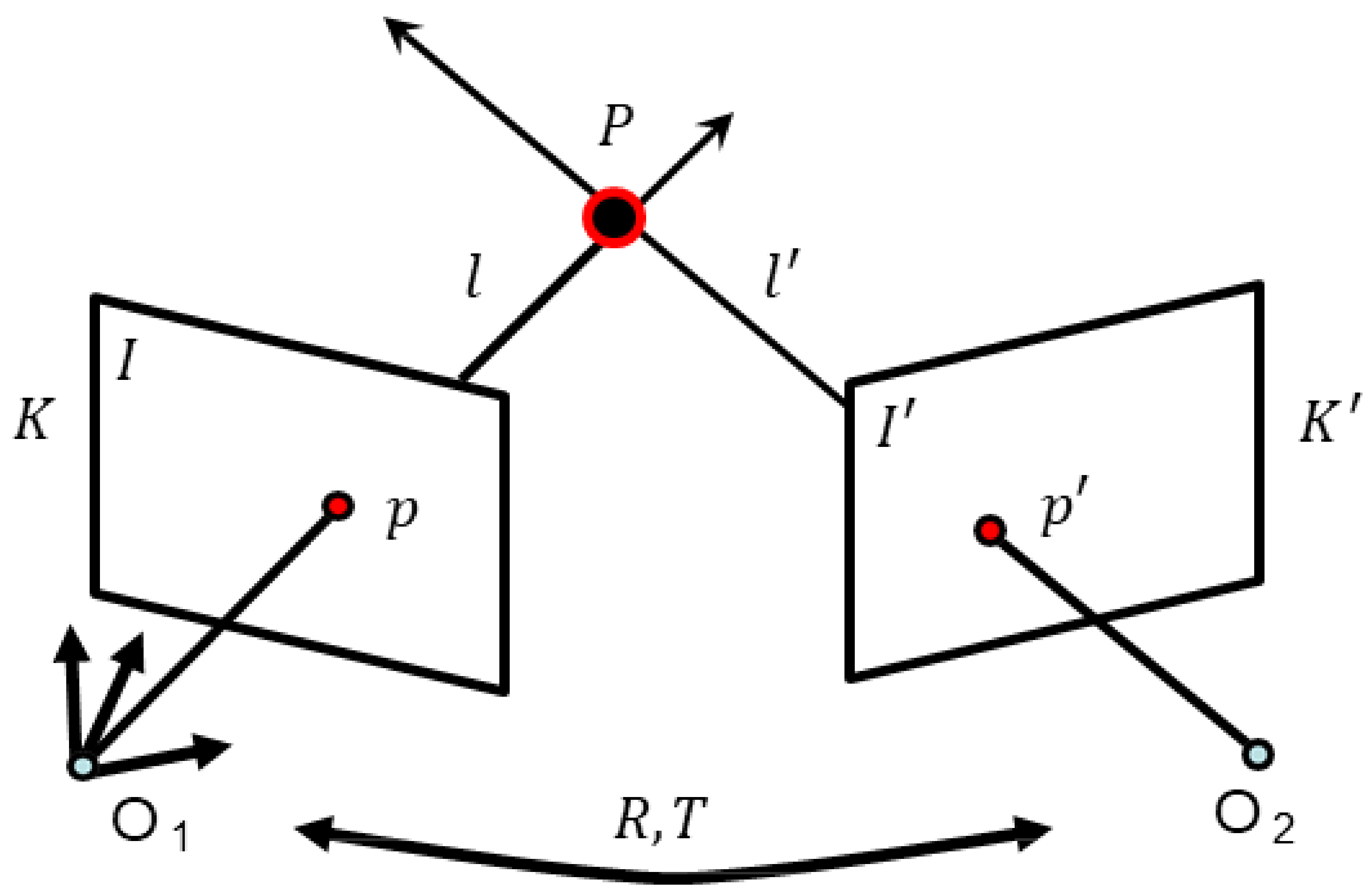
图像 I' 上的点 p' 像素坐标为 (u',v')

$$p_c'^{T}Ep_c = p_c'^{T}[T_\times]Rp_c = (K'^{-1}p')^{T}\cdot[T_\times]RK^{-1}p = p'^{T}K'^{-T}[T_\times]RK^{-1}p = 0$$

极几何约束——基础矩阵

$\boxed{p_c = K^{-1}p}$

$\boxed{p'_c = K'^{-1}p'}$



$F = K'^{-T}[T_\times]RK^{-1}$

F = 基础矩阵

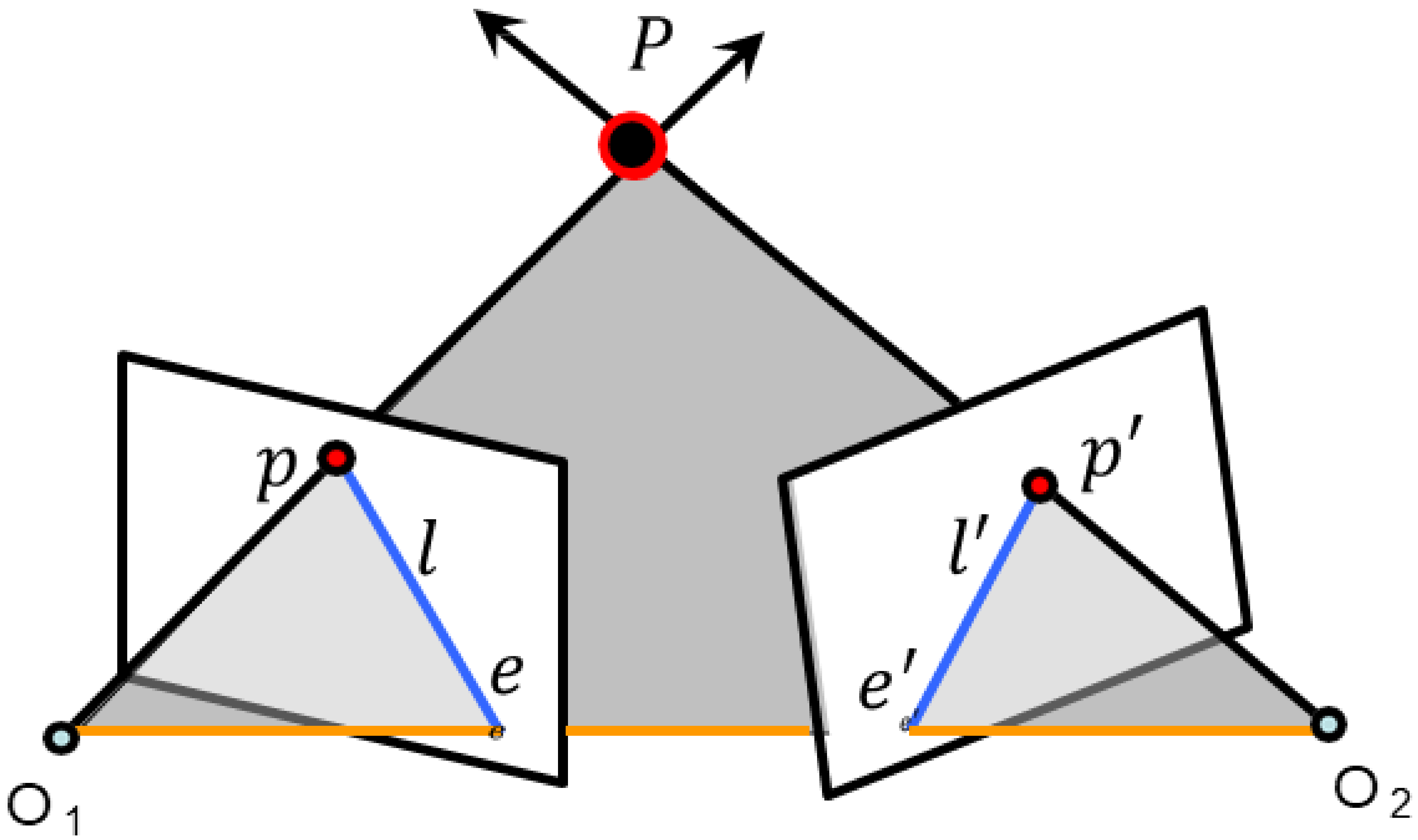
图像 I 上的点 p 像素坐标为 (u, v)

图像 I' 上的点 p' 像素坐标为 (u', v')

$$p_c'^T E p_c = p_c'^T [T_\times] R p_c = (K'^{-1}p')^T \cdot [T_\times] R K^{-1} p = p'^T K'^{-T} [T_\times] R K^{-1} p = 0$$

$$\boxed{p'^T F p = 0}$$

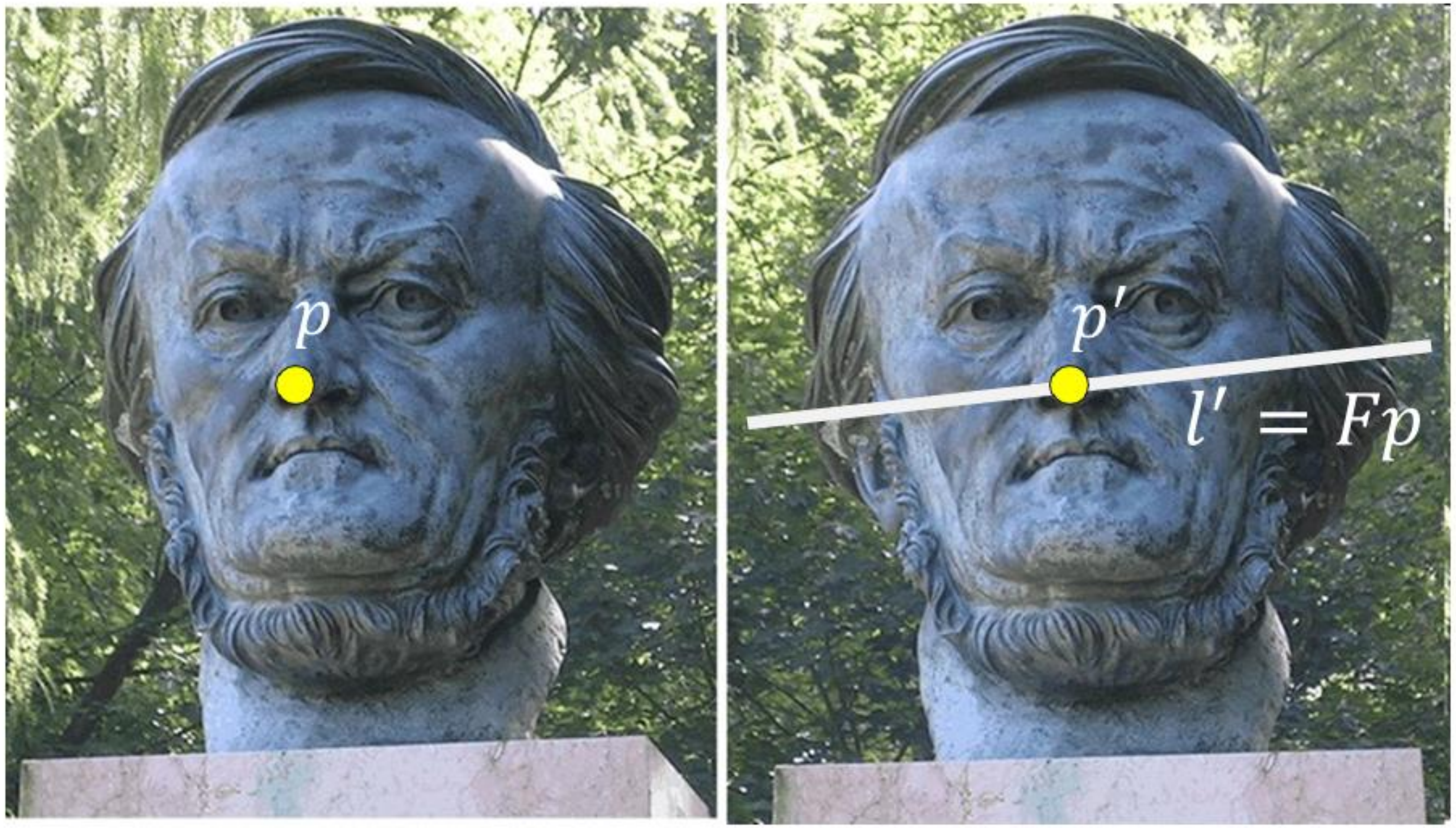
极几何约束——基础矩阵



- p 对应的极线是 l'（$l' = Fp$）
- p'对应的极线是 l（$l = F^T p'$）
- $Fe = 0$ 与 $F^T e' = 0$
- F 是奇异的(秩2)
- F 7个自由度（尺度无法确定，$\det(F) = 0$）

$$\boxed{p'^T F p = 0}$$

基础矩阵的作用



已知 F ，无需场景信息以及摄像机内、外参数，即可建立左右图像对应关系

基础矩阵小结

- F刻画了两幅图像的极几何关系，即相同场景在不同视图中的对应关系
- F包含摄像机内参数信息
- 应用：
  - 三维重构
  - 多视图匹配

4. 三维重建基础与极几何

- 三维重建基础

- 极几何(完)

- 基础矩阵估计

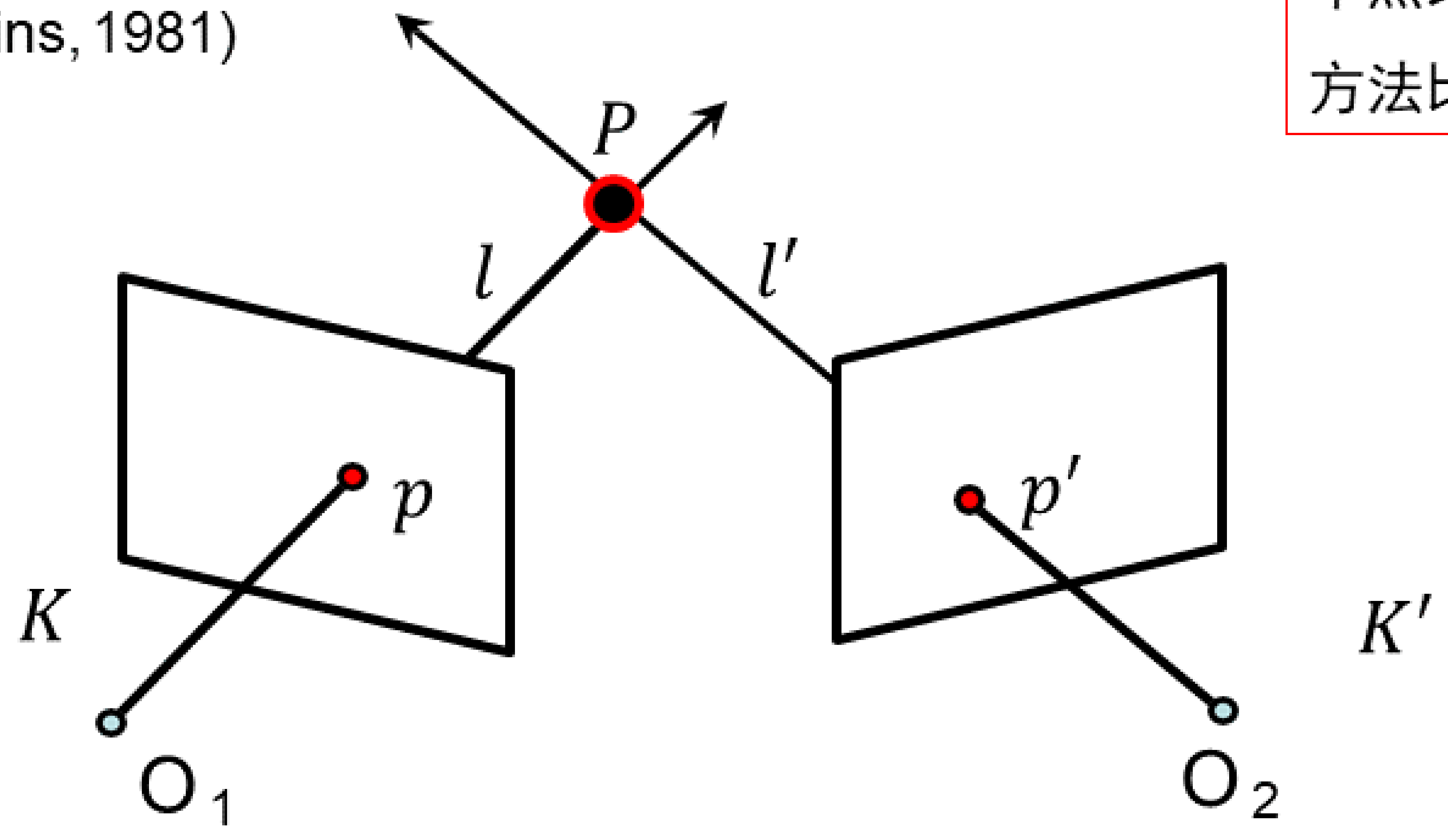
4. 三维重建基础与极几何

- 三维重建基础
- 极几何
- 基础矩阵估计

估计F

八点算法

(Longuet-Higgins, 1981)



F有7个自由度，理论上7个点即可求解F，但计算方法比较复杂。

$$p'^T F p = 0$$

估计 F

$$p'^{T}Fp = 0 \qquad p = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \quad p' = \begin{bmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{bmatrix}$$

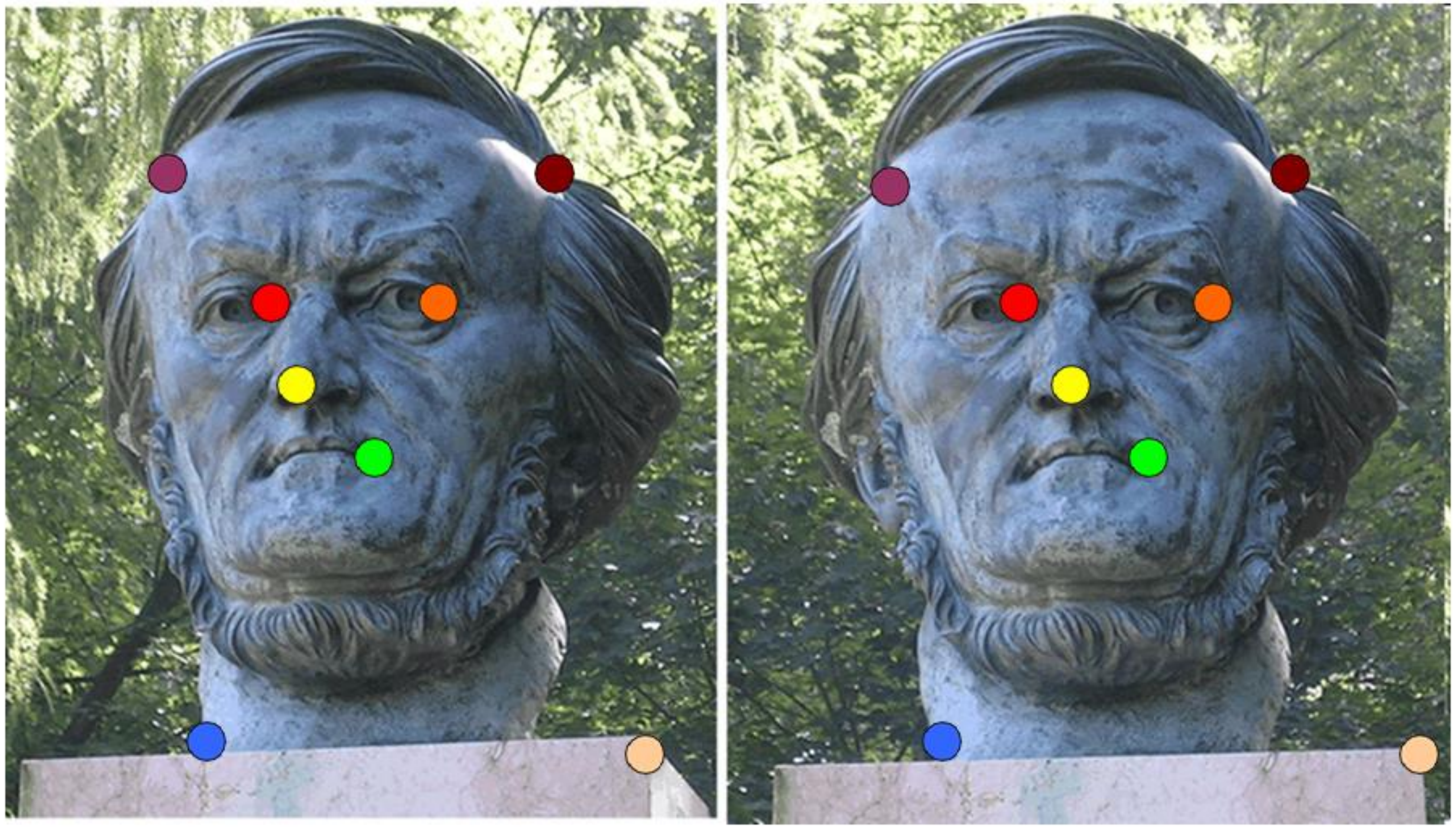
$$\Downarrow$$

$$(u', v', 1)\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (uu', vu', u', uv', vv', v', u, v, 1)\begin{pmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ F_{21} \\ F_{22} \\ F_{23} \\ F_{31} \\ F_{32} \\ F_{33} \end{pmatrix} = 0$$

选取8组对应点

估计 F



估计 F

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}
u_1u_1' & v_1u_1' & u_1' & u_1v_1' & v_1v_1' & v_1' & u_1 & v_1 & 1\\
u_2u_2' & v_2u_2' & u_2' & u_2v_2' & v_2v_2' & v_2' & u_2 & v_2 & 1\\
u_3u_3' & v_3u_3' & u_3' & u_3v_3' & v_3v_3' & v_3' & u_3 & v_3 & 1\\
u_4u_4' & v_4u_4' & u_4' & u_4v_4' & v_4v_4' & v_4' & u_4 & v_4 & 1\\
u_5u_5' & v_5u_5' & u_5' & u_5v_5' & v_5v_5' & v_5' & u_5 & v_5 & 1\\
u_6u_6' & v_6u_6' & u_6' & u_6v_6' & v_6v_6' & v_6' & u_6 & v_6 & 1\\
u_7u_7' & v_7u_7' & u_7' & u_7v_7' & v_7v_7' & v_7' & u_7 & v_7 & 1\\
u_8u_8' & v_8u_8' & u_8' & u_8v_8' & v_8v_8' & v_8' & u_8 & v_8 & 1
\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{W}}
\underbrace{\begin{bmatrix} F_{11}\\ F_{12}\\ F_{13}\\ F_{21}\\ F_{22}\\ F_{23}\\ F_{31}\\ F_{32}\\ F_{33} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{f}} = 0
$$

- 齐次系统 $\boldsymbol{W f} = \mathbf{0}$
- 秩 8 $\longrightarrow$ 存在唯一非零解
- N>8 $\longrightarrow$ $\min_{\boldsymbol{f}} \|\boldsymbol{W f}\|$ $s.t. \|\boldsymbol{f}\| = 1$ $\xrightarrow{\text{SVD}}$ $\hat{\mathrm{F}}$

最小二乘解

$\boldsymbol{f}$为$\boldsymbol{W}$矩阵最小奇异值的右奇异向量，且$\|\boldsymbol{f}\| = 1$

估计 F

问题：$\hat{F}$是不是我们要求的基础矩阵？

估计 F

问题：$\hat{F}$是不是我们要求的基础矩阵？

回答：不是，基础矩阵的秩为2，$\hat{F}$通常秩为3，即$\hat{F}$满秩

估计 F

问题：$\hat{F}$是不是我们要求的基础矩阵？

回答：不是，基础矩阵的秩为2，$\hat{F}$通常秩为3，即$\hat{F}$满秩

寻找F最小化 $\|F - \hat{F}\|_{\mathrm{F}}$ $\quad$ s.t. $\det(F) = 0$

$$SVD(\hat{F}) = U\begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}V^T \Longrightarrow F = U\begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}V^T$$

估计 F

问题：$\hat{F}$是不是我们要求的基础矩阵？

回答：不是，基础矩阵的秩为2，$\hat{F}$通常秩为3，即$\hat{F}$满秩

寻找F最小化 $\left\|F-\hat{F}\right\|_{\mathrm{F}}$ s.t. $\det(F)=0$

$$SVD(\hat{F}) = U\begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}V^T \Longrightarrow F = U\begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}V^T$$

八点算法

1. 构建 W 矩阵

2. 对 W 矩阵进行奇异值分解求 $\hat{F}$

$\boldsymbol{f}$为$\boldsymbol{W}$矩阵最小奇异值的右奇异向量，且$||\boldsymbol{f}||=1$

$$\boldsymbol{f}=\begin{pmatrix} F_{11}\\ F_{12}\\ F_{13}\\ F_{21}\\ F_{22}\\ F_{23}\\ F_{31}\\ F_{32}\\ F_{33} \end{pmatrix}$$

3. 执行秩2约束→ F

$$SVD(\hat{F})=U\begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0\\ 0 & s_2 & 0\\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}V^T \Longrightarrow F=U\begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0\\ 0 & s_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}V^T$$

八点法存在的问题

$$\min_{f} ||\boldsymbol{Wf}|| \quad s.t. \ ||\boldsymbol{f}|| = 1 \xrightarrow{\text{SVD}} \hat{\mathrm{F}}$$

$\boldsymbol{f}$为W矩阵最小奇异值的右奇异向量，且$||\boldsymbol{f}|| = 1$

精度较低！

$$\begin{bmatrix} u_1u_1' & v_1u_1' & u_1' & u_1v_1' & v_1v_1' & v_1' & u_1 & v_1 & 1 \\ u_2u_2' & v_2u_2' & u_2' & u_2v_2' & v_2v_2' & v_2' & u_2 & v_2 & 1 \\ u_3u_3' & v_3u_3' & u_3' & u_3v_3' & v_3v_3' & v_3' & u_3 & v_3 & 1 \\ u_4u_4' & v_4u_4' & u_4' & u_4v_4' & v_4v_4' & v_4' & u_4 & v_4 & 1 \\ u_5u_5' & v_5u_5' & u_5' & u_5v_5' & v_5v_5' & v_5' & u_5 & v_5 & 1 \\ u_6u_6' & v_6u_6' & u_6' & u_6v_6' & v_6v_6' & v_6' & u_6 & v_6 & 1 \\ u_7u_7' & v_7u_7' & u_7' & u_7v_7' & v_7v_7' & v_7' & u_7 & v_7 & 1 \\ u_8u_8' & v_8u_8' & u_8' & u_8v_8' & v_8v_8' & v_8' & u_8 & v_8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ F_{21} \\ F_{22} \\ F_{23} \\ F_{31} \\ F_{32} \\ F_{33} \end{bmatrix} = 0$$

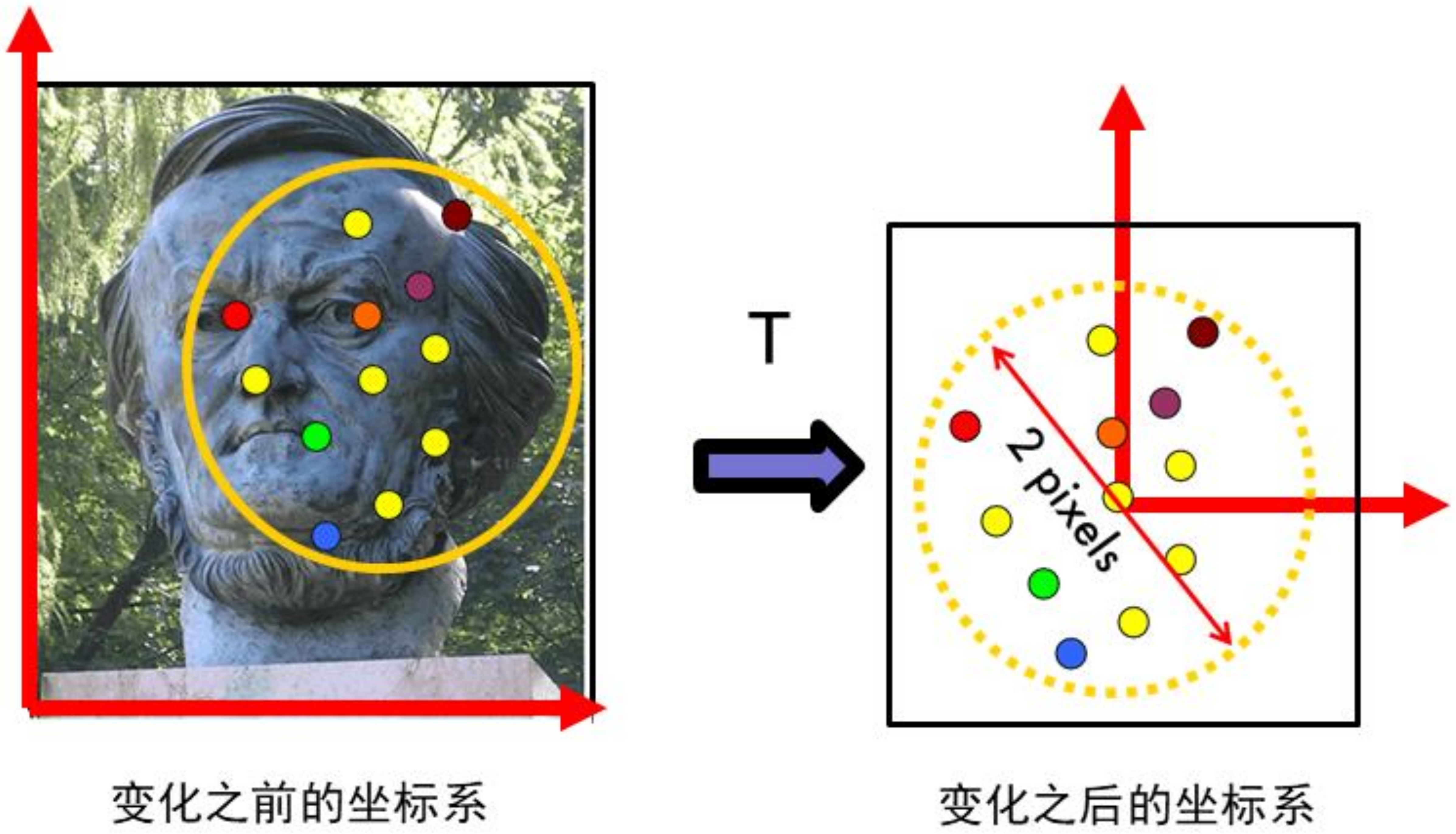
- **W** 中各个元素的数值差异过大
- SVD分解有数值计算问题

归一化八点法

对每幅图像施加变换T（平移与缩放），让其满足如下条件：

- 原点 = 图像上点的重心
- 各个像点到坐标原点的均方根距离等于$\sqrt{2}$ 。

归一化实例



- 原点 = 图像上点的重心
- 各个像点到坐标原点的均方根距离等于$\sqrt{2}$ 。

归一化八点算法

1. 分别计算左图和右图的 T 和 T'

2. 坐标归一化： $q_i = Tp_i \quad q'_i = T'p_i'$

3. 通过八点法计算矩阵F_q

4. 逆归一化 $F = T'^T F_q T$

精度高，推荐使用！

4. 三维重建基础与极几何

- 三维重建基础
- 极几何、本质矩阵与基础矩阵
- 基础矩阵估计（完）