Lecture 6

多视图几何

- 运动恢复结构问题
- 欧式结构恢复
- 仿射结构恢复
- 透视结构恢复
- 应用

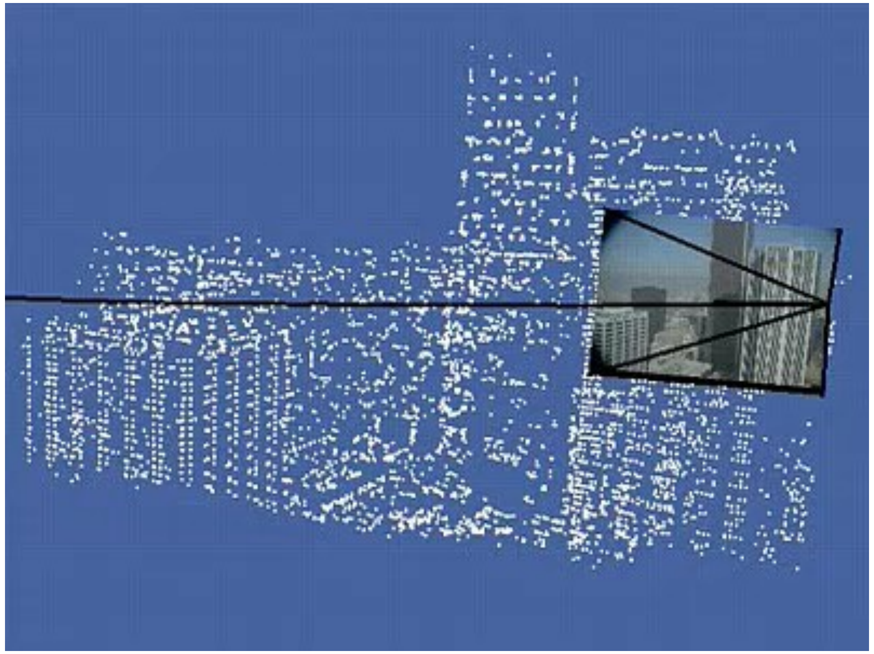
Lecture 6

多视图几何

- 运动恢复结构问题
- 欧式结构恢复
- 仿射结构恢复
- 透视结构恢复
- 应用

运动恢复结构问题

Structure from Motion (sfm)



Courtesy of Oxford **Visual Geometry Group**

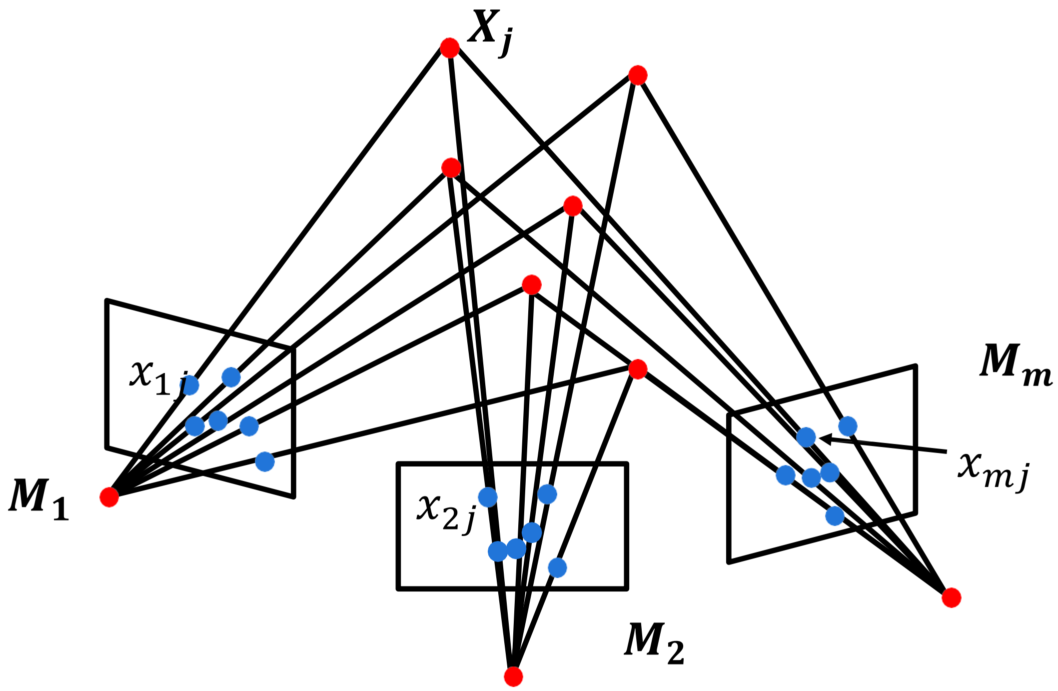
通过三维场景的多张图象，恢复出该场景的三维结构信息以及每张图片对应的摄像机参数

运动恢复结构问题

已知：n个3D点X_j在m张图像中的对应点的像素坐标 x_{ij} $(i=1,\ldots m, j=1\ldots,n)$

且 $x_{\mathrm{ij}} = M_i X_j \quad i=1,\ldots m\ ;\ j=1\ldots,n$

其中， M_i为第i张图片对应的摄像机的投影矩阵

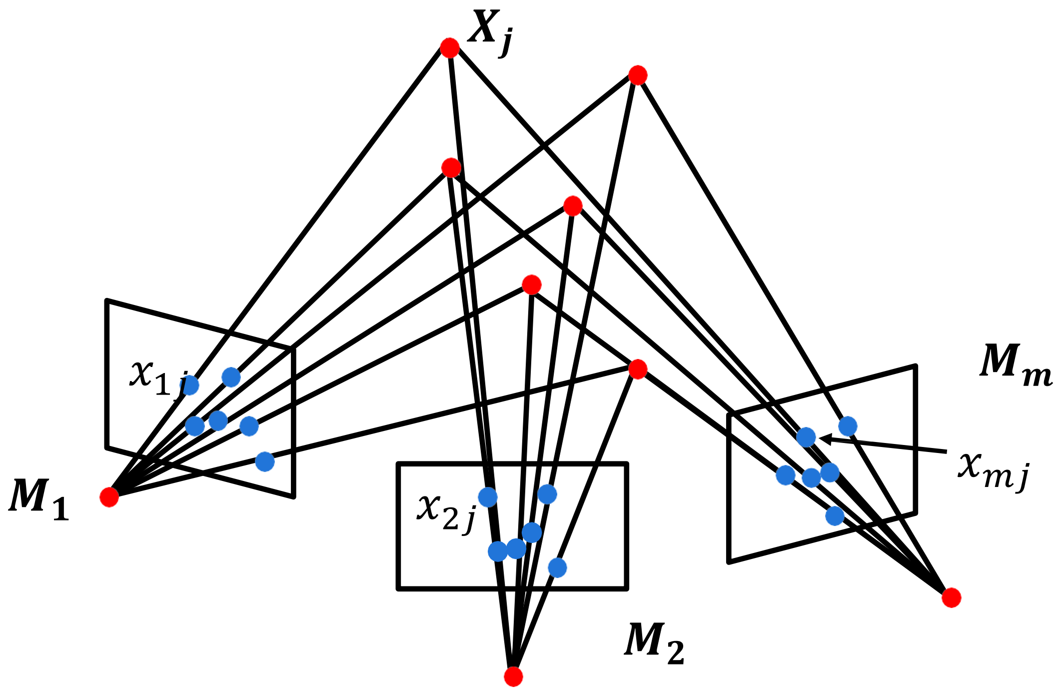


运动恢复结构问题

已知：n个3D点X_j在m张图像中的对应点的像素坐标 x_{ij} $(i=1,\dots m, j=1\dots,n)$

且 $x_{\mathrm{ij}}=M_iX_j \quad i=1,\dots m\ ;\ j=1\dots,n$

其中， M_i为第i张图片对应的摄像机的投影矩阵



求解：

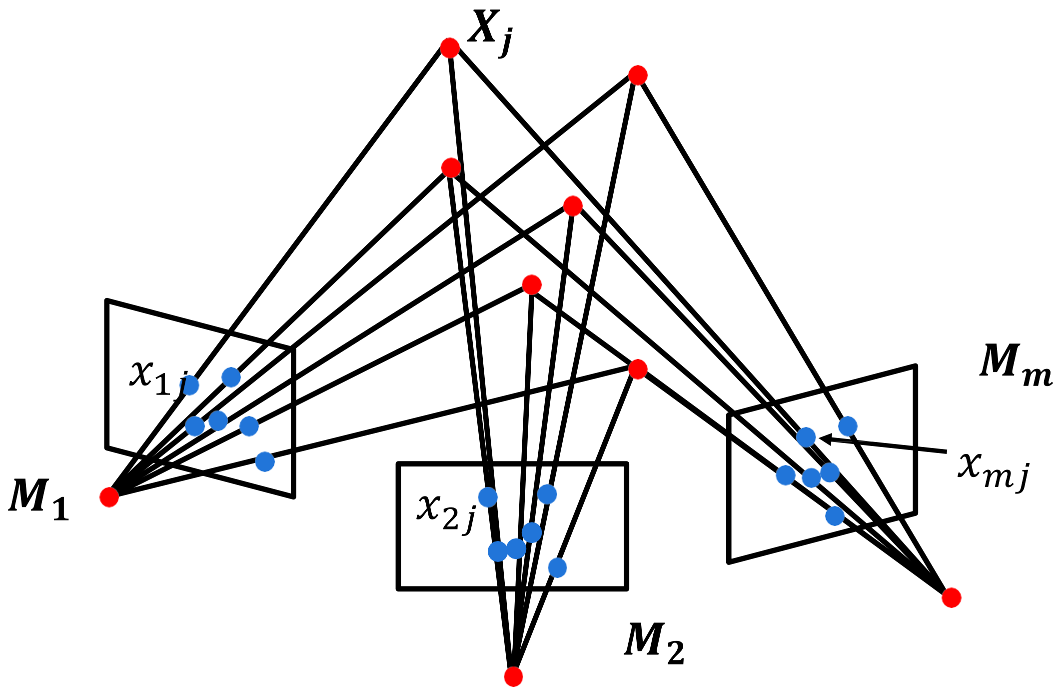
- m个摄像机投影矩阵M_i $(i=1,\cdots,m)$；
- n个三维点$X_j(j=1,\cdots,n)$的坐标。

运动恢复结构问题

已知:n个3D点X_j在m张图像中的对应点的像素坐标 x_{ij} $(i=1,\dots m, j=1\dots,n)$

且 $x_{\text{ij}} = M_i X_j \qquad i = 1, \dots m\ ;\ j = 1\dots, n$

其中， M_i为第i张图片对应的摄像机的投影矩阵



求解:

- m个摄像机投影矩阵M_i $(i=1,\cdots,m)$；

  运动（motion）

- n个三维点$X_j(j=1,\cdots,n)$的坐标。

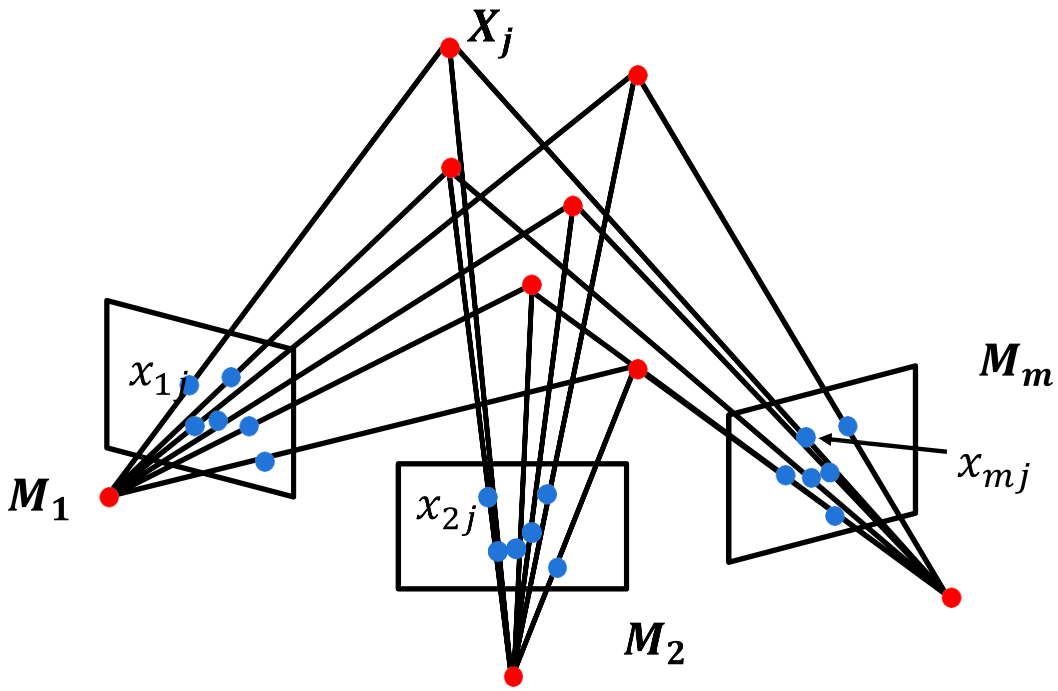
  结构（structure）

运动恢复结构问题

已知:n个3D点X_j在m张图像中的对应点的像素坐标 x_{ij} $(i=1,\dots m, j=1\dots,n)$

且 $x_{\mathrm{ij}} = M_i X_j \quad i=1,\dots m\ ;\ j=1\dots,n$

其中， M_i为第i张图片对应的摄像机的投影矩阵



求解:

- m个摄像机投影矩阵M_i $(i=1,\cdots,m)$；

  运动（motion）

- n个三维点$X_j(j=1,\cdots,n)$的坐标。

  结构（structure）

因此，该类问题也称为“运动恢复结构问题”！

三种典型的运动恢复结构任务

- 欧式结构恢复（摄像机内参数已知，外参数未知）
- 仿射结构恢复（摄像机为仿射相机，内、外参数均未知）
- 透视结构恢复（摄像机为透视相机，内、外参数均未知）

Lecture 6

多视图几何

- 运动恢复结构问题
- 欧式结构恢复
- 仿射结构恢复
- 透视结构恢复
- 应用

欧式结构恢复问题

已知:

- n个三维点X_j $(j=1,\cdots,n)$ 在m张图像中的对应点的像素坐标x_{ij}
- m张图像对应的摄像机的内参数矩阵K_i $(i=1,\cdots,m)$

且 $x_{\mathrm{ij}}=M_iX_j=K_i[R_i\ \ T_i]X_j$ $\qquad i=1,\ldots,\underbrace{\boxed{m}}_{\text{图像个数}};\ j=1\ldots,\underbrace{\boxed{n}}_{\text{3D点个数}}$

其中， M_i，K_i，$[R_i\ \ T_i]$为第i张图片对应的摄像机的投影矩阵、内参数及外参数矩阵

欧式结构恢复问题

已知：

- n个三维点X_j $(j=1,\cdots,n)$ 在m张图像中的对应点的像素坐标x_{ij}
- m张图像对应的摄像机的内参数矩阵K_i $(i=1,\cdots,m)$

且 $x_{\mathrm{ij}}=M_iX_j=K_i[R_i\ \ T_i]X_j$ $\quad i=1,\ldots\boxed{m}$; $j=1\ldots,\boxed{n}$

图像个数 3D点个数

其中， M_i， K_i， $[R_i\ \ T_i]$为第i张图片对应的摄像机的投影矩阵、内参数及外参数矩阵

求解：

- n个三维点$X_j(j=1,\cdots,n)$的坐标；
- m个摄像机的外参数 R_i 及 T_i $(i=1,\cdots,m)$

欧式结构恢复问题

已知:

- n个三维点X_j ($j=1,\cdots,n$) 在m张图像中的对应点的像素坐标x_{ij}
- m张图像对应的摄像机的内参数矩阵K_i ($i=1,\cdots,m$)

且 $x_{\mathrm{ij}}=M_iX_j=K_i[R_i\ \ T_i]X_j$ $\quad i=1,\ldots\boxed{m};\ j=1\ldots,\boxed{n}$

? ? ?

图像个数 3D点个数

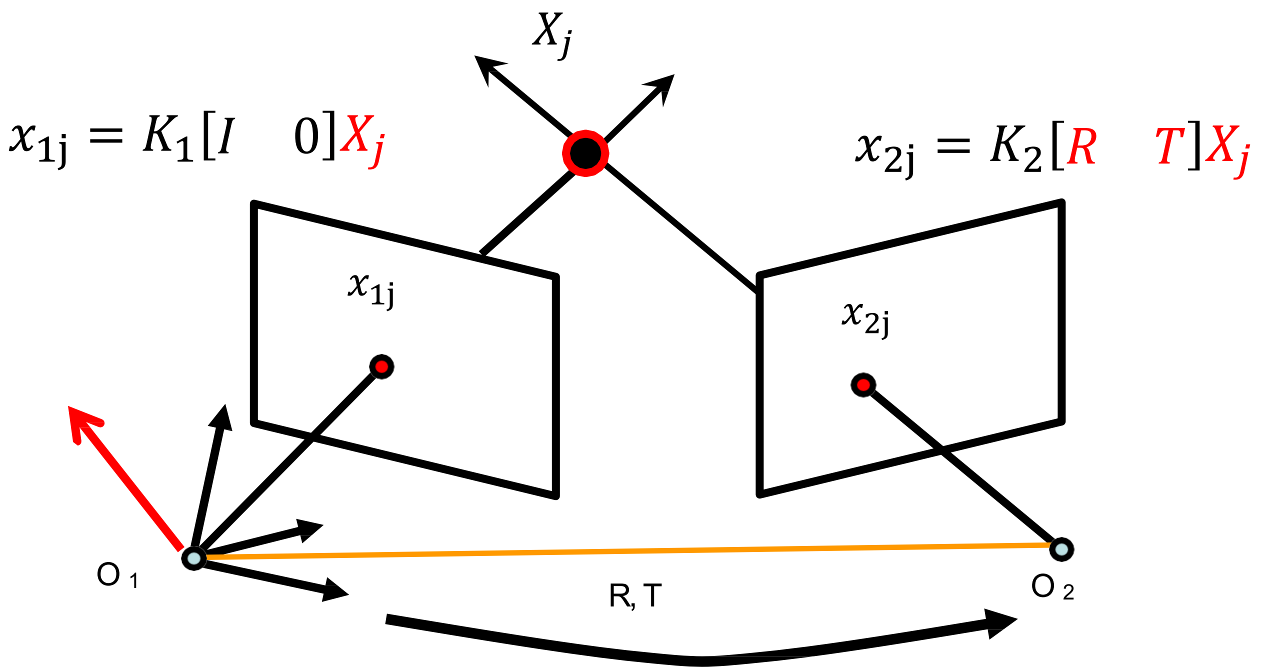
其中，M_i，K_i，$[R_i\ \ T_i]$为第i张图片对应的摄像机的投影矩阵、内参数及外参数矩阵

求解:

- n个三维点$X_j(j=1,\cdots,n)$的坐标；
- m个摄像机的外参数 R_i 及 T_i ($i=1,\cdots,m$)

欧式结构恢复问题（两视图）

欧式结构恢复问题（两视图）



欧式结构恢复问题（两视图）

问题：

$$x_{1j} = M_1 X_j = K_1 [I \quad 0] X_j$$

$$j = 1 \ldots, n$$

$$x_{2j} = M_2 X_j = K_2 [R \quad T] X_j$$

求解： 1. 求解基础矩阵F

归一化八点法

2. 利用F与摄像机内参数求解本质矩阵E

$$E = K_2^T F K_1$$

3. 分解本质矩阵获得R与T

$$E \rightarrow R、T$$

4. 三角化求解三维点X_j坐标

$$X_j^* = \underset{X_j}{\operatorname{argmin}} \left(d\left(x_{1j}, M_1 X_j\right) + d\left(x_{2j}, M_2 X_j\right) \right)$$

本质矩阵分解

$$E = [T_\times]R$$

找到一个策略把 E 因式分解为两个组成部分……

本质矩阵分解

$$E = [T_\times]R$$

找到一个策略把 E 因式分解为两个组成部分……

重要说明：

$$x_2^T F x_1 = 0 \Longrightarrow E = K_2^T F K_1$$

无法确定F的符号及尺度；

$-F$或者kF都满足上式

所以，也无法确定E的符号及尺度

本质矩阵分解

$$E = [T_\times]R$$

定义两个矩阵：

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

本质矩阵分解

$$E = [T_\times]R$$

定义两个矩阵：

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

重要性质：相差一个正负号的情况下

$$Z = \mathrm{diag}(1,1,0)W = \mathrm{diag}(1,1,0)W^T$$

本质矩阵分解

$$E = [T_\times]R$$

定义两个矩阵：

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

重要性质：相差一个正负号的情况下

$$Z = \mathrm{diag}(1,1,0)W = \mathrm{diag}(1,1,0)W^T$$

$[T_\times]$可以写成：$[T_\times] = kUZU^T$

其中，U 是单位正交矩阵。

本质矩阵分解

$$E = [T_\times]R$$

定义两个矩阵：

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

重要性质：相差一个正负号的情况下

$$Z = \mathrm{diag}(1,1,0)W = \mathrm{diag}(1,1,0)W^T$$

$[T_\times]$可以写成：$[T_\times] = kUZU^T$ $\xrightarrow[\text{尺度}]{\text{不考虑符号、}}$ $[T_\times] = UZU^T$

$$= U\mathrm{diag}(1,1,0)WU^T$$

$$= U\mathrm{diag}(1,1,0)W^TU^T$$

其中，U 是单位正交矩阵。

本质矩阵分解

$$E = [T_\times]R$$

$$[T_\times] = UZU^T$$
$$= U\mathrm{diag}(1,1,0)WU^T$$
$$= U\mathrm{diag}(1,1,0)W^TU^T$$

本质矩阵分解

$$E = [T_\times]R$$

$$[T_\times] = UZU^T$$
$$= U\text{diag}(1,1,0)WU^T$$
$$= U\text{diag}(1,1,0)W^TU^T$$

$$E = [T_\times]R = (U\text{diag}(1,1,0)WU^T)R$$

$$= U\text{diag}(1,1,0)(WU^TR)$$

本质矩阵分解

$$E = [T_{\times}]R$$

SVD分解　$E = U\mathrm{diag}(1,1,0)V^T$

本质矩阵分解

$$E = [T_\times]R$$

$$[T_\times] = UZU^T$$
$$= U\text{diag}(1,1,0)WU^T$$
$$= U\text{diag}(1,1,0)W^TU^T$$

$$E = [T_\times]R = (U\text{diag}(1,1,0)WU^T)R$$

$$= U\text{diag}(1,1,0)(WU^TR)$$

比较

SVD分解 $E = U\text{diag}(1,1,0)V^T$

本质矩阵分解

$$E = [T_{\times}]R$$

$$[T_{\times}] = UZU^T$$
$$= U\mathrm{diag}(1,1,0)WU^T$$
$$= U\mathrm{diag}(1,1,0)W^TU^T$$

$$E = [T_{\times}]R = (U\mathrm{diag}(1,1,0)WU^T)R$$
$$= U\mathrm{diag}(1,1,0)(WU^TR)$$

比较

$$V^T = WU^TR$$

SVD分解 $E = U\mathrm{diag}(1,1,0)V^T$

本质矩阵分解

$$E = [T_\times]R$$

$$[T_\times] = UZU^T$$
$$= U\mathrm{diag}(1,1,0)WU^T$$
$$= U\mathrm{diag}(1,1,0)W^TU^T$$

$$E = [T_\times]R = (U\mathrm{diag}(1,1,0)WU^T)R$$
$$= U\mathrm{diag}(1,1,0)(WU^TR)$$

比较

$$V^T = WU^TR$$

SVD分解 $E = U\mathrm{diag}(1,1,0)V^T$

$$\boxed{R = UW^TV^T}$$

本质矩阵分解

$$E = [T_\times]R$$

$$[T_\times] = UZU^T$$
$$= U\mathrm{diag}(1,1,0)WU^T$$
$$= U\mathrm{diag}(1,1,0)W^TU^T$$

$$E = [T_\times]R = (U\mathrm{diag}(1,1,0)WU^T)R$$
$$= U\mathrm{diag}(1,1,0)(WU^TR)$$

比较

SVD分解 $E = U\mathrm{diag}(1,1,0)V^T$

$$V^T = WU^TR$$

$$\boxed{R = UW^TV^T}$$

同理：

$$Z = \mathrm{diag}(1,1,0)W^T$$

$$R = UWV^T$$

本质矩阵分解

$$R = UWV^T \text{ or } UW^TV^T$$

注意: E 的这个因式分解只保证了矩阵 UWV^T 或 UW^TV^T 是正交的。其为旋转矩阵还需确保行列式的值为正：

$$R = (\det UWV^T)UWV^T \quad 或 \quad (\det UW^TV^T)UW^TV^T$$

$$T \times T = [T_\times]T = UZU^TT = 0$$

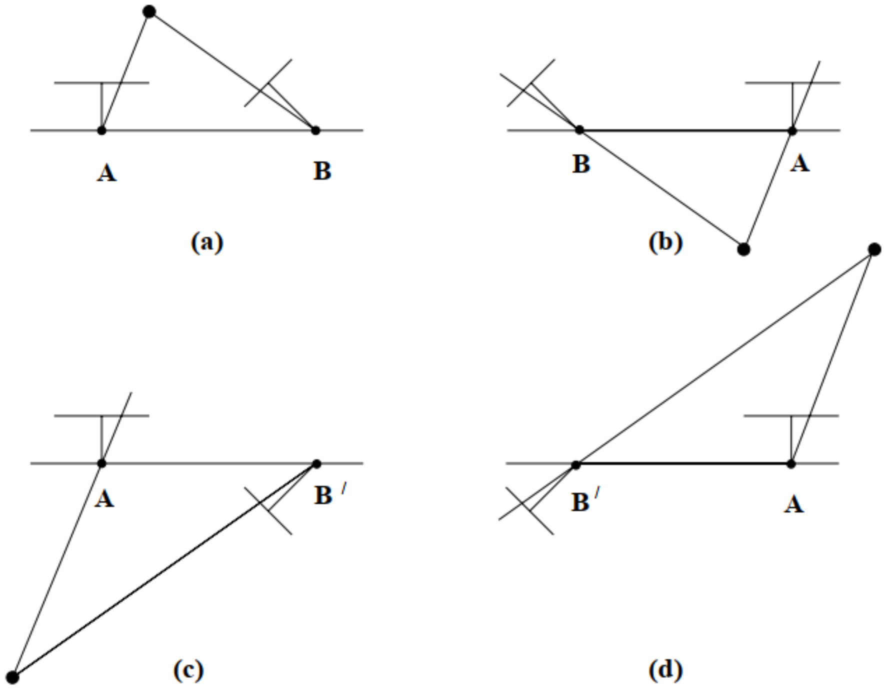
$$\Downarrow$$

$\mathrm{T} = \pm u_3$（U的第三列）

本质矩阵分解

四种潜在 R,T 对：

$$
\begin{cases}
R = (\det UWV^T)UWV^T & T = u_3 \\
R = (\det UWV^T)UWV^T & T = -u_3 \\
R = (\det UW^TV^T)UW^TV^T & T = u_3 \\
R = (\det UW^TV^T)UW^TV^T & T = -u_3
\end{cases}
$$



（图片来自于 Hartley and Zisserman 书第 260 页）

- 选择一个点三角化，正确的一组解能保证该点在两个摄像机的z坐标均为正。
- 对多个点进行三角化，选择在两个摄像机系下z坐标均为正的个数最多的那组R、T。（更鲁棒）

本质矩阵分解（总结）

$$W=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

步骤1：SVD分解 $E=U\mathrm{diag}(1,1,0)V^T$

步骤2：

$$R=(\det UWV^T)UWV^T \quad \text{或} \quad (\det UW^TV^T)UW^TV^T$$

$$\mathrm{T}=\pm u_3$$

步骤3：

$$\begin{cases} R=(\det UWV^T)UWV^T & T=u_3\\ R=(\det UWV^T)UWV^T & T=-u_3\\ R=(\det UW^TV^T)UW^TV^T & T=u_3\\ R=(\det UW^TV^T)UW^TV^T & T=-u_3\end{cases}$$

步骤4：通过重建单个或多个点找出正确解

欧式结构恢复（2视图）

问题：

$$x_{1j} = M_1 X_j = K_1 [I \quad 0] X_j$$

$$j = 1 \ldots, n$$

$$x_{2j} = M_2 X_j = K_2 [R \quad T] X_j$$

求解：1. 求解基础矩阵F

归一化八点法

2. 利用F与摄像机内参数求解本质矩阵E

$$E = K_2^T F K_1$$

3. 分解本质矩阵获得R与T

$$E \rightarrow R、T \rightarrow M_2$$

4. 三角化求解三维点X_j坐标

$$X_j^* = \underset{X_j}{\operatorname{argmin}} \left(d\left(x_{1j}, M_1 X_j\right) + d\left(x_{2j}, M_2 X_j\right) \right)$$

欧式结构恢复歧义

- 例子：仅凭下图能否估计场景的绝对尺度？

欧式结构恢复歧义

- 例子：仅凭下图能否估计场景的绝对尺度？

显然不能！

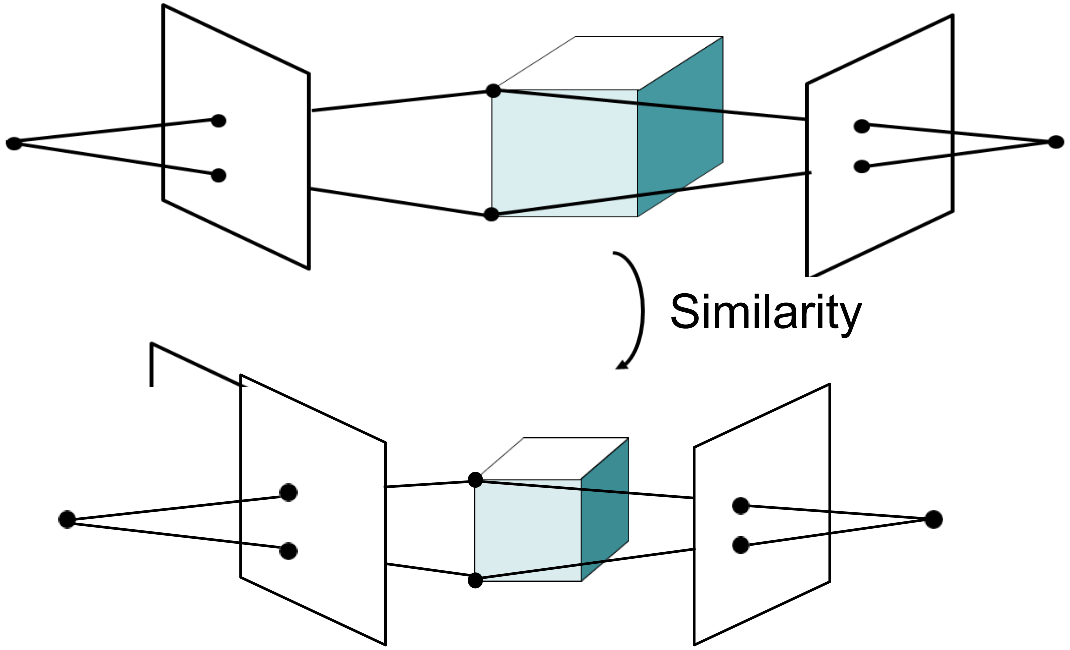
欧式结构恢复歧义

- 例子：仅凭下图能否估计场景的绝对尺度？

需要其他先验信息！

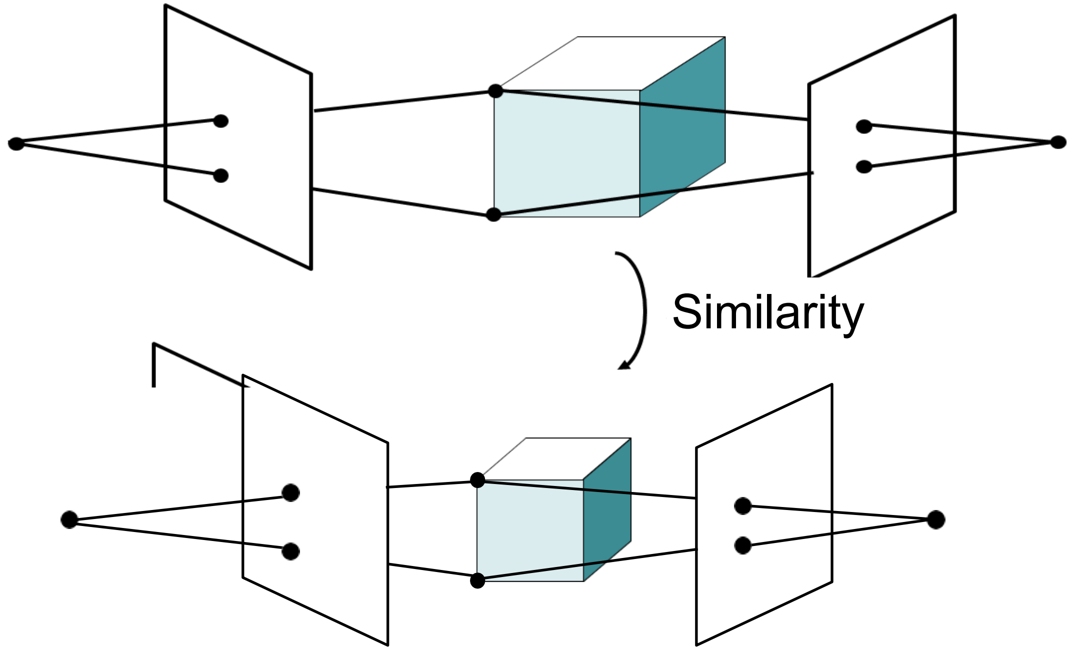
欧式结构恢复歧义

- 恢复出来的欧式结构与真实场景之间相差一个相似变换（旋转，平移，缩放）

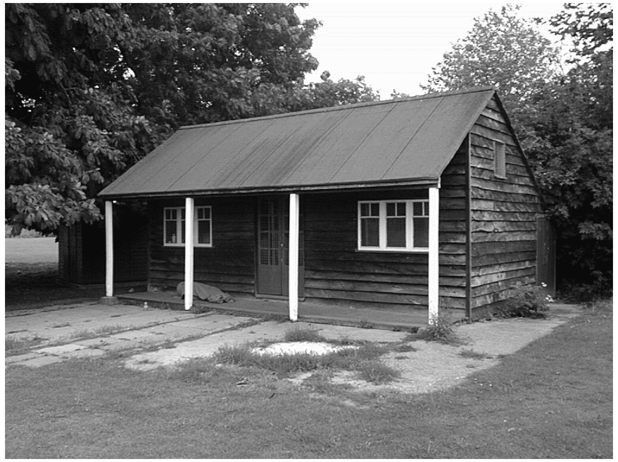


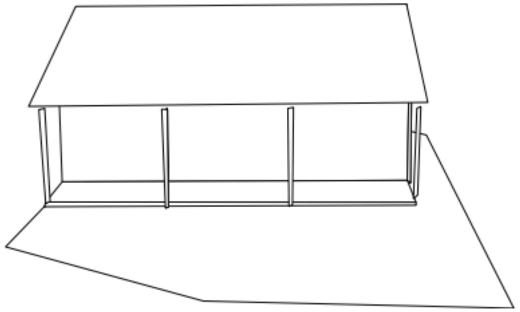
欧式结构恢复歧义

- 恢复出来的欧式结构与真实场景之间相差一个相似变换（旋转，平移，缩放）
- 恢复的场景与真实场景之间仅存在相似变换的重构称为**度量重构**



欧式结构恢复歧义



$S^* =$ 

R. Hartley and A. Zisserman, Multiple View Geometry in Computer Vision, 2nd edition, 2003

Lecture 6

多视图几何

- 运动恢复结构问题
- 欧式结构恢复
- 仿射结构恢复
- 透视结构恢复
- 应用

仿射摄像机

透视

$$x = MX = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} m_1 X \\ m_2 X \\ m_3 X \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} A & b \\ v & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$$

$$x^E = \left(\frac{m_1 X}{m_3 X}, \frac{m_2 X}{m_3 X}\right)^T$$

仿射

$$x = MX = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} X$$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{2\times3} & b_{2\times1} \\ 0_{1\times3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & m_1 & & \\ & m_2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{m_3 X = 1}$$

$$x^E = (m_1 X, m_2 X)^T = [A \;\; b]X = [\, A \;\; b \,] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = AX^E + b$$

放大率

$$\boxed{X^E = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}$$

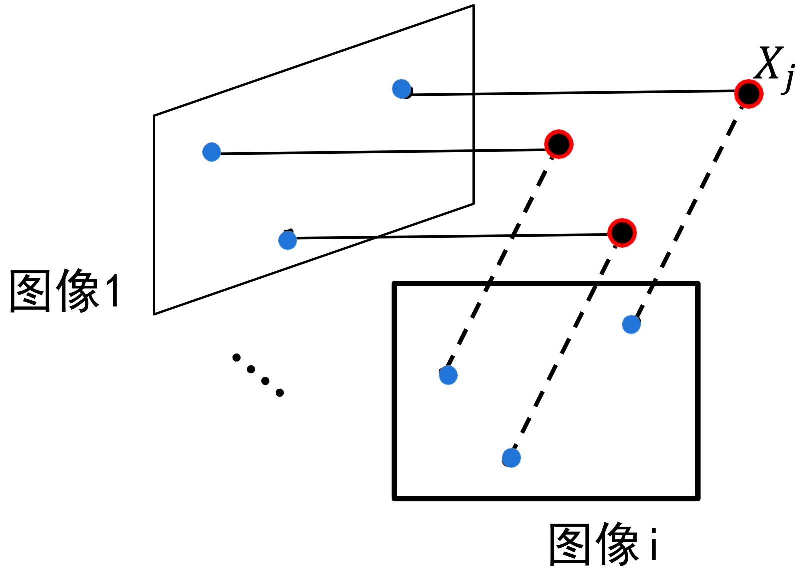
仿射结构恢复问题

问题：已知n个三维点X_j $(j = 1, \cdots, n)$ 在m张图像中的对应点的像素坐标x_{ij}

且 $x_{\mathrm{ij}} = A_i X_j + b_i$ $\quad i = 1, \ldots \boxed{m}$ ； $j = 1 \ldots, \boxed{n}$

图像个数 3D点个数

其中，A_i，b_i 组成了第i张图片对应的仿射摄像机的投影矩阵 $M_i = \begin{bmatrix} A_i & b_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



仿射结构恢复问题

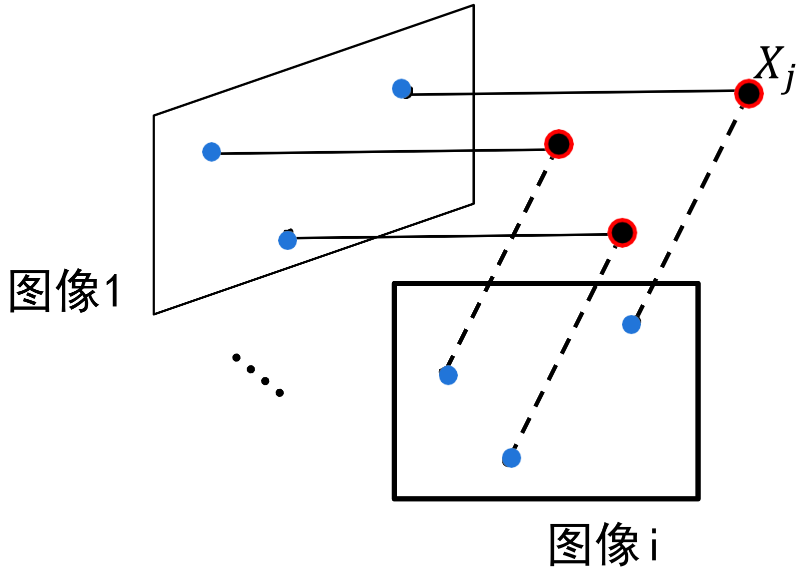
问题：公式中各个元素的维度？

问题：已知n个三维点X_j $(j = 1, \cdots, n)$ 在m张图像中的对应点的像素坐标x_{ij}

且 $x_{\mathrm{ij}} = A_i X_j + b_i$ $\quad i = 1, \ldots \boxed{m}$ ； $j = 1 \ldots, \boxed{n}$

图像个数　　3D点个数

其中，A_i，b_i 组成了第i张图片对应的仿射摄像机的投影矩阵 $M_i = \begin{bmatrix} A_i & b_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



仿射结构恢复问题

问题：已知n个三维点X_j $(j=1,\cdots,n)$ 在m张图像中的对应点的像素坐标x_{ij}

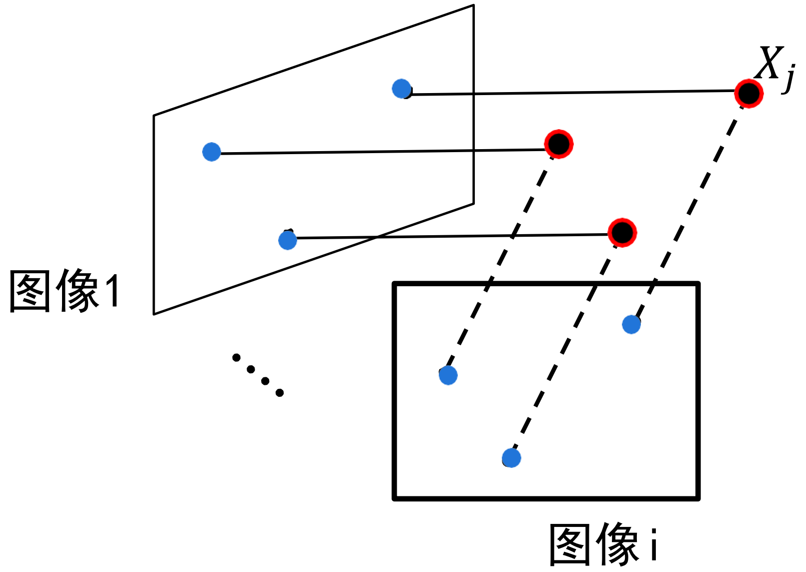
且 $x_{\mathrm{ij}} = A_i X_j + b_i \qquad i = 1, \ldots \boxed{m}\ ; \quad j = 1 \ldots, \boxed{n}$

图像个数 3D点个数

其中，A_i，b_i 组成了第i张图片对应的仿射摄像机的投影矩阵 $M_i = \begin{bmatrix} A_i & b_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

求解：

- n个三维点$X_j(j=1,\cdots,n)$的坐标
- m个仿射摄像机的投影矩阵A_i与b_i $(i=1,\cdots,m)$



仿射结构恢复问题

两种方法：

–代数方法

–因式分解法

仿射结构恢复问题

两种方法：

–代数方法

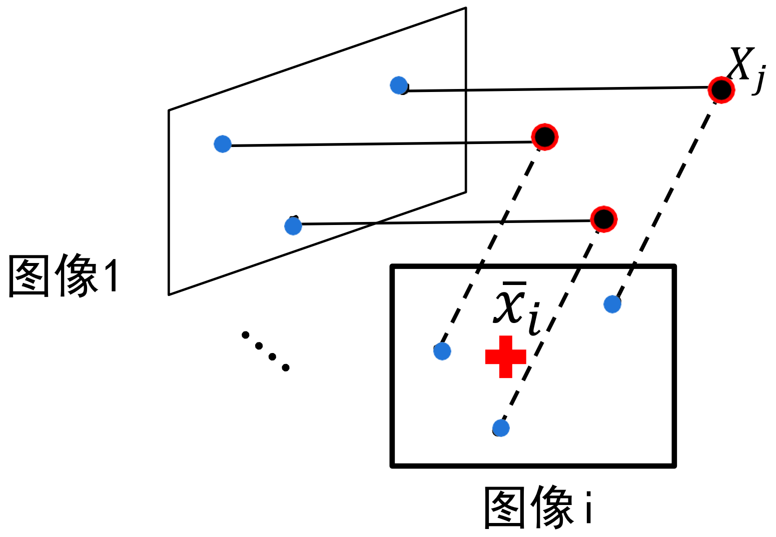
–因式分解法

- 数据中心化
- 因式分解

数据中心化

中心化：减去图像点的质心

$$\hat{x}_{ij} = x_{ij} - \bar{x}_i \qquad \bar{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik} \qquad x_{\mathrm{ij}} = A_i X_j + b_i$$

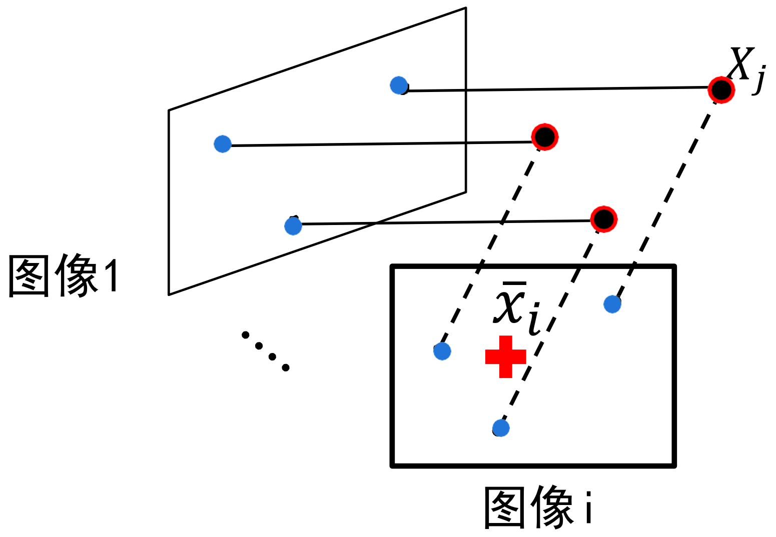


数据中心化

中心化：减去图像点的质心

$$\hat{x}_{ij} = x_{ij} - \bar{x}_i \qquad \bar{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik} \qquad x_{\mathrm{ij}} = A_i X_j + b_i$$

$$\hat{x}_{ij} = x_{ij} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik} = A_i X_j + b_i - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_i X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_i$$



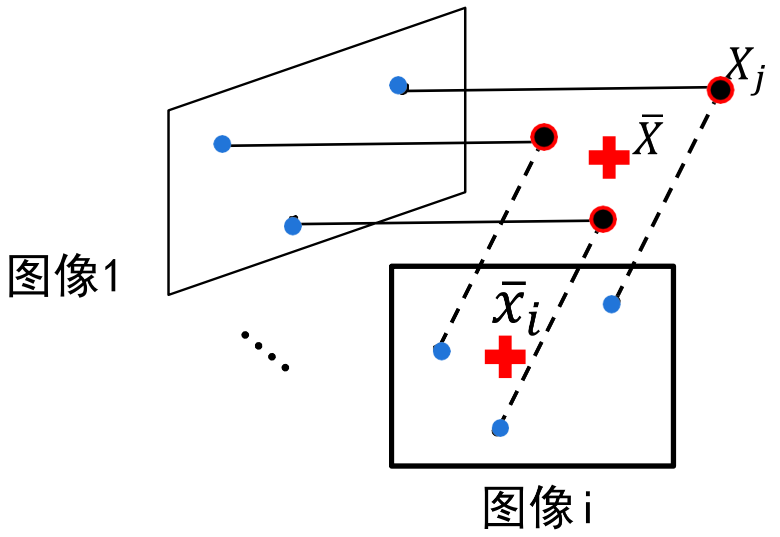
数据中心化

中心化：减去图像点的质心

$$\hat{x}_{ij} = x_{ij} - \bar{x}_i \qquad \bar{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik} \qquad x_{\mathrm{ij}} = A_i X_j + b_i$$

$$\hat{x}_{ij} = x_{ij} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik} = A_i X_j + b_i - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_i X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_i$$

$$= A_i\left(X_j - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = A_i\left(X_j - \bar{X}\right) = A_i \hat{X}_j$$

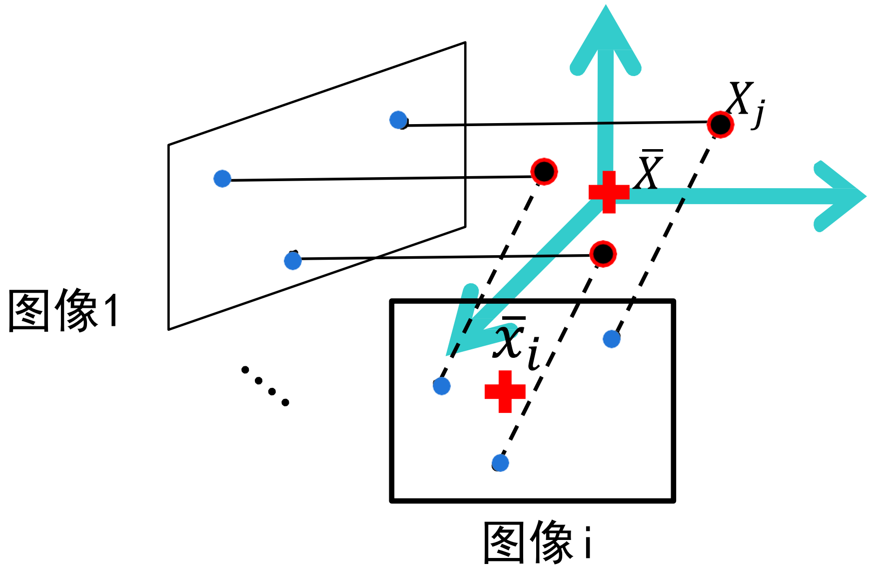


数据中心化

中心化：减去图像点的质心

$$\hat{x}_{ij} = x_{ij} - \bar{x}_i \qquad \bar{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik} \qquad x_{\mathrm{ij}} = A_i X_j + b_i$$

$$\hat{x}_{ij} = x_{ij} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik} = A_i X_j + b_i - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_i X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_i$$



$$= A_i\left(X_j - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = A_i(X_j - \bar{X}) = A_i\hat{X}_j$$

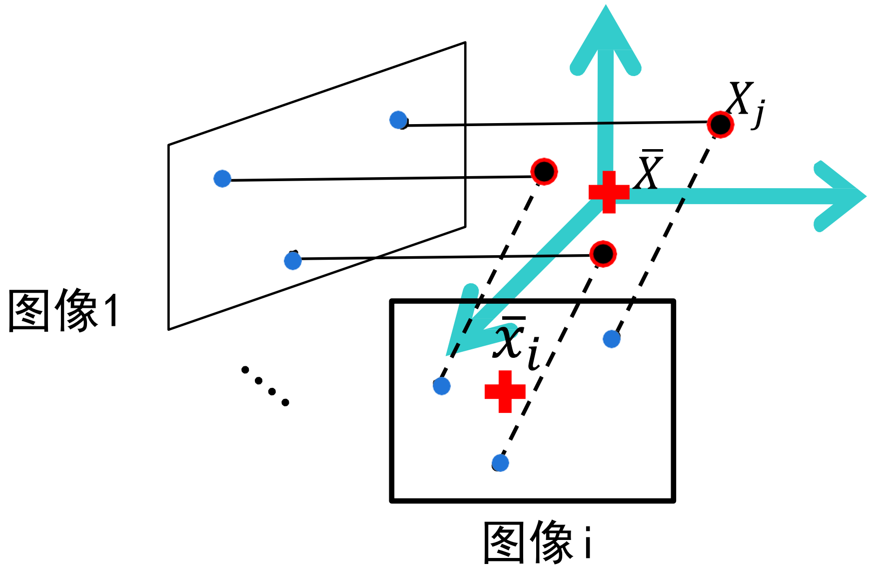
如果3D点的质心 ＝ 世界参考系中心

数据中心化

中心化：减去图像点的质心

$$\hat{x}_{ij} = x_{ij} - \bar{x}_i \qquad \bar{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik} \qquad x_{\mathrm{ij}} = A_i X_j + b_i$$

$$\hat{x}_{ij} = x_{ij} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ik} = A_i X_j + b_i - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_i X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_i$$



$$= A_i\left(X_j - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = A_i(X_j - \bar{X}) = A_i\hat{X}_j$$

$$\hat{x}_{ij} = A_i\hat{X}_j = A_i X_j$$

如果3D点的质心 ＝ 世界坐标系的中心

因式分解

把去均值以后的$m \times n$个测量值写成矩阵的形式：

$$D = \begin{bmatrix} \hat{x}_{11} & \hat{x}_{12} & \cdots & \hat{x}_{1n} \\ \hat{x}_{21} & \hat{x}_{22} & \cdots & \hat{x}_{2n} \\ & & \ddots & \\ \hat{x}_{m1} & \hat{x}_{m2} & \cdots & \hat{x}_{mn} \end{bmatrix}$$

$(2m)$

n

每个$\hat{x}_{ij}$是一个2×1向量！

因式分解

2m × n 维的数据(测量值)矩阵:

$$D = \begin{bmatrix} \hat{x}_{11} & \hat{x}_{12} & \cdots & \hat{x}_{1n} \\ \hat{x}_{21} & \hat{x}_{22} & \cdots & \hat{x}_{2n} \\ & & \ddots & \\ \hat{x}_{m1} & \hat{x}_{m2} & \cdots & \hat{x}_{mn} \end{bmatrix} = \underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}}}_{M} \overbrace{\boxed{\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{bmatrix}}}^{S}$$

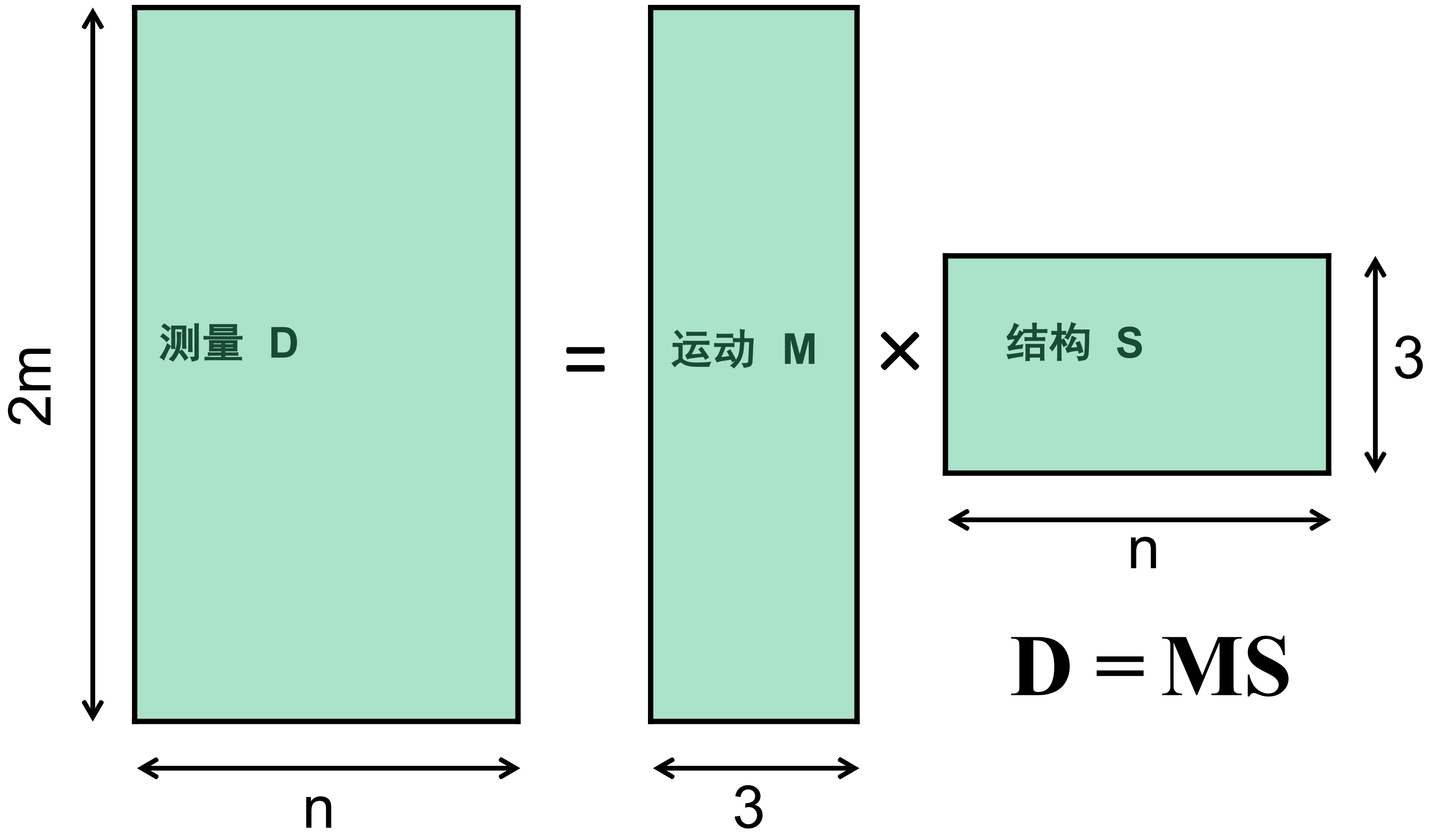
$(2m \times n)$ 摄像机 $(2m \times 3)$ 点 (3×n)

A_i 是 2×3 维，X_j是 3×1 维

测量矩阵 **D = M S** 秩为3（它是 $2m \times 3$ 矩阵和 3×n 矩阵的乘积）

因式分解

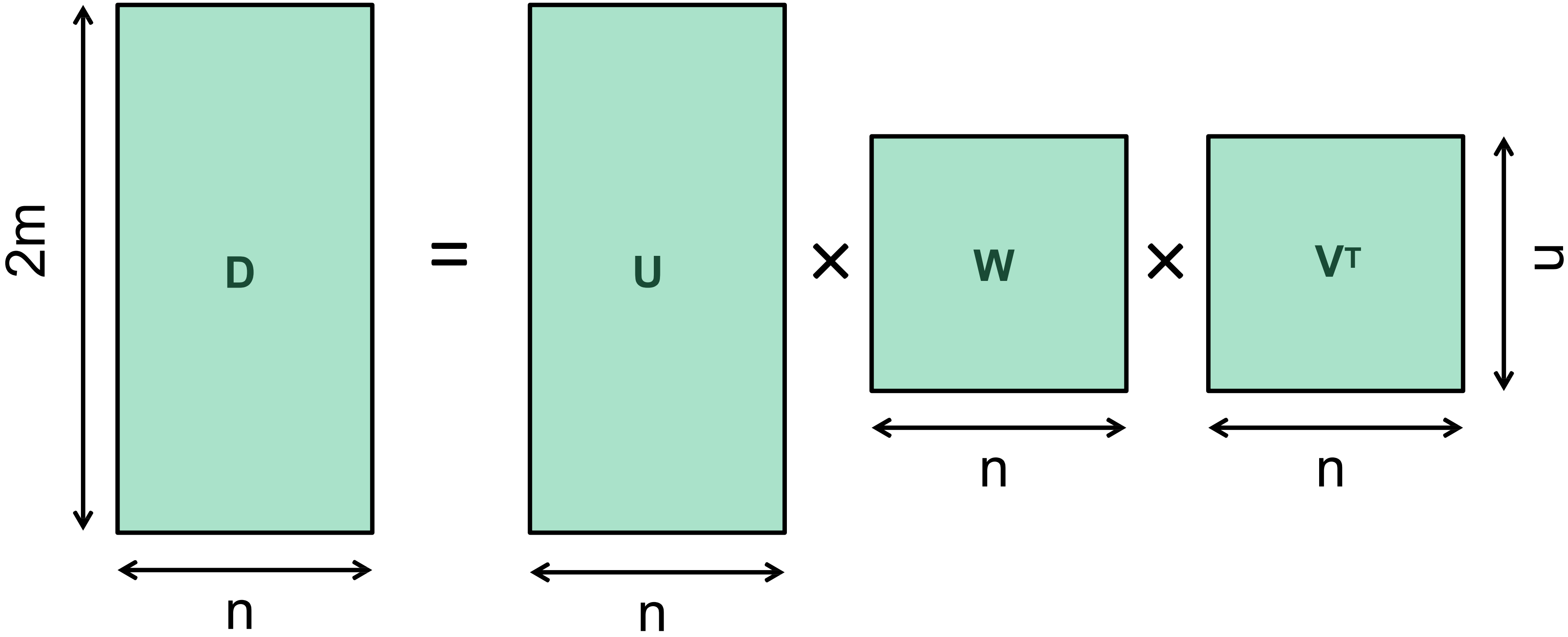
怎么分解D?



$$\mathbf{D} = \mathbf{MS}$$

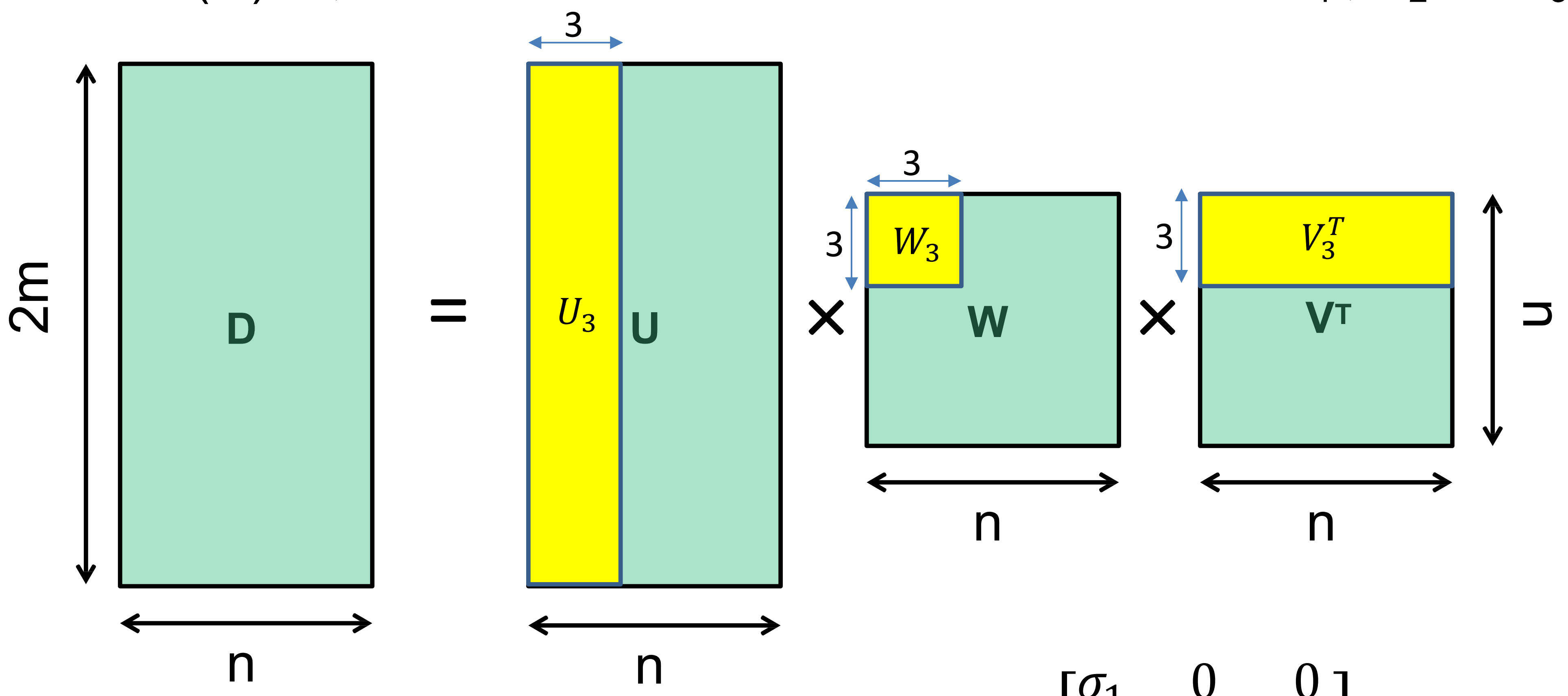
因式分解

- 通过计算D的奇异值分解！



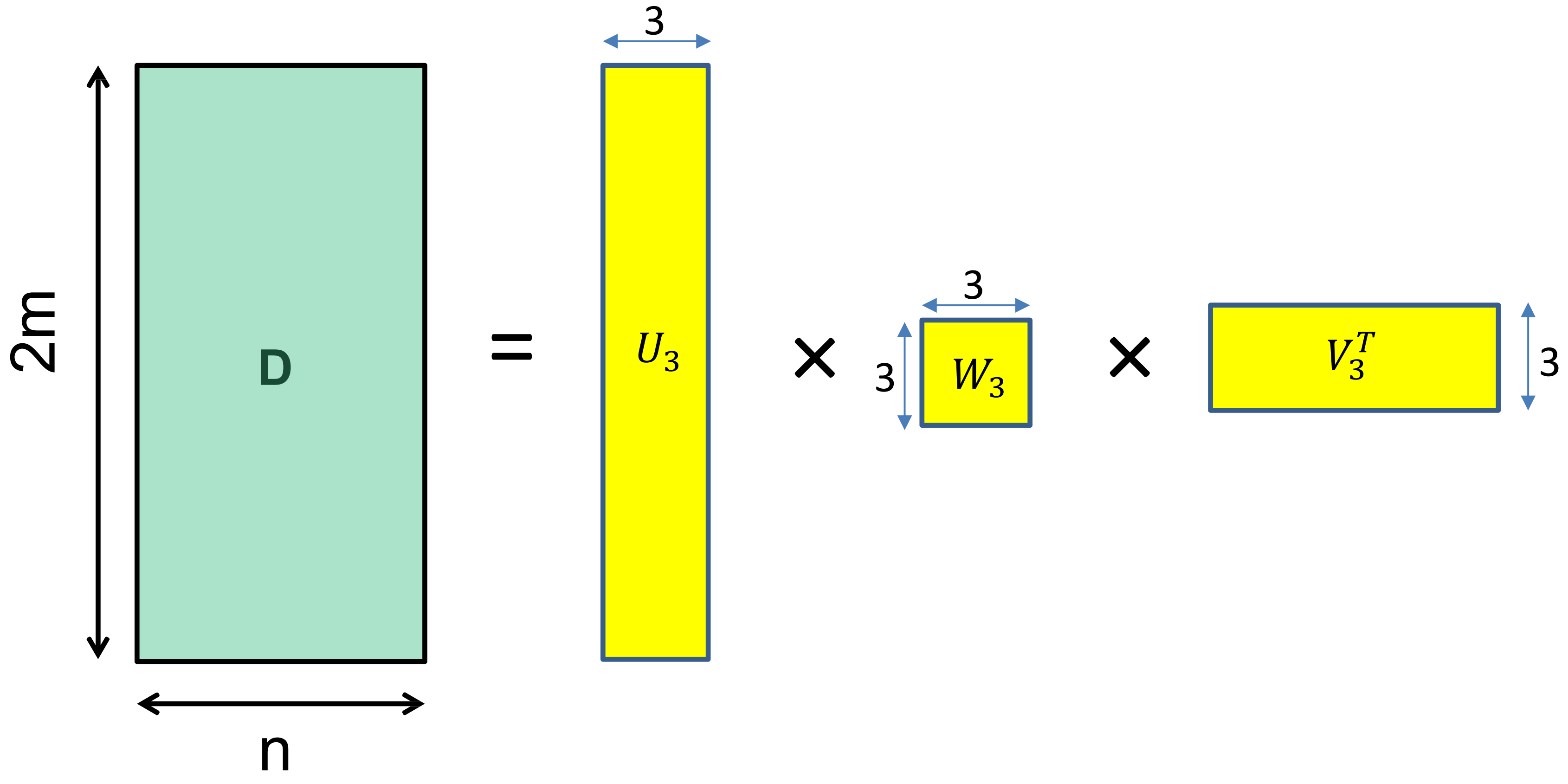
因式分解

由于 rank (D)=3, 理想情况下这里只有三个非零的奇异值 σ_1 , σ_2 和 σ_3

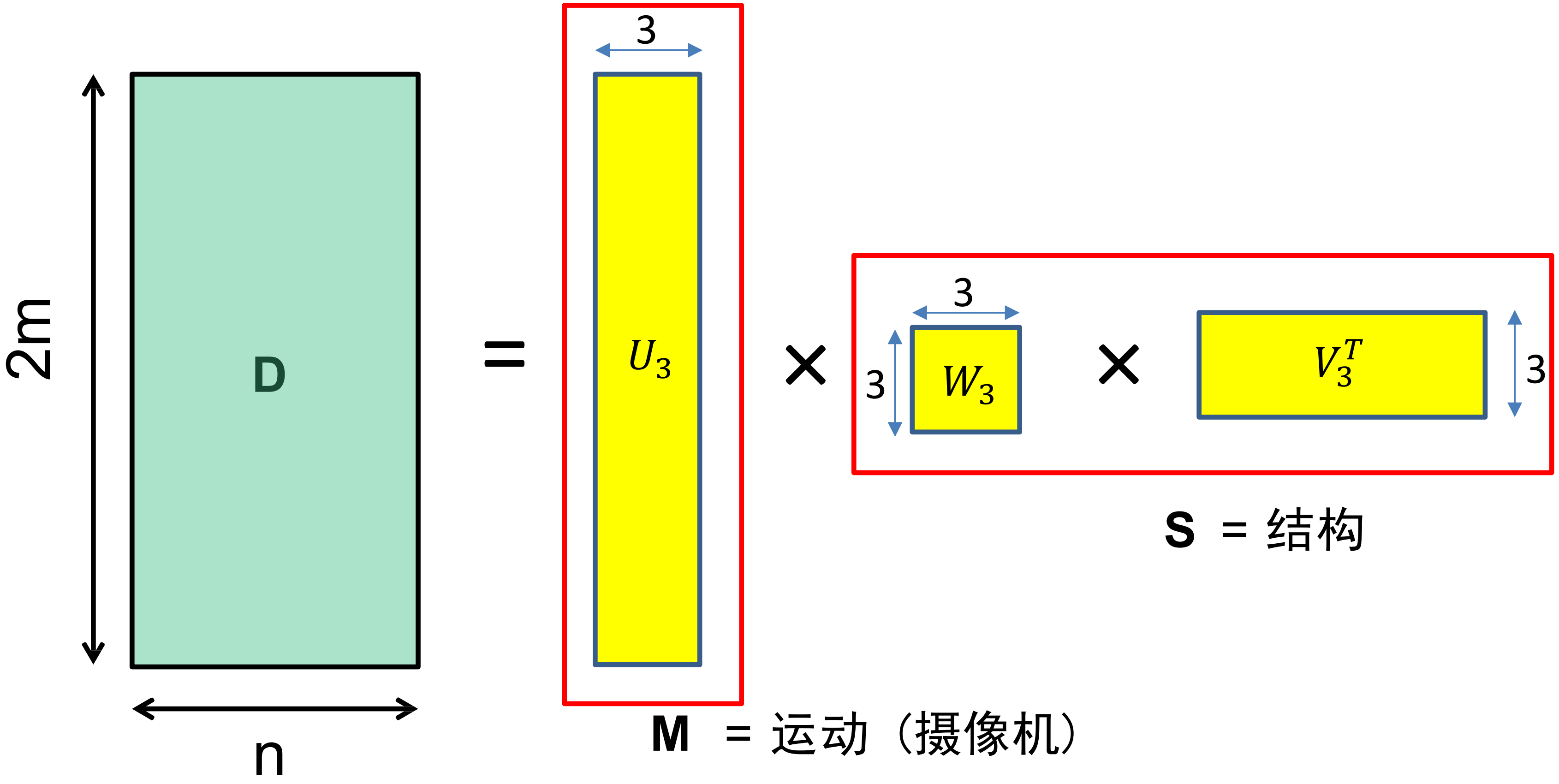


其中 $W_3 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$

因式分解



因式分解



S = 结构

M = 运动（摄像机）

$$D = U_3 W_3 V_3^T = U_3 (W_3 V_3^T) = MS$$

仿射结构恢复问题

问题： 已知n个三维点$X_j\ (j=1,\cdots,n)$在m张图像中的对应点的像素坐标x_{ij}

求解：

- n个三维点$X_j(j=1,\cdots,n)$的坐标
- m个投影矩阵M_i（即A_i与b_i）$(i=1,\cdots,m)$

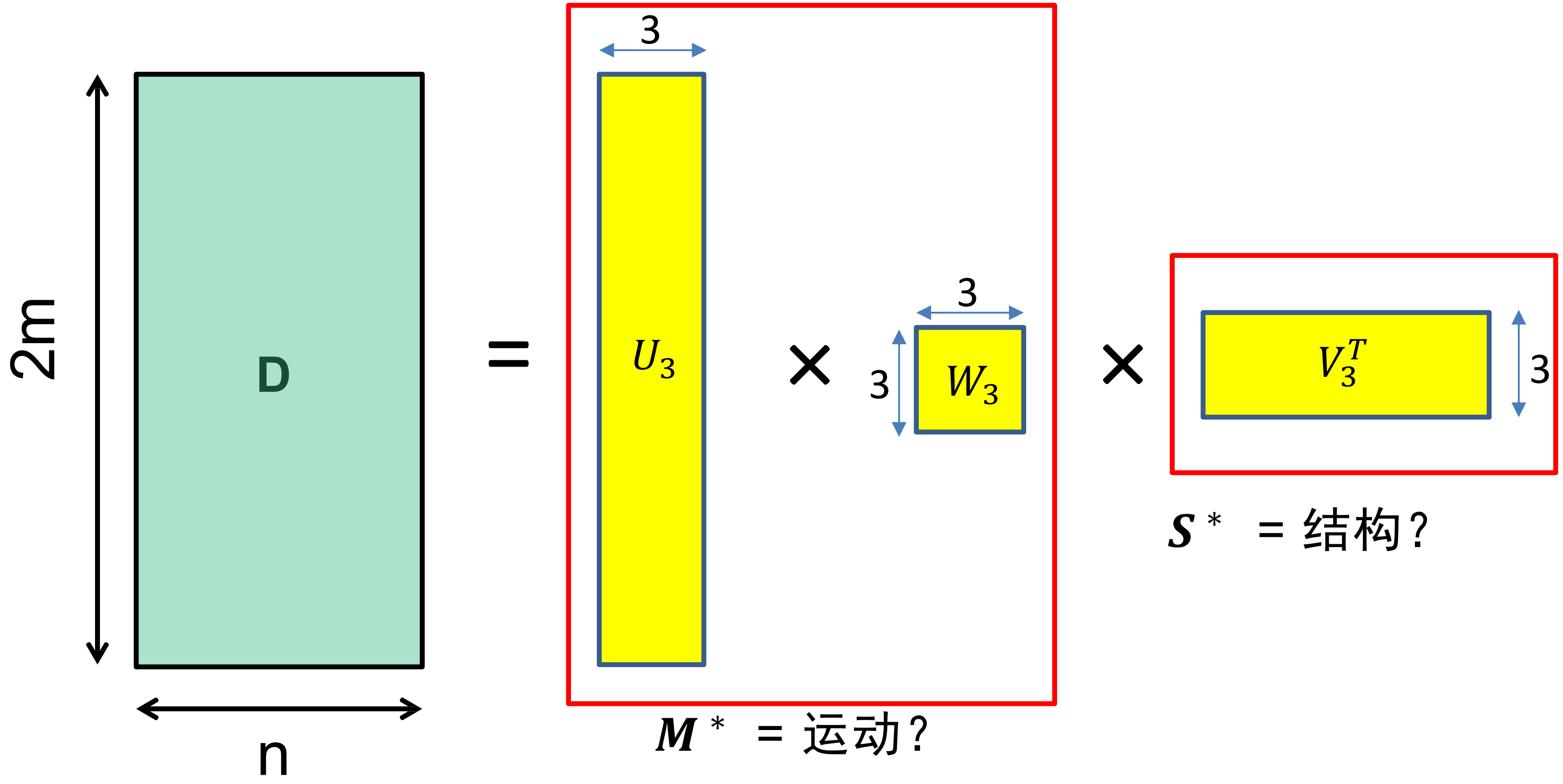
计算步骤：

1. 创建一个 2m × n 维的数据(测量值)矩阵D
2. 分解矩阵$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{U}_3\boldsymbol{W}_3\boldsymbol{V}_3^T$，$M=\boldsymbol{U}_3$及$S=\boldsymbol{W}_3\boldsymbol{V}_3^T$

$$D=\begin{bmatrix}\hat{x}_{11} & \hat{x}_{12} & \cdots & \hat{x}_{1n}\\ \hat{x}_{21} & \hat{x}_{22} & \cdots & \hat{x}_{2n}\\ & & \ddots & \\ \hat{x}_{m1} & \hat{x}_{m2} & \cdots & \hat{x}_{mn}\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}A_1\\A_2\\ \vdots\\ A_m\end{bmatrix}}\overset{S}{\boxed{\begin{bmatrix}X_1 & X_2 & \cdots & X_n\end{bmatrix}}}$$

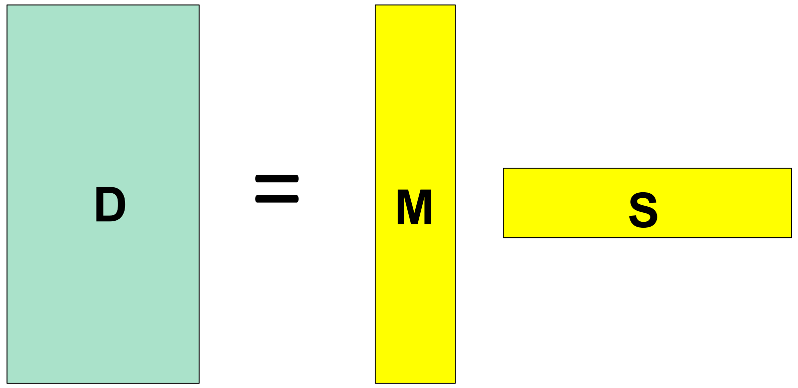
(2m × n)　　摄像机 (2m × 3)　M　　点 (3 × n)

问题：这样分解可以吗？

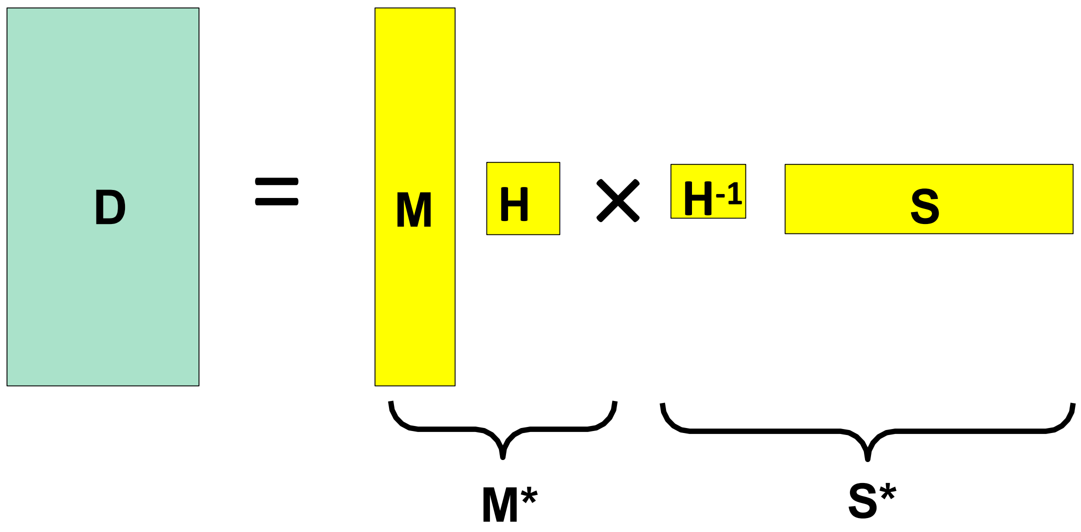


$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{U}_3\boldsymbol{W}_3\boldsymbol{V}_3^T = (\boldsymbol{U}_3\boldsymbol{W}_3)\boldsymbol{V}_3^T = \boldsymbol{M}^*\boldsymbol{S}^*$$

仿射结构恢复歧义



仿射结构恢复歧义



- 分解不唯一。通过以下变换可以得到相同的D:

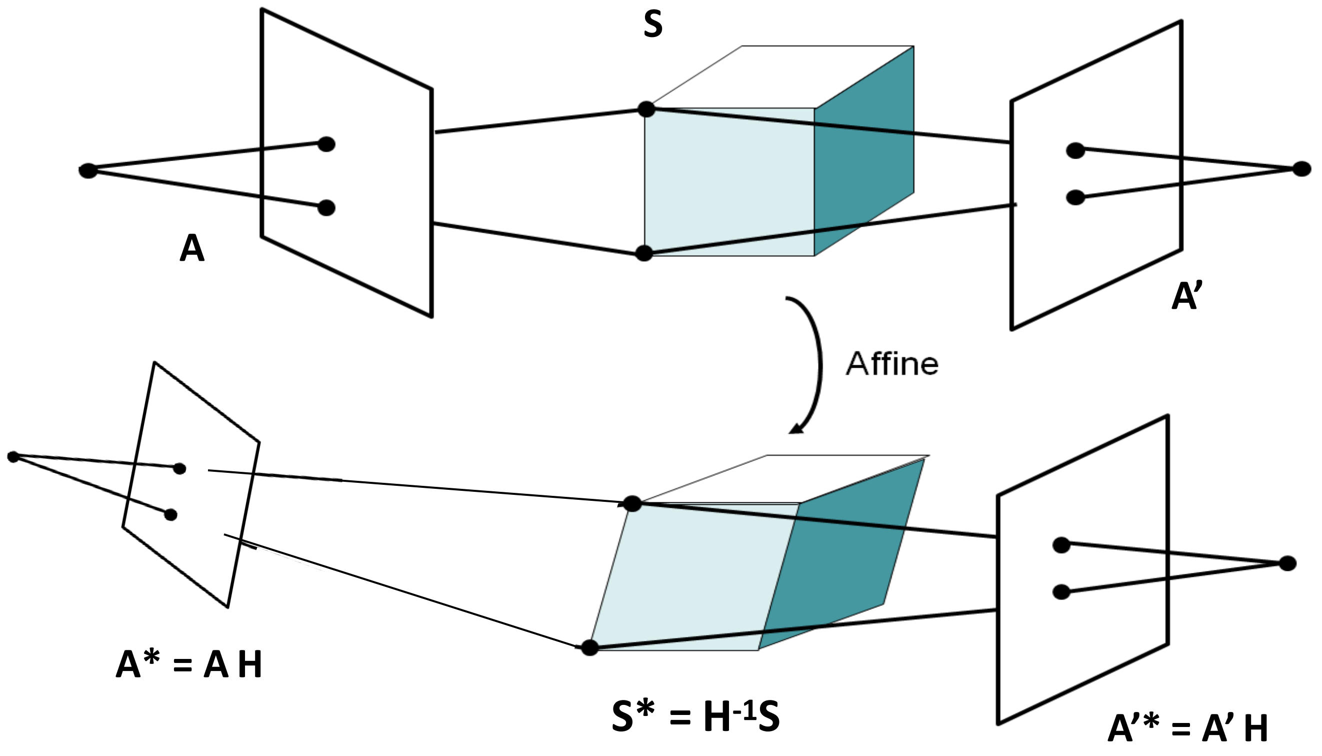
$$M^* = M\,H$$

$$S^* = H^{-1}S$$

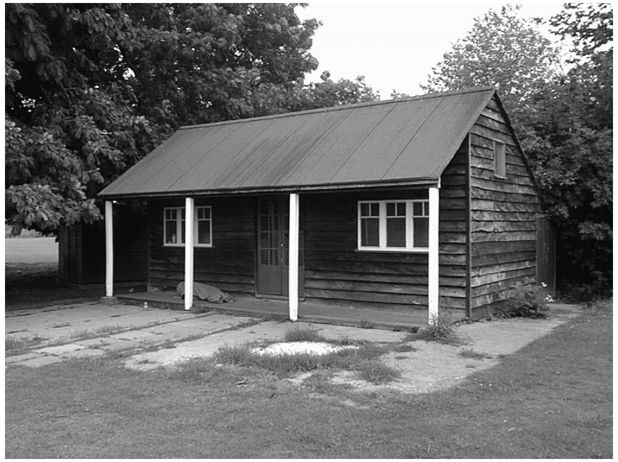
其中 H 是任意可逆的3×3矩阵

- 必须利用其他约束条件来解决歧义

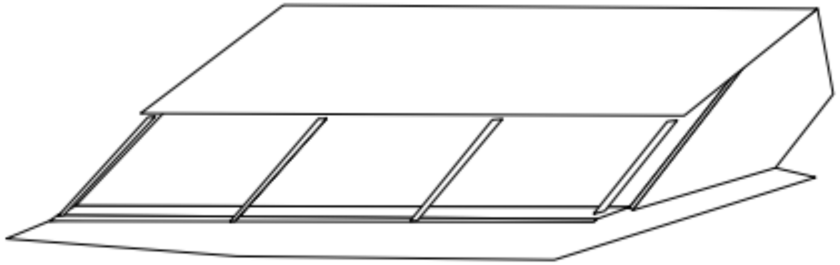
仿射结构恢复歧义



仿射结构恢复歧义



$S^* =$



R. Hartley and A. Zisserman, Multiple View Geometry in Computer Vision, 2nd edition, 2003

仿射结构恢复问题

问题：已知n个三维点X_j $(j=1,\cdots,n)$ 在m张图像中的对应点的像素坐标x_{ij}

求解：

- n个三维点$X_j (j=1,\cdots,n)$的坐标
- m个投影矩阵M_i（即A_i与b_i） $(i=1,\cdots,m)$

问题：给定m个相机，n个三维点，我们有多少个等式，多少个未知量？

计算步骤：

1. 创建一个 2m × n 维的数据(测量值)矩阵D
2. 分解矩阵$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{U}_3\boldsymbol{W}_3\boldsymbol{V}_3^T$，$M=\boldsymbol{U}_3$及$S=\boldsymbol{W}_3\boldsymbol{V}_3^T$

$$D=\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{x}_{11} & \hat{x}_{12} & \cdots & \hat{x}_{1n}\\ \hat{x}_{21} & \hat{x}_{22} & \cdots & \hat{x}_{2n}\\ & & \ddots & \\ \hat{x}_{m1} & \hat{x}_{m2} & \cdots & \hat{x}_{mn}\end{bmatrix}}_{(2m\times n)}=\underbrace{\boxed{\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\\ \vdots\\ A_m\end{bmatrix}}}_{\text{摄像机 }(2m\times 3)}\overbrace{\underbrace{\boxed{\begin{bmatrix}X_1 & X_2 & \dots & X_n\end{bmatrix}}}_{\text{点 }(3\times n)}}^{\mathbf{S}}$$

M

仿射结构恢复问题

问题： 已知n个三维点X_j $(j=1,\cdots,n)$ 在m张图像中的对应点的像素坐标x_{ij}

求解：

- n个三维点$X_j(j=1,\cdots,n)$的坐标
- m个投影矩阵M_i（即A_i与b_i） $(i=1,\cdots,m)$

问题：给定m个相机，n个三维点，我们有多少个等式，多少个未知量？

回答：2mn个等式，8m+3n-8个未知量

计算步骤：

1. 创建一个 2m × n 维的数据（测量值）矩阵D
2. 分解矩阵$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{U}_3\boldsymbol{W}_3\boldsymbol{V}_3^T$，$M=\boldsymbol{U}_3$及$S=\boldsymbol{W}_3\boldsymbol{V}_3^T$

$$D=\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{x}_{11} & \hat{x}_{12} & \cdots & \hat{x}_{1n}\\ \hat{x}_{21} & \hat{x}_{22} & \cdots & \hat{x}_{2n}\\ & & \ddots & \\ \hat{x}_{m1} & \hat{x}_{m2} & \cdots & \hat{x}_{mn}\end{bmatrix}}_{(2m\times n)}=\underbrace{\boxed{\begin{bmatrix}A_1\\ A_2\\ \vdots\\ A_m\end{bmatrix}}}_{\substack{M\\ \text{摄像机}\\ (2m\times 3)}}\underbrace{\overset{S}{\boxed{\begin{bmatrix}X_1 & X_2 & \cdots & X_n\end{bmatrix}}}}_{\text{点}(3\times n)}$$

Lecture 6

多视图几何

- 运动恢复结构问题
- 欧式结构恢复
- 仿射结构恢复
- 透视结构恢复
- 应用

透视摄像机

透视

$$x = MX = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} m_1 X \\ m_2 X \\ m_3 X \end{bmatrix} \qquad M = \begin{bmatrix} A & b \\ v & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \end{bmatrix}$$

$$x^E = \left(\frac{m_1 X}{m_3 X}, \frac{m_2 X}{m_3 X}\right)^T$$

仿射

$$x = MX = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} X \qquad M = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{2\times3} & b_{2\times1} \\ 0_{1\times3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & m_1 & & \\ & m_2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x^E = (m_1 X, m_2 X)^T = [A \;\; b] X = [\, A \;\; b \,] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = AX^E + b$$

放大率

$$\boxed{X^E = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}$$

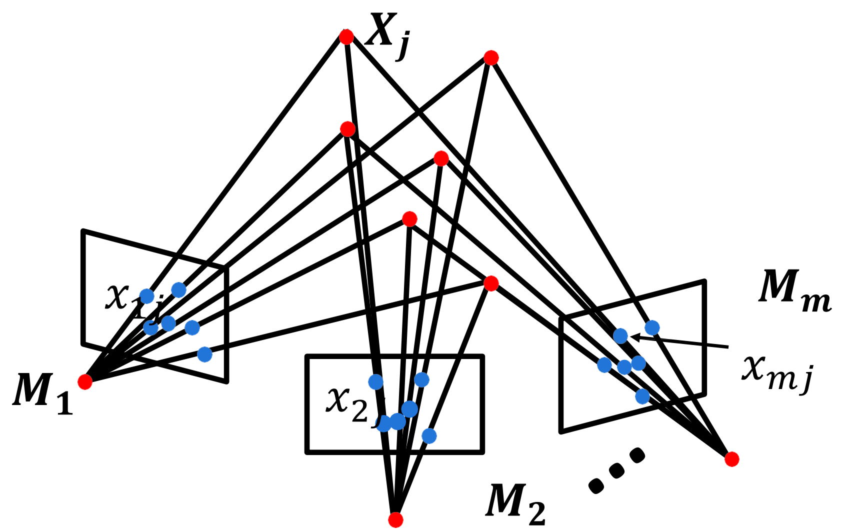
透视结构恢复问题

问题：已知n个三维点X_j $(j=1,\cdots,n)$在m张图像中的对应点的像素坐标x_{ij}；

且 $x_{\mathrm{ij}} = M_i X_j \quad i = 1, \ldots \boxed{m}\ ;\ j = 1 \ldots, \boxed{n}$

图像个数　　3D点个数

其中， M_i 为第i张图片对应的摄像机的投影矩阵



透视结构恢复问题

问题： 已知n个三维点$X_j\ (j=1,\cdots,n)$在m张图像中的对应点的像素坐标x_{ij}；

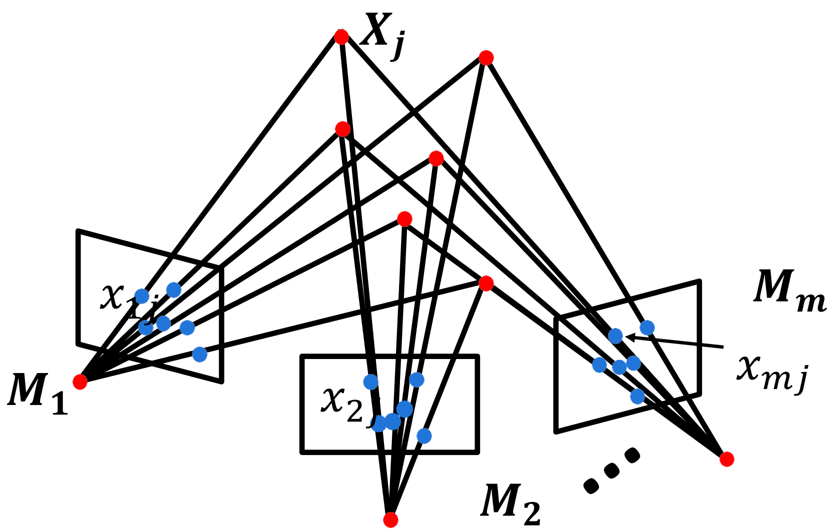
且 $$x_{\mathrm{ij}}=M_iX_j \qquad i=1,\ldots\boxed{m};\ j=1\ldots,\boxed{n}$$

图像个数　　3D点个数

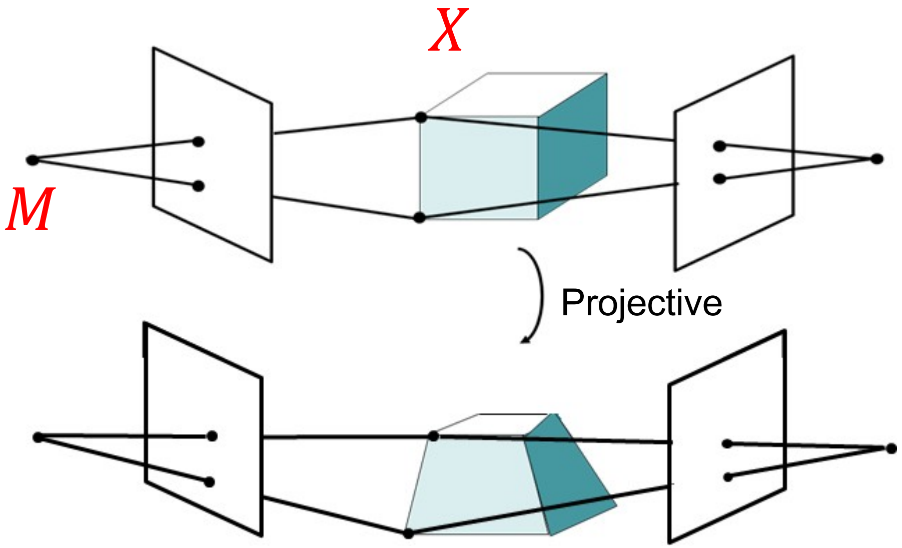
其中， M_i 为第i张图片对应的摄像机的投影矩阵

求解：

- n个三维点$X_j(j=1,\cdots,n)$的坐标；
- m个摄像机投影矩阵$M_i\ (i=1,\cdots,m)$。

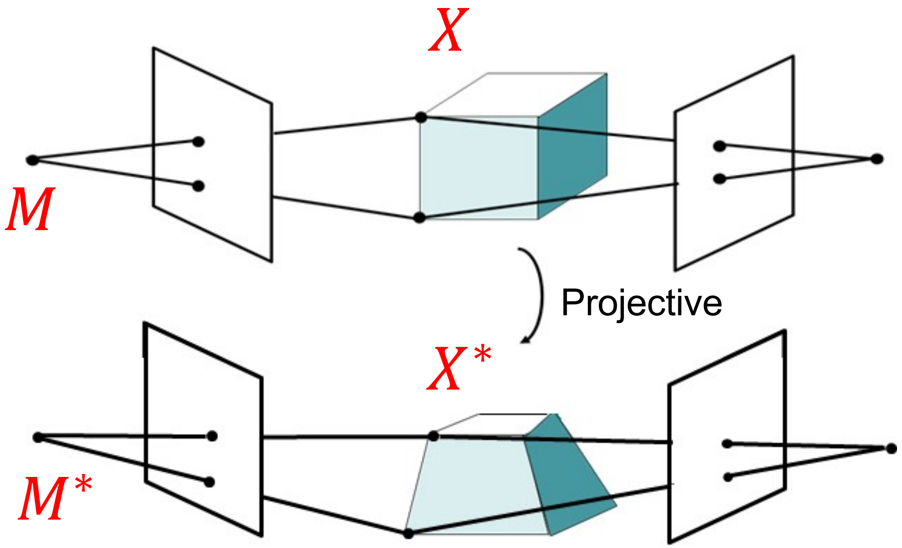


透视结构恢复歧义



$$x_{\mathrm{ij}} = M_i X_j \qquad M_i = K_i [R_i \quad T_i]$$

透视结构恢复歧义



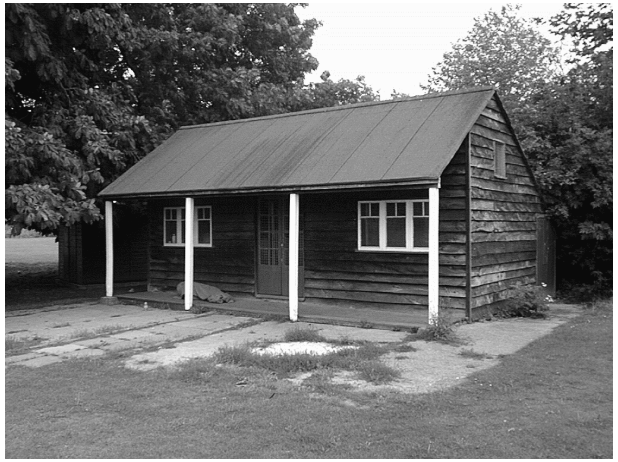
- 歧义由任意可逆4×4变换表示

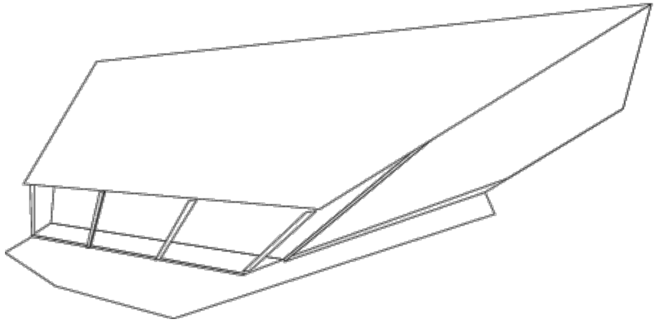
$$x_{ij} = M_i \boxed{X_j} \qquad \boxed{M_i} = K_i[R_i \quad T_i]$$

$$\boxed{HX_j} \qquad \boxed{M_i H^{-1}}$$

$$x_{ij} = M_i X_j = \underbrace{(M_i H^{-1})}_{M^*}\underbrace{(HX_j)}_{X^*} = M^*\, X^*$$

透视结构恢复歧义

$S^* =$ 

R. Hartley and A. Zisserman, Multiple View Geometry in Computer Vision, 2nd edition, 2003

透视结构恢复方法

在相差一个4×4的可逆变换的情况下恢复摄像机运动与场景结构

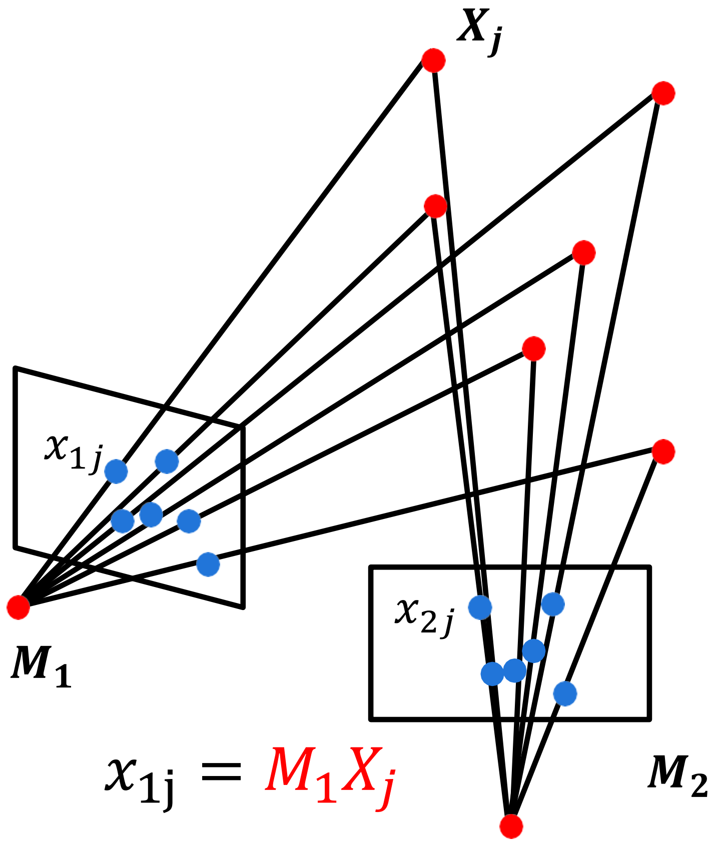
- 代数方法（通过基础矩阵）
- 因式分解法(通过SVD)
- 捆绑调整

透视结构恢复方法

在相差一个4×4的可逆变换的情况下恢复摄像机运动与场景结构

- 代数方法（通过基础矩阵）
- 因式分解法(通过SVD)
- 捆绑调整

代数方法(两视图情况)



$x_{1j} = M_1 X_j$

$x_{2j} = M_2 X_j$

代数方法(两视图情况)

1. 求解基础矩阵 F

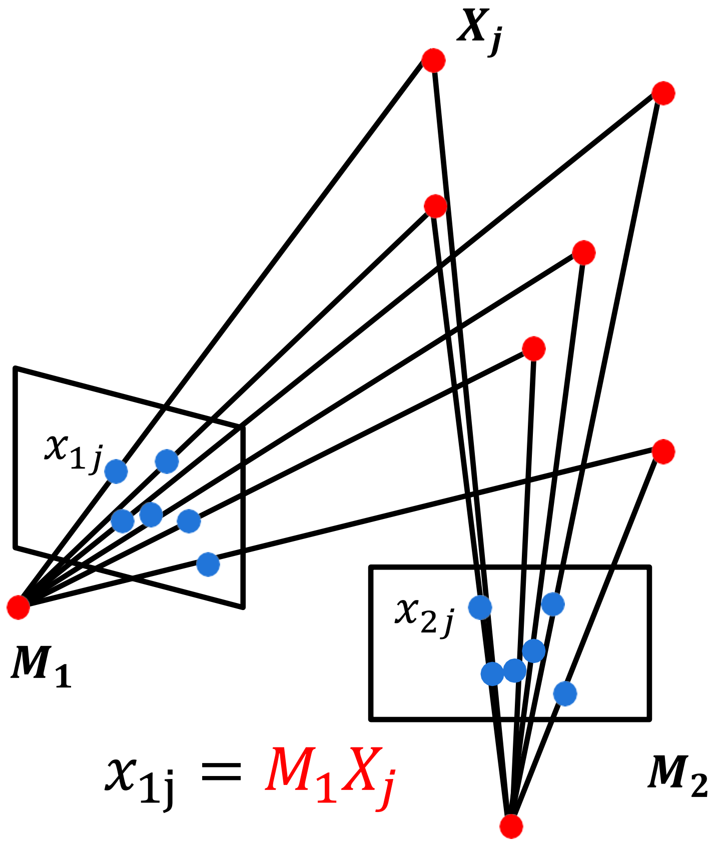
   归一化八点法

2. 利用 F 估计摄像机矩阵

   $\mathrm{F} \rightarrow M_1, M_2$

3. 三角化计算三维点坐标

$$X_j^* = \underset{X_j}{\operatorname{argmin}}\left(d\left(x_{1j}, M_1 X_j\right) + d\left(x_{2j}, M_2 X_j\right)\right)$$



$x_{1j} = M_1 X_j$

$x_{2j} = M_2 X_j$

代数方法(两视图情况)

1. 求解基础矩阵 F

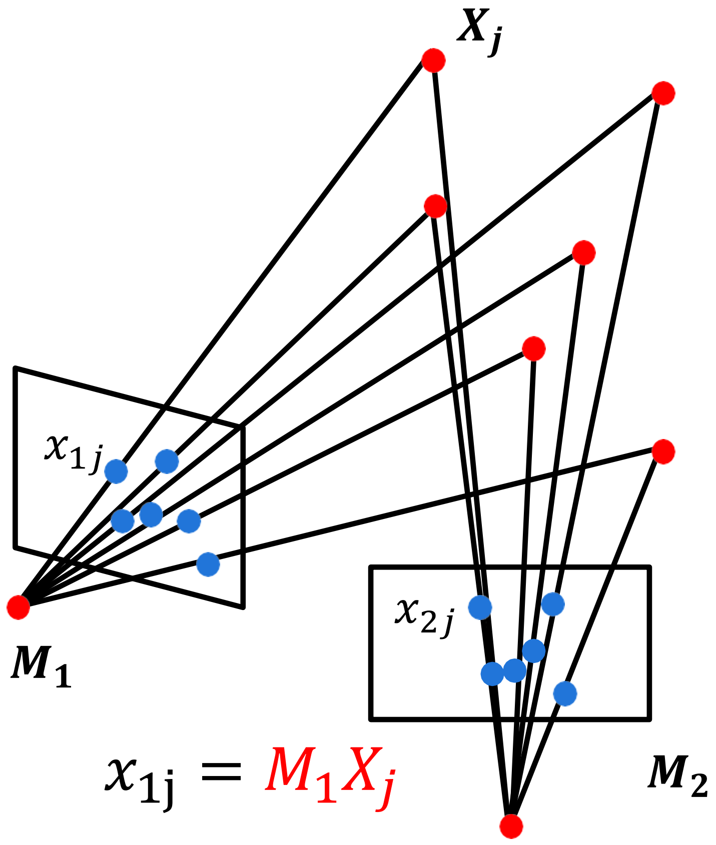
   归一化八点法

2. 利用 F 估计摄像机矩阵

   $\mathrm{F} \rightarrow M_1, M_2$

3. 三角化计算三维点坐标

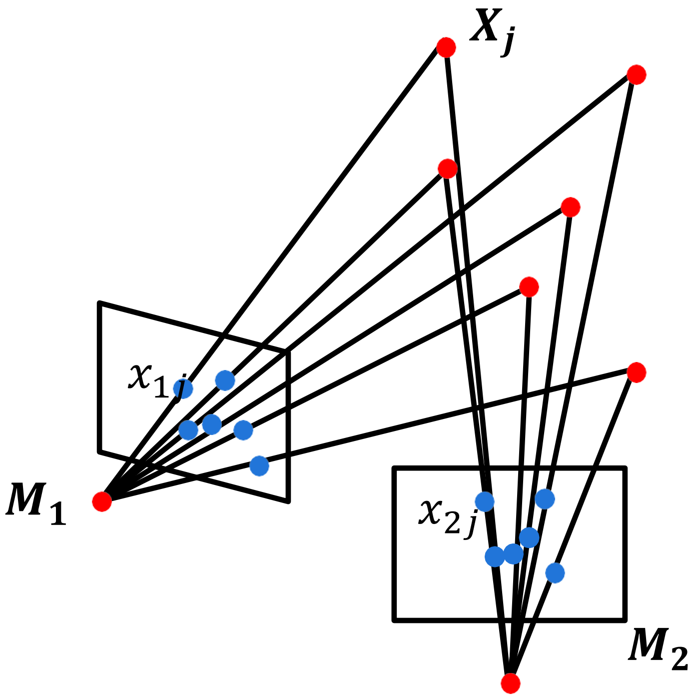
$$X_j^* = \underset{X_j}{\operatorname{argmin}}\left(d\left(x_{1j}, M_1 X_j\right) + d\left(x_{2j}, M_2 X_j\right)\right)$$



$$x_{1j} = M_1 X_j$$

$$x_{2j} = M_2 X_j$$

利用 F 估计摄像机矩阵



$$x_{1j} = M_1 X_j$$

$$x_{2j} = M_2 X_j$$

$$j = 1 \ldots, \boxed{n}$$

3D点个数

由于透视歧义存在，我们总是可以找到一个可逆矩阵H ，使得：

$$M_1 H^{-1} = [I|0] \qquad M_2 H^{-1} = [A|b]$$

利用 F 估计摄像机矩阵

- X表示3D点
- 将x和x'分别称为摄像机1和2的对应观测值

$$\begin{cases} \widetilde{M}_1 = M_1 H^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \\ \widetilde{M}_2 = M_2 H^{-1} = \begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} \\ \tilde{X} = HX \end{cases}$$

$$x = M_1 X = M_1 H^{-1} H X = [I|0]\tilde{X}$$

$$x' = M_2 X = M_2 H^{-1} H X = [A|b]\tilde{X}$$

利用 F 估计摄像机矩阵

- X表示3D点
- 将x和x'分别称为摄像机1和2的对应观测值

$$\begin{cases} \widetilde{M}_1 = M_1 H^{-1} = [\ I \ \ 0\ ] \\ \widetilde{M}_2 = M_2 H^{-1} = [\ A \ \ b\ ] \\ \tilde{X} = HX \end{cases}$$

$$x = M_1 X = M_1 H^{-1} H X = [I|0]\tilde{X}$$

$$x' = M_2 X = M_2 H^{-1} H X = [A|b]\tilde{X}$$

$$x' = [A|b]\tilde{X} = [A|b]\begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \tilde{X}_3 \\ 1 \end{bmatrix} = A[I|0]\begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \tilde{X}_3 \\ 1 \end{bmatrix} + b = A\boxed{[I|0]\tilde{X}} + b = Ax + b$$

利用 F 估计摄像机矩阵

- X表示3D点
- 将x和x'分别称为摄像机1和2的对应观测值

$$\begin{cases} \widetilde{M}_1 = M_1 H^{-1} = [\ I \ \ 0\ ] \\ \widetilde{M}_2 = M_2 H^{-1} = [\ A \ \ b\ ] \\ \tilde{X} = HX \end{cases}$$

$$x = M_1 X = M_1 H^{-1} H X = [I|0]\tilde{X}$$

$$x' = M_2 X = M_2 H^{-1} H X = [A|b]\tilde{X}$$

$$x' = [A|b]\tilde{X} = [A|b]\begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \tilde{X}_3 \\ 1 \end{bmatrix} = A[I|0]\begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \tilde{X}_3 \\ 1 \end{bmatrix} + b = A\boxed{[I|0]\tilde{X}} + b = Ax + b$$

$$x' \times b = (Ax + b) \times b = Ax \times b$$

$$x'^T \cdot (x' \times b) = x'^T \cdot (Ax \times b) = 0$$

$$x'^T (b \times Ax) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x'^T [b_\times] A x = 0}$$

利用 F 估计摄像机矩阵

- X表示3D点
- 将x和x'分别称为摄像机1和2的对应观测值

$$\begin{cases} \widetilde{M}_1 = M_1 H^{-1} = [\ I \ \ 0\ ] \\ \widetilde{M}_2 = M_2 H^{-1} = [\ A \ \ b\ ] \\ \tilde{X} = HX \end{cases}$$

$$x = M_1 X = M_1 H^{-1} H X = [I|0]\tilde{X}$$

$$x' = M_2 X = M_2 H^{-1} H X = [A|b]\tilde{X}$$

$$x' = [A|b]\tilde{X} = [A|b]\begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \tilde{X}_3 \\ 1 \end{bmatrix} = A[I|0]\begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \tilde{X}_3 \\ 1 \end{bmatrix} + b = A\boxed{[I|0]\tilde{X}} + b = Ax + b$$

$$x' \times b = (Ax + b) \times b = Ax \times b$$

$$x'^T \cdot (x' \times b) = x'^T \cdot (Ax \times b) = 0$$

$$x'^T (b \times Ax) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{x'^T [b_\times] A x = 0}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x'^T F x = 0}}$$

基本矩阵!

利用 F 估计摄像机矩阵

- X表示3D点
- 将x和x'分别称为摄像机1和2的对应观测值

$$\begin{cases} \widetilde{M}_1 = M_1 H^{-1} = [\ I \ \ 0\ ] \\ \widetilde{M}_2 = M_2 H^{-1} = [\ A \ \ b\ ] \\ \tilde{X} = HX \end{cases}$$

$$x = M_1 X = M_1 H^{-1} H X = [I|0]\tilde{X}$$

$$x' = M_2 X = M_2 H^{-1} H X = [A|b]\tilde{X}$$

$$x' = [A|b]\tilde{X} = [A|b]\begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \tilde{X}_3 \\ 1 \end{bmatrix} = A[I|0]\begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \\ \tilde{X}_3 \\ 1 \end{bmatrix} + b = A\boxed{[I|0]\tilde{X}} + b = Ax + b$$

$$x' \times b = (Ax + b) \times b = Ax \times b$$

$$\boxed{\boldsymbol{F} = [\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{A}}$$

$$x'^T \cdot (x' \times b) = x'^T \cdot (Ax \times b) = 0$$

$$x'^T (b \times Ax) = 0 \implies \boldsymbol{x'^T [b_\times] A x = 0}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x'^T F x = 0}}$$

基本矩阵!

利用 F 估计摄像机矩阵

已知： $x'^T F x = 0 \qquad F = [b_\times]A$

利用 F 估计摄像机矩阵

$$\text{已知：} \quad x'^T F x = 0 \qquad F = [b_\times]A$$

1. 计算**b**：

➢ 考虑乘积$F^T b$

$$\boxed{F^T \cdot b = ([b_\times]A)^T \cdot b = A^T[b_\times]^T \cdot b = -A^T[b_\times] \cdot b = 0}$$

利用 F 估计摄像机矩阵

已知： $x'^T F x = 0 \quad F = [b_\times]A$

1. 计算**b**：

- 考虑乘积$F^T b$　　$F^T \cdot b = ([b_\times]A)^T \cdot b = A^T [b_\times]^T \cdot b = -A^T [b_\times] \cdot b = 0$　　$\boxed{F^T b = 0}$

利用 F 估计摄像机矩阵

已知： $x'^T F x = 0 \qquad F = [b_\times] A$

1. 计算**b**：

- 考虑乘积$F^T b$ $\qquad F^T \cdot b = ([b_\times]A)^T \cdot b = A^T [b_\times]^T \cdot b = -A^T [b_\times] \cdot b = 0 \qquad \boxed{F^T b = 0}$
- b为F^T矩阵最小奇异值的右奇异向量，且$||b|| = 1$

利用 F 估计摄像机矩阵

已知： $x'^T F x = 0 \qquad F = [b_\times]A$

1. 计算b：

- 考虑乘积$F^T b$ $\quad F^T \cdot b = ([b_\times]A)^T \cdot b = A^T[b_\times]^T \cdot b = -A^T[b_\times] \cdot b = 0$ $\quad \boxed{F^T b = 0}$
- b为F^T矩阵最小奇异值的右奇异向量，且$||b|| = 1$

2. 计算 A：

- 定义：$\boldsymbol{A}' = -[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{F}$
- 验证 $[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{A}'$ 等于 $\boldsymbol{F}$ ：

利用 F 估计摄像机矩阵

已知： $x'^T F x = 0$ $F = [b_\times]A$

1. 计算b：

- 考虑乘积$F^T b$ $F^T \cdot b = ([b_\times]A)^T \cdot b = A^T [b_\times]^T \cdot b = -A^T [b_\times] \cdot b = 0$ $\boxed{F^T b = 0}$
- b为F^T矩阵最小奇异值的右奇异向量，且$||b|| = 1$

2. 计算 A：

- 定义：$\boldsymbol{A}' = -[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{F}$
- 验证 $[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{A}'$ 等于 $\boldsymbol{F}$ ：

$$\boxed{[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{A}' = -[\boldsymbol{b}_\times][\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{F} = -\left(\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^T - |\boldsymbol{b}|^2\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{F} + |\boldsymbol{b}|^2\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{1} \cdot \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}}$$

利用 F 估计摄像机矩阵

已知： $x'^T F x = 0$ $F = [b_\times]A$

1. 计算b：

- 考虑乘积$F^T b$ $F^T \cdot b = ([b_\times]A)^T \cdot b = A^T [b_\times]^T \cdot b = -A^T [b_\times] \cdot b = 0$ $\boxed{F^T b = 0}$
- b为F^T矩阵最小奇异值的右奇异向量，且$\|b\| = 1$

2. 计算 A：

- 定义：$\boldsymbol{A}' = -[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{F}$
- 验证 $[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{A}'$ 等于 $\boldsymbol{F}$ ：

$$\boxed{[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{A}' = -[\boldsymbol{b}_\times][\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{F} = -\left(\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^T - |\boldsymbol{b}|^2\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{F} + |\boldsymbol{b}|^2\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{1} \cdot \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}}$$

- 因此， $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' = -[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{F}$

利用 F 估计摄像机矩阵

已知： $x'^T F x = 0 \qquad F = [b_\times]A$

1. 计算b：

➢ 考虑乘积$F^T b$ $F^T \cdot b = ([b_\times]A)^T \cdot b = A^T [b_\times]^T \cdot b = -A^T [b_\times] \cdot b = 0$ $\boxed{F^T b = 0}$

➢ b为F^T矩阵最小奇异值的右奇异向量，且$\|b\| = 1$

2. 计算 A：

- 定义：$\boldsymbol{A}' = -[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{F}$
- 验证 $[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{A}'$ 等于 $\boldsymbol{F}$ ：

$$\boxed{[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{A}' = -[\boldsymbol{b}_\times][\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{F} = -\left(\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^T - |\boldsymbol{b}|^2 \boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{F} + |\boldsymbol{b}|^2\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{1} \cdot \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}}$$

- 因此， $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' = -[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{F}$

摄像机矩阵： $\widetilde{M}_1 = [\ I \quad 0\ ] \qquad \widetilde{M}_2 = [-[b_\times]F \quad b]$

利用 F 估计摄像机矩阵

已知： $x'^T F x = 0 \quad F = [b_\times]A$

问题：这里b是什么？

1. 计算b：

- 考虑乘积$F^T b$ $F^T \cdot b = ([b_\times]A)^T \cdot b = A^T [b_\times]^T \cdot b = -A^T [b_\times] \cdot b = 0$ $F^T b = 0$
- b为F^T矩阵最小奇异值的右奇异向量，且$\|b\| = 1$

2. 计算 A：

- 定义：$\boldsymbol{A}' = -[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{F}$
- 验证 $[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{A}'$ 等于 $\boldsymbol{F}$：

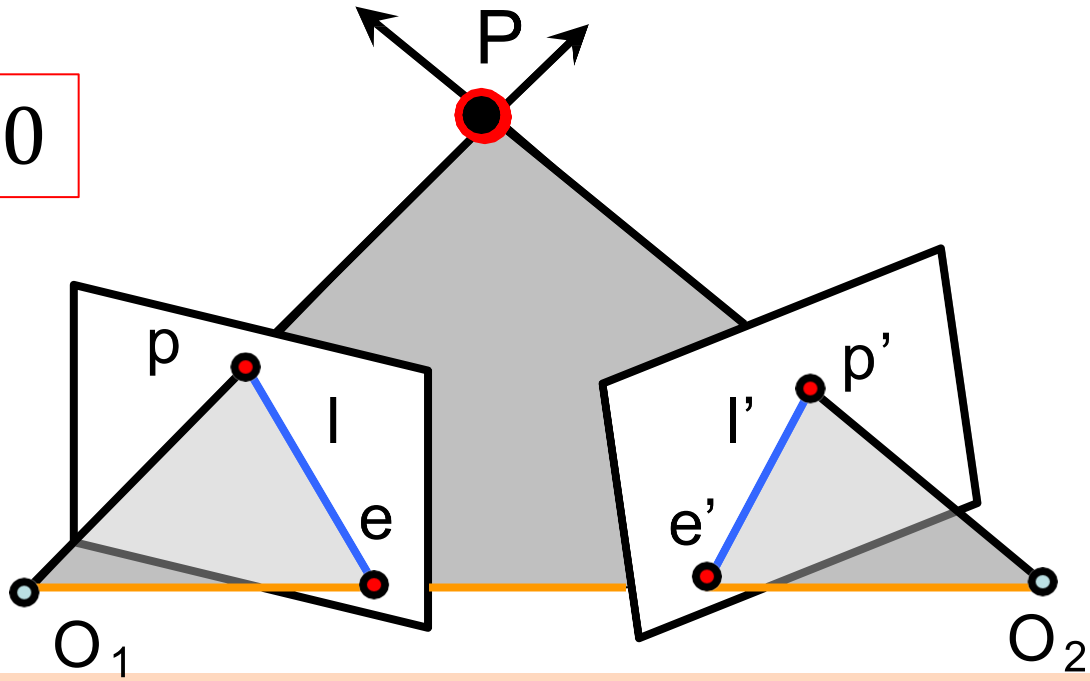
$$[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{A}' = -[\boldsymbol{b}_\times][\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{F} = -\left(\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^T - |\boldsymbol{b}|^2\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{F} + |\boldsymbol{b}|^2\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{1} \cdot \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}$$

- 因此， $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' = -[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{F}$

摄像机矩阵： $\widetilde{M}_1 = [\ I \ \ 0\ ] \qquad \widetilde{M}_2 = [-[b_\times]F \ \ b]$

极几何约束

$$\boxed{p'^T F p = 0}$$



- $l = F^T p'$是p'对应的极线
- $l' = Fp$是p对应的极线
- $\boxed{Fe = 0, \ F^T e' = 0}$
- F是奇异的(秩2)
- F的DOF为7

利用 F 估计摄像机矩阵

已知： $x'^T F x = 0 \qquad F = [b_\times]A$

问题：这里b是什么？

回答： b是一个极点

1. 计算b：

- 考虑乘积$F^T b$ $\qquad F^T \cdot b = ([b_\times]A)^T \cdot b = A^T [b_\times]^T \cdot b = -A^T [b_\times] \cdot b = 0$ $\qquad \boxed{F^T b = 0}$
- b为F^T矩阵最小奇异值的右奇异向量，且$||b|| = 1$

2. 计算 A：

- 定义：$\boldsymbol{A}' = -[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{F}$
- 验证 $[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{A}'$ 等于 $\boldsymbol{F}$ ：

$$\boxed{[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{A}' = -[\boldsymbol{b}_\times][\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{F} = -\left(\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^T - |\boldsymbol{b}|^2\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{F} + |\boldsymbol{b}|^2\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{1} \cdot \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}}$$

- 因此， $\qquad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}' = -[\boldsymbol{b}_\times]\boldsymbol{F}$

摄像机矩阵： $\qquad \widetilde{M}_1 = [\ I \ \ 0\ ] \qquad \widetilde{M}_2 = [-[b_\times]F \ \ b]$

代数方法（两视图情况）

1. 求解基础矩阵 F

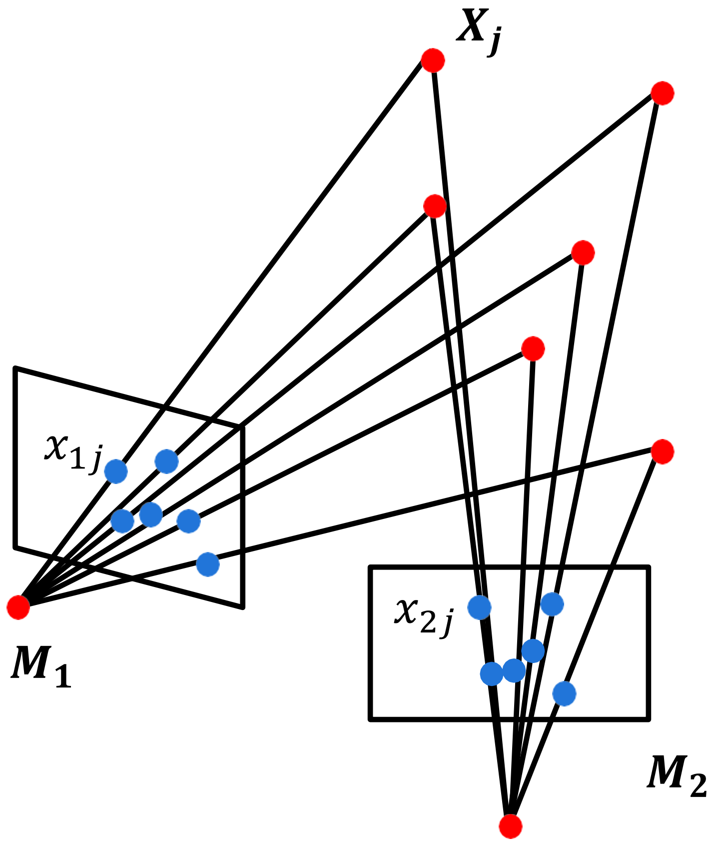
   归一化八点法

2. 利用 F 估计摄像机矩阵

   $\widetilde{M}_1 = [\ I \ \ 0\ ] \qquad \widetilde{M}_2 = [-[b_\times]F \ \ b]$

3. 三角化计算三维点坐标

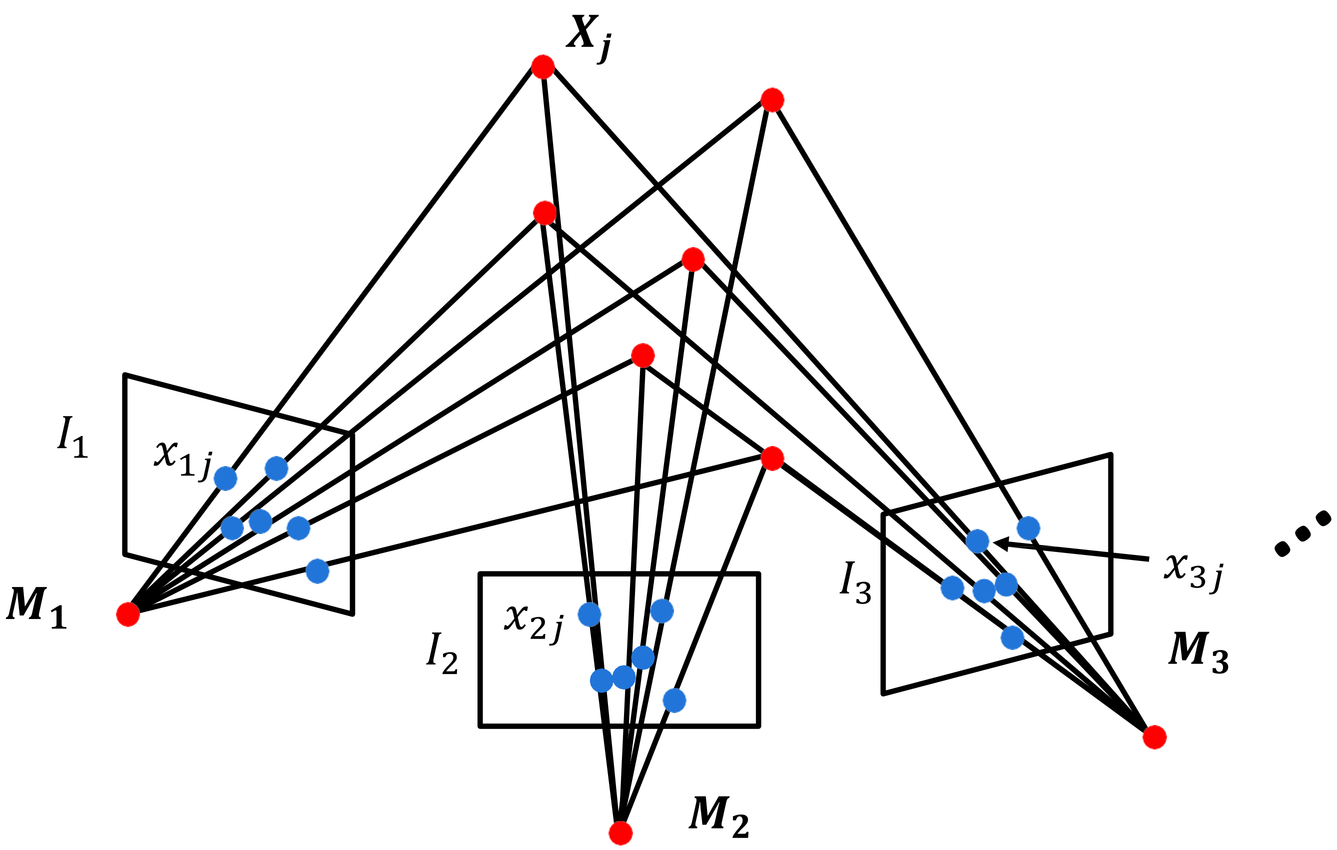
   $$X_j^* = \underset{X_j}{\operatorname{argmin}}\big(d(x_{1j}, M_1X_j) + d(x_{2j}, M_2X_j)\big)$$



$$x_{1j} = M_1X_j$$

$$x_{2j} = M_2X_j$$

代数方法（N 视图情况）



分别对每一个图像对I_k与I_h计算运动与结构

$$I_k与I_h \rightarrow \widetilde{M}_k, \widetilde{M}_h, \tilde{X}_{[k,h]}$$

增量法！

透视结构恢复方法

- 代数方法（通过基础矩阵）
- 因式分解法(通过SVD)
- 捆绑调整

代数法与分解法的局限性

- 因式分解法假定所有点都是可见的，所以下述场合不可用：
  - 存在遮挡
  - 建立对应点关系失败

能够用于构建观测矩阵D的点少，重建点数少！

$$D = \begin{bmatrix} \hat{x}_{11} & \hat{x}_{12} & \cdots & \hat{x}_{1n} \\ \hat{x}_{21} & \hat{x}_{22} & \cdots & \hat{x}_{2n} \\ & & \ddots & \\ \hat{x}_{m1} & \hat{x}_{m2} & \cdots & \hat{x}_{mn} \end{bmatrix}$$

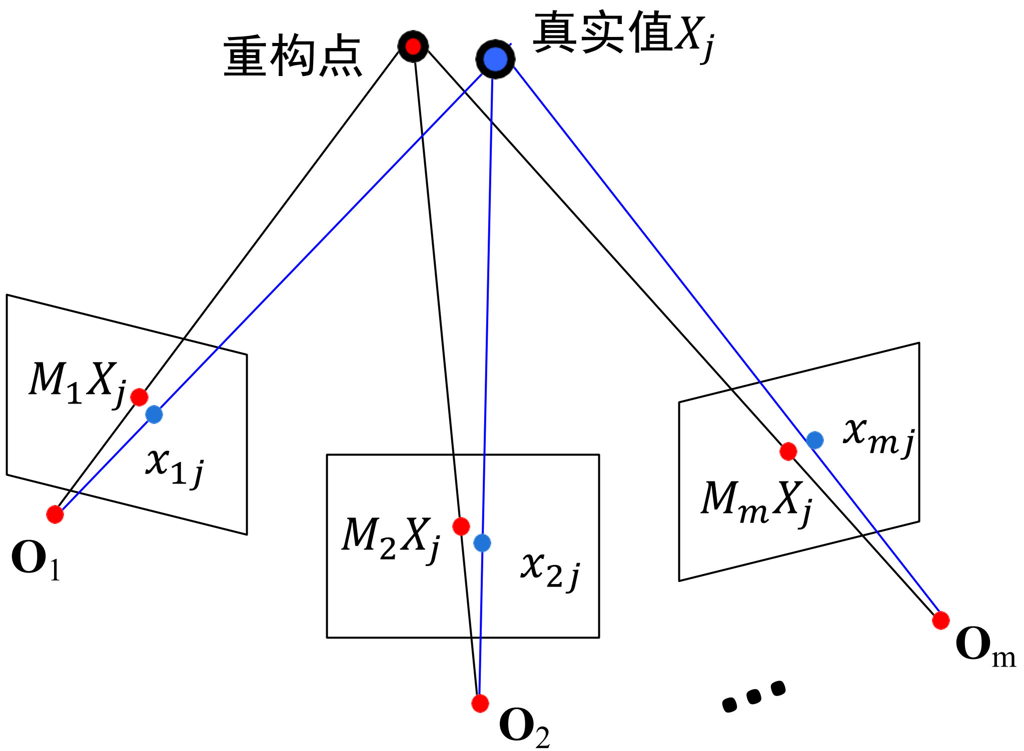
- 代数法应用于2视图重建

易出现误差累积！

捆绑调整

- 恢复结构和运动的非线性方法

最小化重投影误差： $E(M,X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}D(x_{ij},M_iX_j)^2$



捆绑调整

$$E(M,X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}D(x_{ij},M_i\ \ X_j\ \ )^2$$

参数

测量值

非线性最小化问题

- 牛顿法 与 列文伯格-马夸尔特法（L-M方法）

捆绑调整

$$E(M,X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}D(x_{ij},M_i\ \ X_j\ \ )^2$$

测量值　　参数

非线性最小化问题

- 牛顿法 与 列文伯格-马夸尔特法（L-M方法）

优势

- 同时处理大量视图
- 处理丢失的数据

捆绑调整

$$E(M,X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}D(x_{ij},M_i\ X_j\ )^2$$

测量值　参数

非线性最小化问题

－牛顿法 与 列文伯格-马夸尔特法（L-M方法）

优势

- 同时处理大量视图
- 处理丢失的数据

局限性

- 大量参数的最小化问题
- 需要良好的初始条件

捆绑调整

$$E(M,X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}D(x_{ij},M_i\ \ X_j\ \ )^2$$

测量值

参数

非线性最小化问题

－牛顿法 与 列文伯格-马夸尔特法（L-M方法）

优势

➢ 同时处理大量视图

➢ 处理丢失的数据

局限性

➢ 大量参数的最小化问题

➢ 需要良好的初始条件

实际操作：

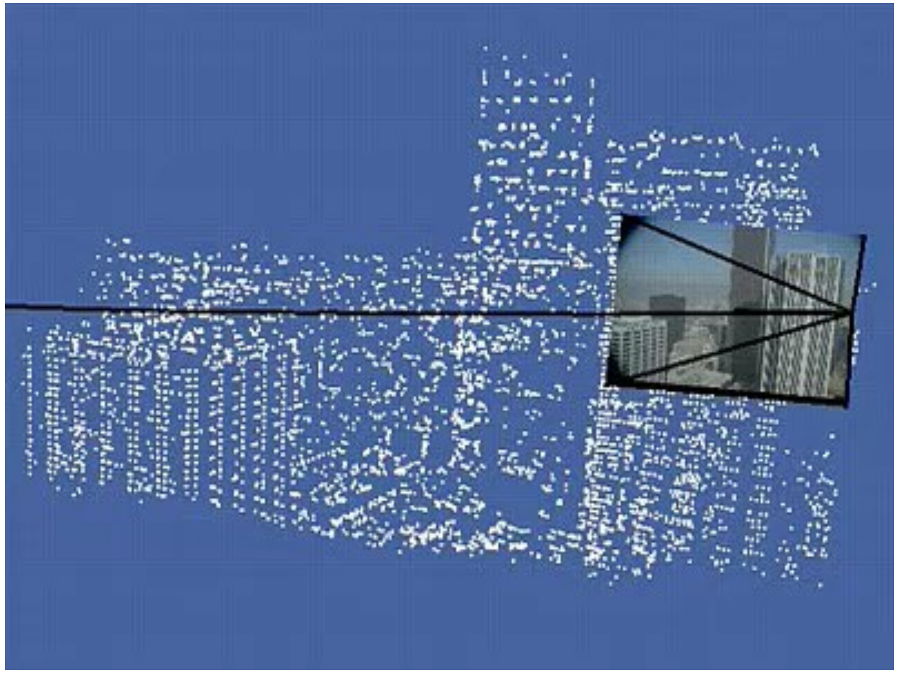
➢ 常用作SFM的最后一步，分解或代数方法可作为优化问题的初始解

Lecture 6

多视图几何

- 运动恢复结构问题
- 欧式结构恢复
- 仿射结构恢复
- 透视结构恢复
- 应用

运动恢复结构问题



Courtesy of Oxford **Visual Geometry Group**

Lucas & Kanade, 81
Chen & Medioni, 92
Debevec et al., 96
Levoy & Hanrahan, 96
Fitzgibbon & Zisserman, 98
Triggs et al., 99
Pollefeys et al., 99
Kutulakos & Seitz, 99

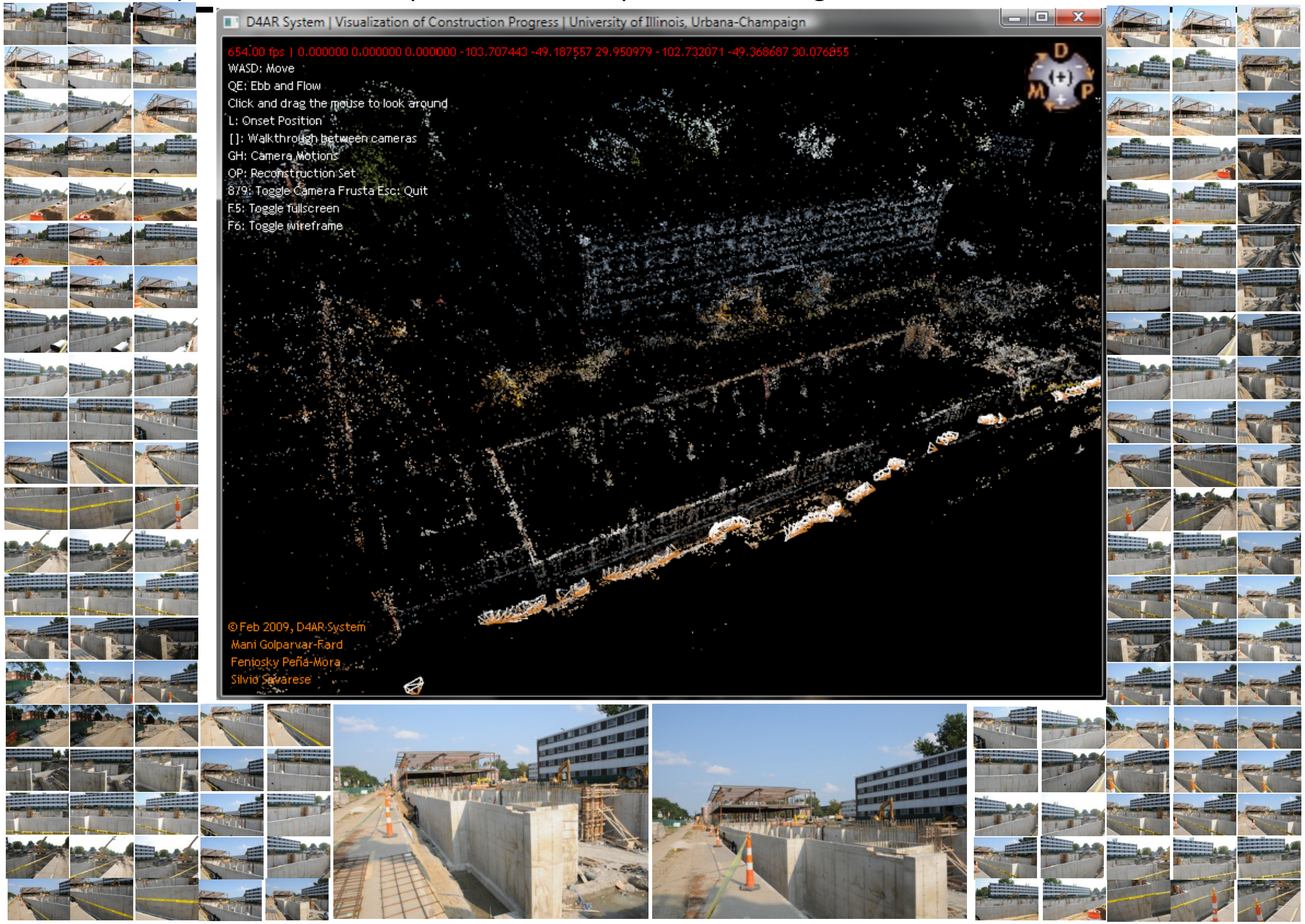
Levoy et al., 00
Hartley & Zisserman, 00
Dellaert et al., 00
Rusinkiewic et al., 02
Nistér, 04
Brown & Lowe, 04
Schindler et al, 04
Lourakis & Argyros, 04
Colombo et al. 05

Golparvar-Fard, et al. JAEI 10
Pandey et al. IFAC , 2010
Pandey et al. ICRA 2011
Microsoft's PhotoSynth
Snavely et al., 06-08
Schindler et al., 08
Agarwal et al., 09
Frahm et al., 10

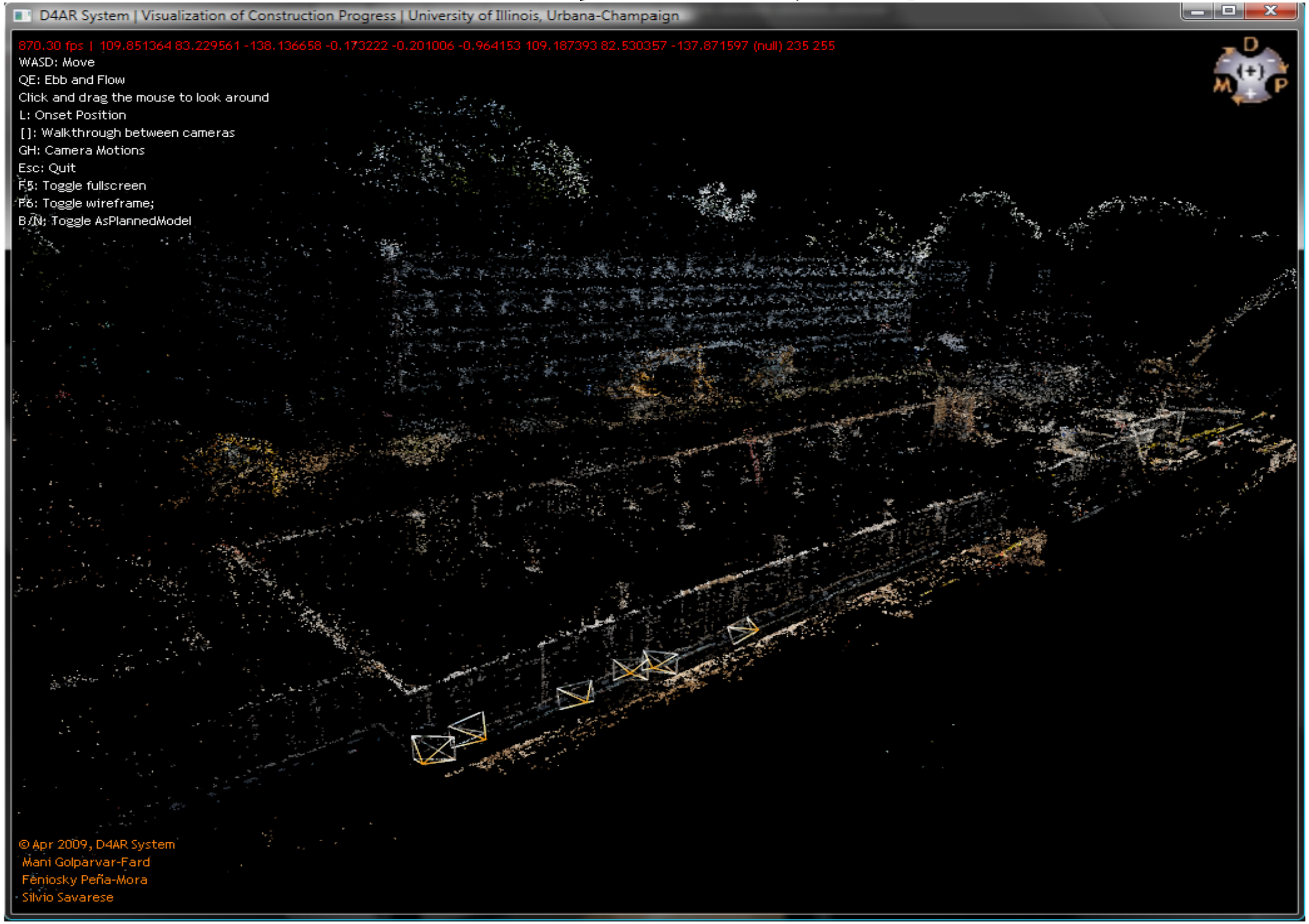
建筑场景的增量重构

Initial pair – 2168 & Complete Set 62,323 points, 160 images

Golparvar-Fard. Pena-Mora, Savarese 2008



重构场景与摄像机位姿



D4AR System | Visualization of Construction Progress | University of Illinois, Urbana-Champaign
870.30 fps | 109.851364 83.229561 -138.136658 -0.173222 -0.201006 -0.964153 109.187393 82.530357 -137.871597 (null) 235 255
WASD: Move
QE: Ebb and Flow
Click and drag the mouse to look around
L: Onset Position
[]: Walkthrough between cameras
GH: Camera Motions
Esc: Quit
F5: Toggle fullscreen
F6: Toggle wireframe;
B/N: Toggle AsPlannedModel
D
M
P
© Apr 2009, D4AR System
Mani Golparvar-Fard
Feniosky Peña-Mora
Silvio Savarese

结果与应用

Noah Snavely, Steven M. Seitz, Richard Szeliski, "Photo tourism: Exploring photo collections in 3D," ACM Transactions on Graphics (SIGGRAPH Proceedings),2006,

Microsoft Photosynth

Lecture 6

多视图几何

- 运动恢复结构问题（完）
- 欧式结构恢复（完）
- 仿射结构恢复（完）
- 透视结构恢复（完）
- 应用（完）