

DS 02- Canne robotisée

Avec Correction

PTSI

Samedi 16 novembre 2019

Table des matières

I	Présentation générale	2
II	Analyse du cycle de la marche	3
III	Modélisation de la chaîne d'énergie de l'axe linéaire	4
IV	Modèle comportemental	5
V	Correction proportionnelle	6
VI	Correction avec action proportionnelle et intégrale généralisée	8
VII	Étude de l'exigence 3.1.6 « Commande des axes asservis »	10
VIII	Dessin	11
IX	Document réponse	13

Canne robotisée

I Présentation générale

L'amélioration de la mobilité des personnes âgées ou rencontrant des troubles de la marche demeure un des enjeux majeurs de l'assistance à la personne.

Un dispositif d'assistance à la marche peut être prescrit lors de l'apparition de troubles de la locomotion. Parmi les nombreux dispositifs proposés, la canne et le déambulateur demeurent les plus utilisés ; l'utilisation de la canne étant privilégiée lors de troubles mineurs ou n'affectant qu'une des deux jambes.

Afin de contribuer à l'amélioration de l'assistance apportée par ces deux dispositifs conventionnels, la robotisation de ceux-ci a été entreprise. Ainsi, de nombreux déambulateurs robotisés ont été conçus afin d'offrir une assistance continue lors de la marche. En revanche, le développement des cannes robotisées s'est traduit par une différenciation marquée par rapport aux cannes conventionnelles (voir figure 1). En effet, l'utilisation de bases mobiles stables sur lesquelles sont fixées des cannes, conduit à l'obtention de dispositif encombrant.

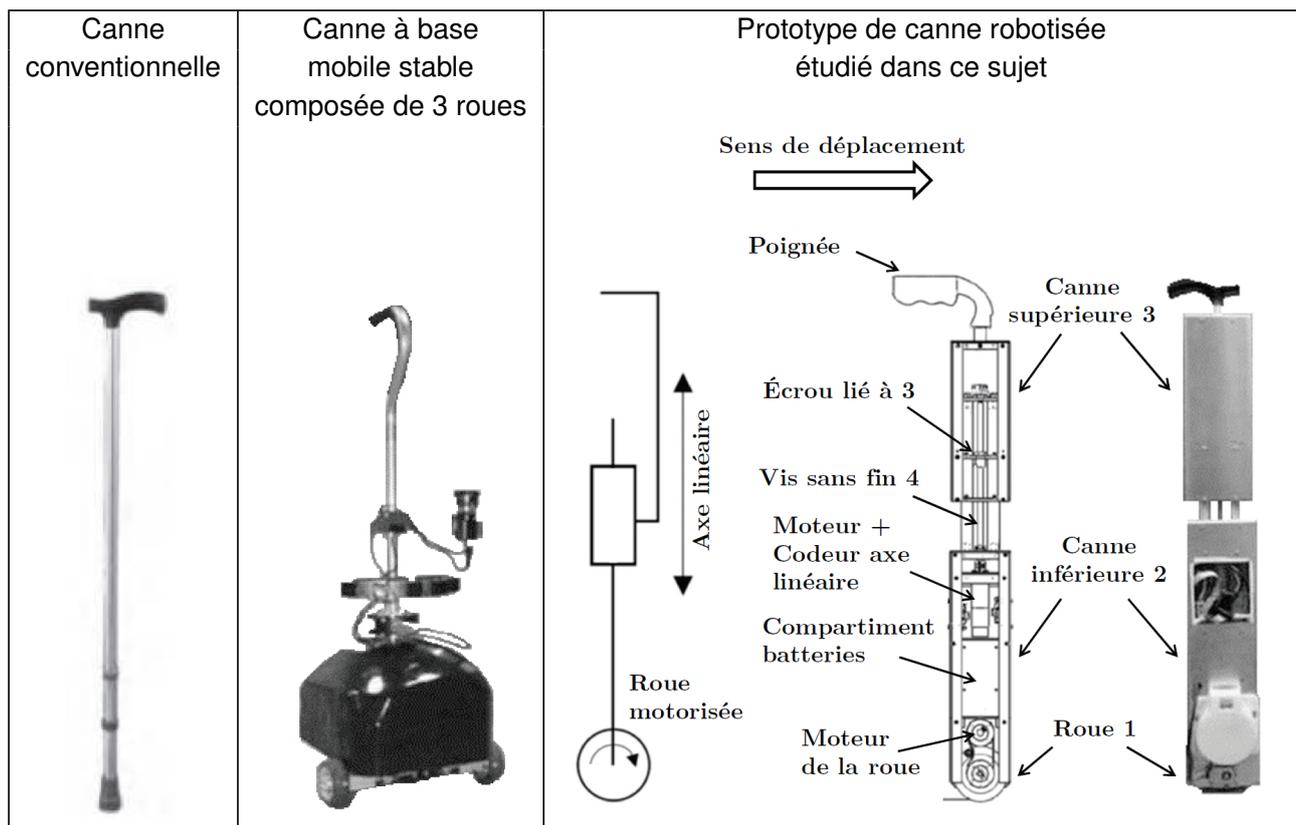


Figure 1 – Évolution des dispositifs d'assistance à la locomotion de type canne et description du prototype de canne robotisée

Pour plus de compacité et pour garder les attributs d'une canne conventionnelle, le prototype de canne étudié dans ce sujet est composé d'un axe télescopique et d'une roue à son extrémité, tous deux motorisés. Il conserve ainsi un encombrement réduit et permet de synchroniser les mouvements avec le cycle de la marche. La canne suit ainsi activement le mouvement de la jambe « invalide » durant la phase de balancement et offre un point d'appui stable pendant la phase d'appui.

L'extrait du cahier des charges donné dans le tableau ci-dessous reprend les principales exigences attendues par le comportement de la canne.

Performance	Critère	Valeur
Précision	erreur statique	$\mu_s \leq 5\%$
Amortissement	1er dépassement	$D_{1\%} \leq 5\%$
Rapidité	temps de réponse à 5%	$tr_{5\%} \leq 60 \text{ ms}$
Stabilité	Marge de gain	$M_G \geq 45 \text{ db}$
	Marge de phase	$M_\phi \geq 35^\circ$

II Analyse du cycle de la marche

L'objectif de cette partie est d'étudier des cycles de marches saines et perturbées afin de mettre en évidence l'apport d'une canne d'assistance pour améliorer la marche. L'observation des jambes, effectuée dans le cadre d'un « cycle de marche », permet de distinguer pour chacune d'entre elle une phase d'appui et une phase de balancement (figure 2). Ce cycle débute par un appui simple de la jambe droite et le début du balancement de la jambe gauche. Il s'achève lors du décolllement du pied gauche du sol.

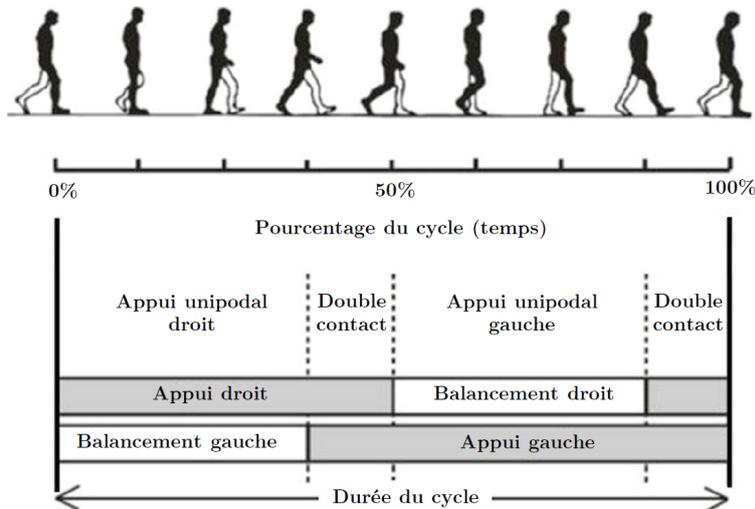


Figure 2 – Représentation du cycle de la marche adopté dans le cadre de notre étude

Les résultats obtenus pour les différentes conditions sont présentés sur les figures 3 à 6. Ces courbes représentent l'évolution des efforts normaux (orthogonaux au sol) exercés par les jambes ou la canne sur le sol. Afin de faciliter l'observation des résultats, tous les résultats ont été normalisés, ceux relatifs à la jambe droite sont représentés en trait fort et ceux relatifs à la jambe gauche en trait fin. Les écarts-types associés aux résultats sont représentés en pointillés. Le trait continu représente la moyenne.

Pour ces figures, le cycle de la marche adopté durant l'étude débute par l'appui simple sur la jambe droite. La jambe gauche sera la jambe équipée des dispositifs contraignants dans le cadre de la marche perturbée et assistée d'une canne. Pour ce dernier cas, la canne est placée du côté de la jambe valide, c'est-à-dire du côté de la jambe droite.

Question 1 A partir de l'étude des figures 3 et 5, comparer et commenter les évolutions des efforts normaux de chacune des jambes sur le sol et les durées de chacune des phases pour les différents cas : marche saine et marche perturbée.

Question 2 A partir de l'étude des figures 4 et 6, préciser le rôle de la canne lors d'une marche assistée.

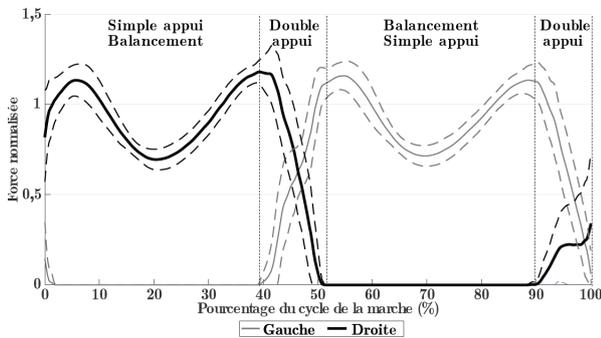


Figure 3 – Efforts normaux générés par les jambes durant un cycle de marche normale à $V = 0,45$ m/s

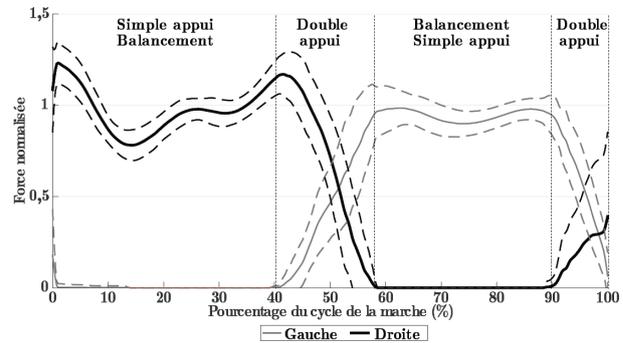


Figure 5 – Efforts normaux générés par les jambes durant un cycle marche perturbée à allure moyenne, $V = 0,22$ m/s

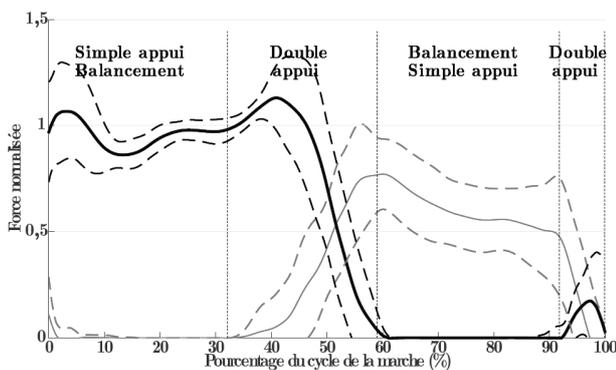


Figure 4 – Efforts normaux générés par les jambes durant un cycle de marche assistée à allure moyenne, $V = 0,22$ m/s

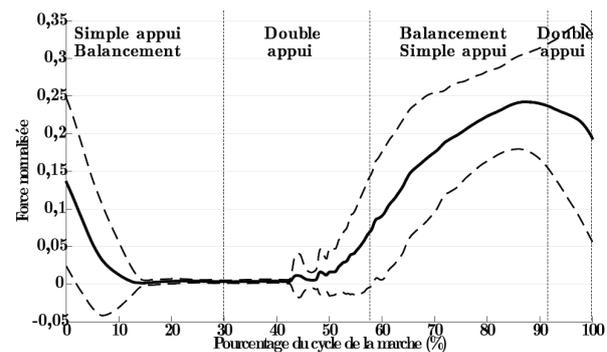


Figure 6 – Efforts normaux générés par la canne durant un cycle de marche assistée à allure moyenne, $V = 0,22$ m/s

III Modélisation de la chaîne d'énergie de l'axe linéaire

On considère que le moteur de l'axe linéaire (figure 1) adopte le même comportement que celui d'un moteur à courant continu. Les équations de comportement sont rappelées ci-après :

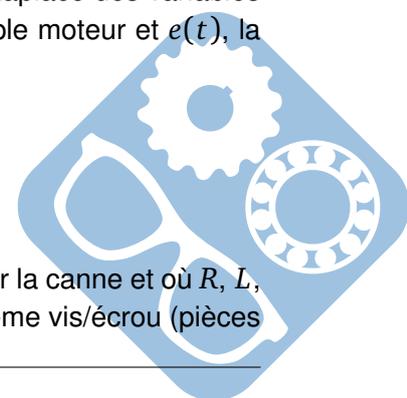
$$u_m(t) = e(t) + Ri_m(t) + L \frac{di_m(t)}{dt}, \quad e(t) = K_e \omega_m(t) \quad \text{et} \quad c_m(t) = K_c i_m(t).$$

On notera $U_m(p)$ respectivement $I_m(p)$, $C_m(p)$ et $E(p)$ les transformées de Laplace des variables $u_m(t)$, la tension moteur, respectivement $i_m(t)$, le courant moteur, $c_m(t)$, le couple moteur et $e(t)$, la force contre-électromotrice.

Une étude énergétique a permis d'obtenir l'équation du mouvement

$$J_{eq} \frac{d\omega_m(t)}{dt} + f \omega_m(t) = c_m(t) - \frac{pas}{2\pi} F_p(t)$$

où $F_p(t)$ correspond à l'action mécanique (force) de la main de la personne sur la canne et où R , L , K_e , K_c , J_{eq} et f sont des constantes du moteur et pas correspond au pas du système vis/écrou (pièces



3 et 4 sur la figure 1).

Question 3 En supposant les conditions initiales nulles, déterminer, dans le domaine de Laplace, l'équation du mouvement précédente et compléter le schéma-blocs.

Soient $H_1(p)$ et $H_2(p)$ les fonctions de transfert telles que : $\Omega_m(p) = H_1(p) \cdot U_m(p) + H_2(p) \cdot F_p(p)$.

Question 4 Déterminer les expressions littérales des formes canoniques des fonctions de transfert $H_1(p)$ et $H_2(p)$ en fonction des constantes du problème.

Le dispositif vis/écrou (figure 1), permettant la transformation de l'angle de rotation de la vis sans fin 4 (de $pas = 3 \text{ mm}$) en déplacement de l'écrou 3, est modélisé par un gain pur $K_{ve} = \frac{pas}{2\pi} = 0,477 \text{ mm rad}^{-1}$.

Le comportement du codeur incrémental est modélisé par un gain pur $K_{codeur} = 79,6 \text{ inc rad}^{-1}$. La sortie de ce bloc est de type numérique (en incréments) et son entrée est une position angulaire (en radians).

Afin d'asservir en déplacement le mouvement de la canne, un adaptateur de gain pur K_{adapt} est placé en amont du comparateur de manière à convertir la consigne $X_c(p)$ en une grandeur en incréments directement comparable à la sortie $\theta_{mes}(p)$ du capteur. La valeur du gain pur K_{adapt} est prise de manière à ce que l'écart $\varepsilon(p)$ soit nul lorsque $X_c(p) = X(p)$.

Question 5 Donner l'expression, puis la valeur numérique et l'unité du gain pur K_{adapt} permettant de satisfaire cette condition.

Question 6 Compléter alors le schéma-bloc à retour unitaire du document réponse en fonction de K_{codeur} , K_{ve} , $C(p)$, $H_1(p)$ et $H_2(p)$. En déduire la fonction de transfert en boucle ouverte du système sans perturbation $H_{BO1}(p)$.

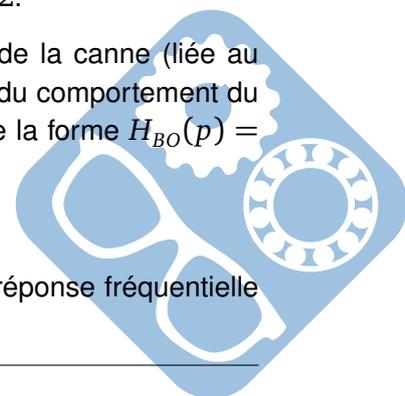
IV Modèle comportemental

Afin de proposer une modélisation simplifiée de la chaîne d'énergie de l'axe linéaire, une simulation du modèle précédent en boucle ouverte non perturbé notée $H_{BO1}(p)$ a été réalisée. On considère que $H_{BO1}(p)$ est de la forme $H_{BO1}(p) = \frac{K_{BO}}{p(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$ avec $T_1 < T_2$. Le document réponse présente la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte à l'aide du diagramme de Bode (courbe de gain $G_{BO}(\omega)$ et courbe de phase $\varphi_{BO}(\omega)$).

Question 7 Représenter le tracé asymptotique de $H_{BO1}(p)$ sur le diagramme de Bode et en déduire les valeurs de T_1 , T_2 et K_{BO} . On rappelle que $10^{3/2} = \sqrt{1000} \approx 32$.

On considère que la fréquence maximale de déplacement de l'axe linéaire de la canne (liée au mouvement de la marche) est fixée à $F_{max} = 4 \text{ Hz}$. Une première approximation du comportement du système en boucle ouverte est proposée par une fonction de transfert $H_{BO}(p)$ de la forme $H_{BO}(p) = \frac{K_{BO}}{p}$ avec $K_{BO} = 1/30$ pour des fréquences inférieures à F_{max} .

Question 8 Justifier la validité de cette modélisation approchée à l'aide de la réponse fréquentielle du système en boucle ouverte (voir DR Q7).



V Correction proportionnelle

Pour la suite, on modélise le comportement du système en boucle ouverte par $H_{BO}(p) = \frac{K_{BO}}{p}$ avec $K_{BO} = 1/30$. On considère un correcteur à action proportionnelle tel que $C(p) = K_{corr}$. Le schéma-bloc du système non perturbé correspond alors à celui de la figure 7.

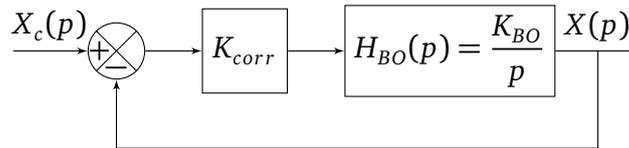


Figure 7 – Schéma-bloc simplifié du système non perturbé avec $C(p) = K_{corr}$

Question 9 Déterminer l'expression littérale de la forme canonique de $H_{BF}(p) = \frac{X(p)}{X_c(p)}$, fonction de transfert en boucle fermée de la modélisation de la figure 7.

Question 10 Déterminer les paramètres caractéristiques de $H_{BF}(p)$ et en déduire les performances de cette modélisation pour $C(p) = K_{corr} = 1$. Conclure vis-à-vis des exigences d'asservissement de l'axe linéaire.

On se propose de modifier la valeur de K_{corr} de manière à vérifier l'exigence de rapidité de l'asservissement.

Question 11 Quelle est l'influence de la modification du gain K_{corr} sur les diagrammes de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Question 12 Déterminer la valeur numérique à donner à K_{corr} pour assurer le temps de réponse à 5% lié à l'exigence de rapidité de de l'asservissement de l'axe linéaire.

La figure 8 donne l'évolution de la réponse temporelle $x(t)$ du système réel non perturbé à un échelon en déplacement de valeur finale $x_0 = 10$ mm, pour une correction proportionnelle $K_{corr} = 1500$.

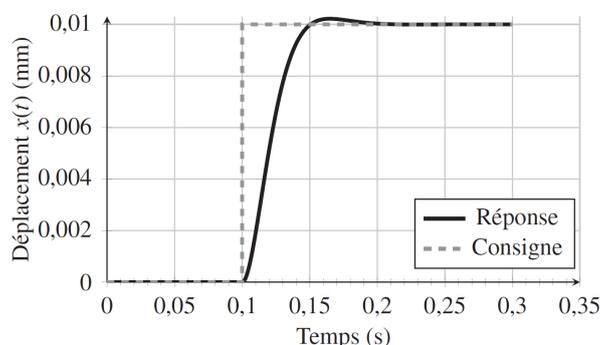
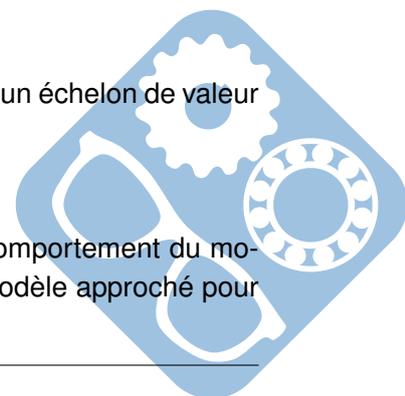


Figure 8 – Évolution de la réponse temporelle $x(t)$ du système réel non perturbé à un échelon de valeur $x_0 = 10$ mm, pour $K_{corr} = 1500$

Question 13 L'évolution de la réponse du système est-elle cohérente avec le comportement du modèle retenu ? Justifier. Quelle modification faudrait-il apporter au modèle approché pour retrouver cette forme de réponse temporelle ?



Pour la suite, on modélise la fonction de transfert en boucle ouverte du système par

$$H_{BO}(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{K_{BO}}{1 + \tau_{BO}p} \text{ avec } K_{BO} = \frac{1}{30} \text{ s}^{-1} \text{ et } \tau_{BO} = 9 \text{ ms.}$$

- Question 14** Donner la forme canonique de la nouvelle fonction de transfert $H_{BF}(p) = \frac{X(p)}{Xc(p)}$ toujours pour une correction proportionnelle de gain K_{corr} et identifier ses paramètres caractéristiques.
- Question 15** Quelle valeur maximale de K_{corr} , notée K_{corr}^{MAX} , permet de vérifier les critères de précision et de dépassement de l'asservissement de l'axe linéaire ?
- Question 16** Déterminer la valeur du temps de réponse à 5 % de ce modèle pour $K_{corr} = K_{corr}^{MAX}$ à partir de l'abaque du temps de réponse réduit (figure 9).

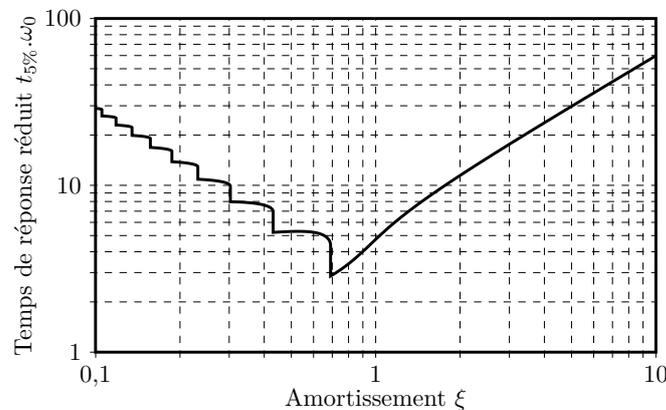


Figure 9 – Abaque des temps de réponse réduit

La figure 10 donne les évolutions des réponses temporelles $x(t)$ du système réel avec prise en compte de la perturbation (F_p constante et égale à 175 N) à un échelon en déplacement de valeur finale $x_0 = 10$ mm, pour une correction proportionnelle $K_{corr} = 1500$ et pour $K_{corr} = K_{corr}^{MAX}$.

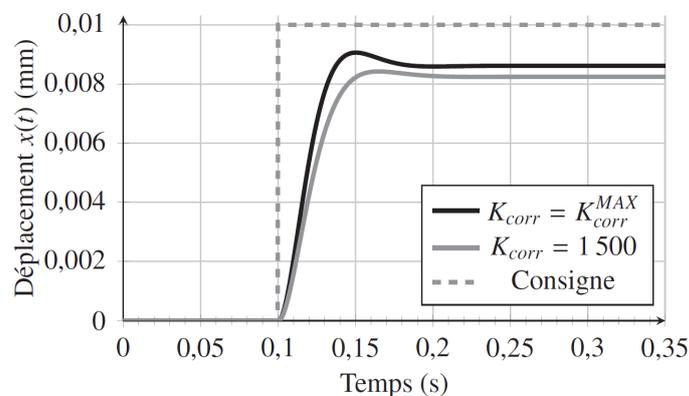
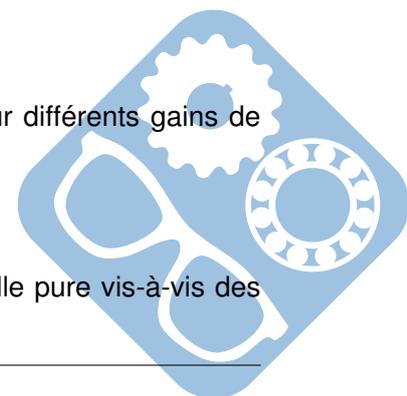


Figure 10 – Réponses indicielles $x(t)$ du système perturbé ($x_c = 10$ mm), pour différents gains de correction proportionnelle K_{corr}

- Question 17** Conclure sur les capacités de la correction à action proportionnelle pure vis-à-vis des performances à atteindre.



VI Correction avec action proportionnelle et intégrale généralisée

Le correcteur finalement retenu est un correcteur avec action proportionnelle et intégrale généralisée. La fonction de transfert $C(p)$ prend alors la forme suivante :

$$C(p) = K_{corr} \cdot \frac{1 + T_d p}{p} \text{ avec } K_{corr} \gg 1 \text{ et } T_d < 1 \text{ s.}$$

Question 18 Montrer que $FTBO(p) = \frac{K_{BO} \cdot K_{corr} \cdot (1 + T_d p)}{p^2 \cdot (1 + \tau_{BO} \cdot p)}$

Question 19 Montrer qu'il existe un ω_1 et un ω_2 , tel que :

- si $\omega < \omega_1$, alors $(1 + T_d j\omega) \approx 1$ et $(1 + \tau_{BO} j\omega) \approx 1$,
- si $\omega_1 < \omega < \omega_2$, alors $(1 + T_d j\omega) \approx T_d j\omega$ et $(1 + \tau_{BO} j\omega) \approx 1$
- si $\omega_2 < \omega$, alors $(1 + T_d j\omega) \approx T_d j\omega$ et $(1 + \tau_{BO} j\omega) \approx \tau_{BO} j\omega$.

Déterminer ω_1 et un ω_2 .

Question 20 En utilisant les approximations précédentes, déterminer l'expression simplifiée de $FTBO(p)$ dans les 3 cas précédents et compléter le tableau du document réponse.

La figure 11 représente les diagrammes de Bode du système en boucle ouverte avec correcteur PI Généralisé pour $K_{corr} = 1000$ et $T_d = 0,2$ s.

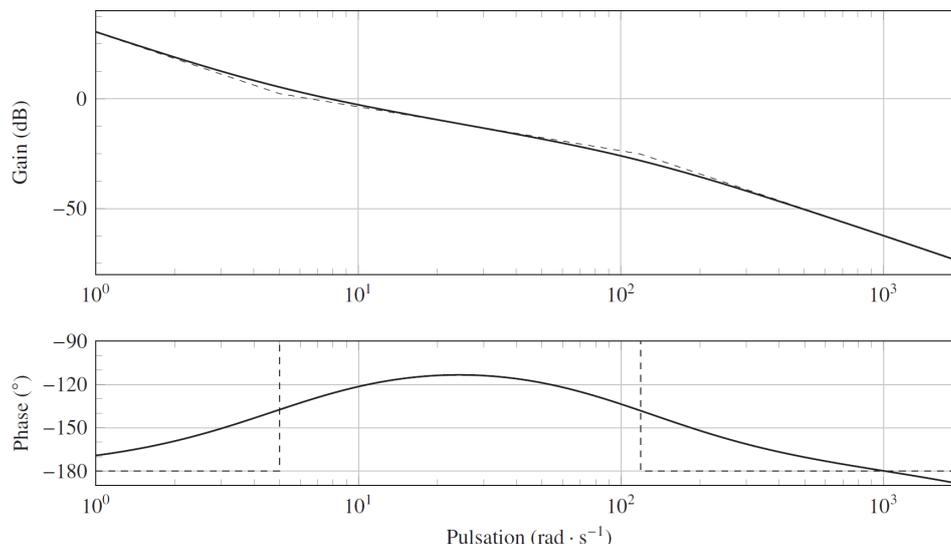


Figure 11 – Diagrammes de Bode du système en boucle ouverte avec correcteur PI Généralisé avec $K_{corr} = 1000$ et $T_d = 0,2$ s

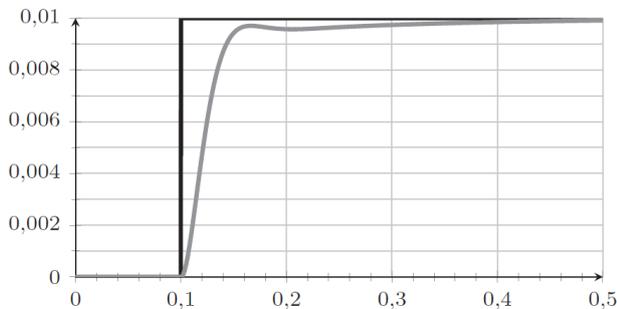
Question 21 Justifier le comportement asymptotique des diagrammes de Bode à partir des résultats précédents.

Avec cette correction, le système est précis mais les valeurs de marge de gain¹ et marge de phase² sont telles que le système n'est pas assez rapide. La valeur du gain K_{corr} a donc été ajustée pour se rapprocher des valeurs limites de marges de gain et de phase autorisées.

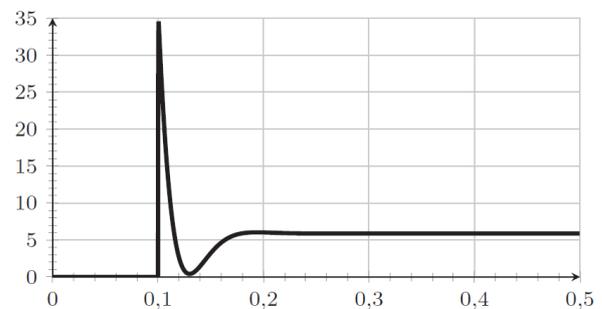
1. Marge de gain M_G : différence entre le gain réel pour la pulsation particulière ω telle que pour cette pulsation la phase soit égale à -180° et le gain nul.

2. Marge de phase M_φ : différence entre -180° et la phase réelle pour la pulsation ω_1 telle que pour cette pulsation le gain en décibel soit égal à 0 dB.

Les figures 12a et 12b, donnent les évolutions temporelles de la position $x(t)$ du système simulé, perturbé et corrigé du déplacement $x(t)$ (en mm) et de l'intensité simulée (en Ampères) circulant au sein du moteur pour une consigne de déplacement $x_c(t) = x_0 u(t)$ d'amplitude $x_0 = 10$ mm.



(a) Déplacement (mm) en fonction du temps (s)



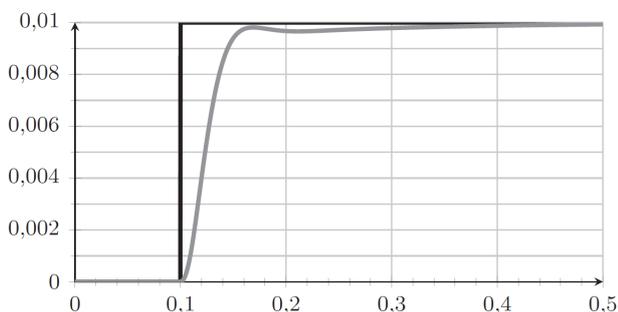
(b) Intensité simulée (A) en fonction du temps (s)

Figure 12 – Évolutions temporelles du déplacement $x(t)$ et de l'intensité $i(t)$ du système simulé, perturbé et corrigé, soumis à un échelon d'amplitude $x_0 = 10$ mm

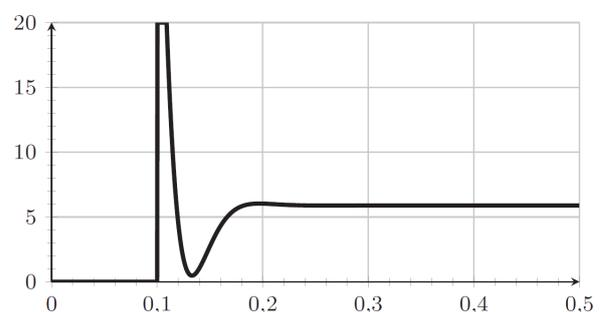
Le variateur du moteur permet de protéger les éléments électroniques des surintensités qui pourraient apparaître lors de la commande. Afin de prendre en compte cette protection, on décide d'ajouter un bloc saturation de valeur ± 20 A dans le modèle causal (voir question 3).

Question 22 Préciser, juste avant ou juste après quel bloc du **schéma-blocs de la question 3**, il faudra placer ce bloc saturation.

Les figures 14a et 14b donnent respectivement la réponse temporelle du déplacement (en mm) à un échelon de consigne $x_0 = 10$ mm et l'évolution de l'intensité simulée (en Ampère) circulant au sein du moteur pour le système corrigé avec perturbation et ajout du bloc saturation ± 20 A.



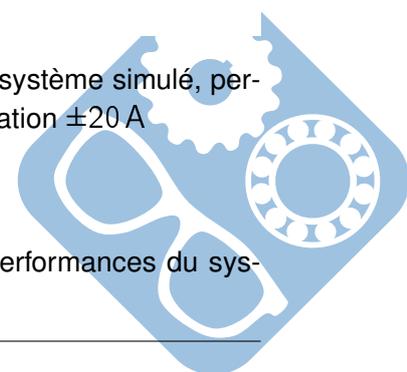
(a) Déplacement (mm) en fonction du temps (s)



(b) Intensité simulée (A) en fonction du temps (s)

Figure 13 – Évolutions temporelles du déplacement $x(t)$ et de l'intensité $i(t)$ du système simulé, perturbé et corrigé, soumis à un échelon d'amplitude $x_0 = 10$ mm avec bloc de saturation ± 20 A

Question 23 Quel est l'effet de l'ajout du bloc saturation en intensité sur les performances du système ? Conclure vis-à-vis des exigences du cahier des charges.



VII Étude de l'exigence 3.1.6 « Commande des axes asservis »

Cette partie a pour objectif d'analyser le mode de distinction des différentes phases de fonctionnement de la canne robotisée.

Lors de la marche avec une canne conventionnelle, il est possible de constater une synchronisation du mouvement de la canne conventionnelle avec celui de la jambe qu'elle assiste. Ainsi, une forte corrélation est observée entre l'angle de la canne et celui de la hanche de la jambe invalide.

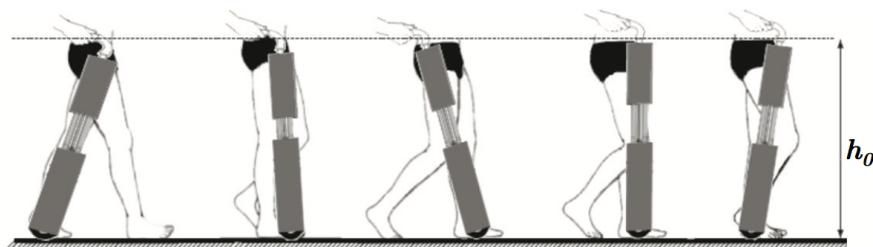


Figure 14 – Synchronisation souhaitée du prototype de canne robotisée avec la marche

Selon la figure 14, le mode de commande suivant a été retenu pour contrôler le mouvement du proto-type de canne robotisée.

- Lors de la phase de balancement de la jambe invalide, l'angle de la canne active par rapport à la verticale est asservi sur l'angle de la hanche de la jambe invalide. Cette tâche est accomplie en gardant la hauteur de la poignée h_0 constante afin de ne pas perturber la position de la main de l'utilisateur,
- Lors de la phase d'appui de la jambe invalide, la roue est asservie à une vitesse nulle afin d'offrir un point d'appui immobile pour le patient. La longueur de l'axe télescopique est asservie pour garder la hauteur de la poignée h_0 constante de la canne.

Il est donc nécessaire de maintenir la hauteur de poignée h_0 constante pour les deux phases. Ceci impose une relation entre l'inclinaison de la canne et sa longueur.

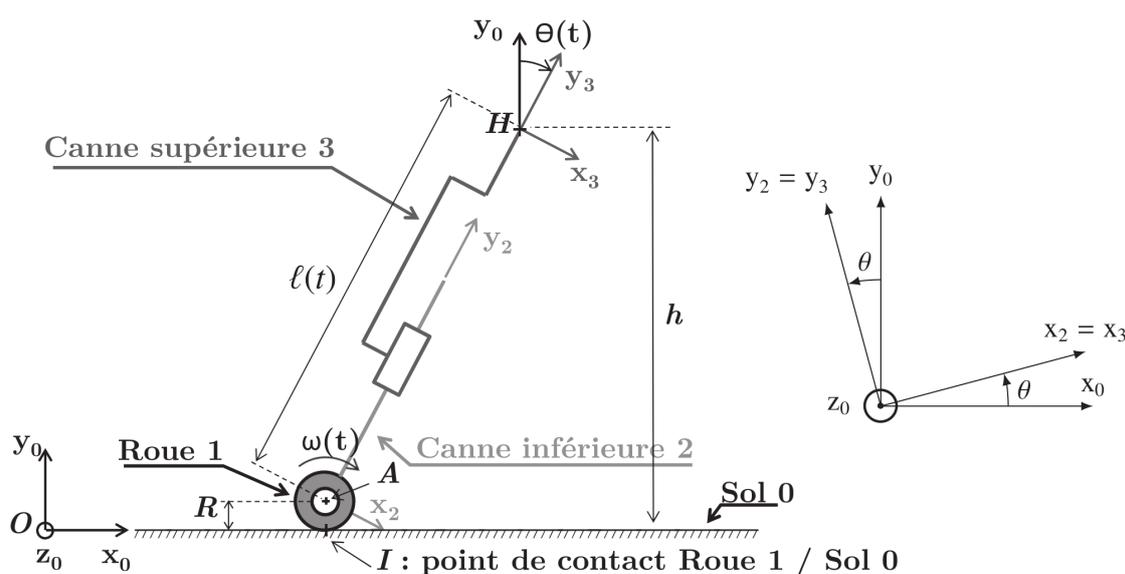
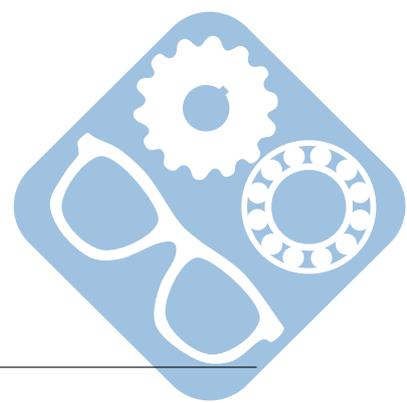


Figure 15 – Modélisation cinématique et paramétrage du prototype de canne robotisée

La figure 15 présente le modèle cinématique et les notations retenues pour le paramétrage du proto-type de canne. Sur cette figure, $l(t)$ représente la longueur AH, $\theta(t)$ correspond à l'angle d'inclinaison



IX Document réponse

Question 1:

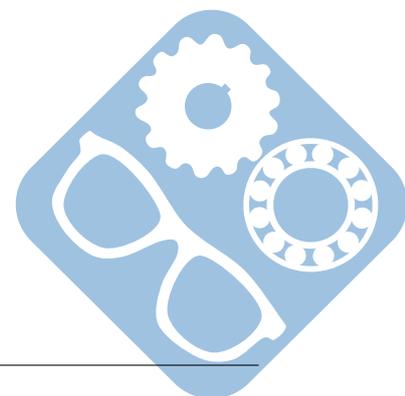
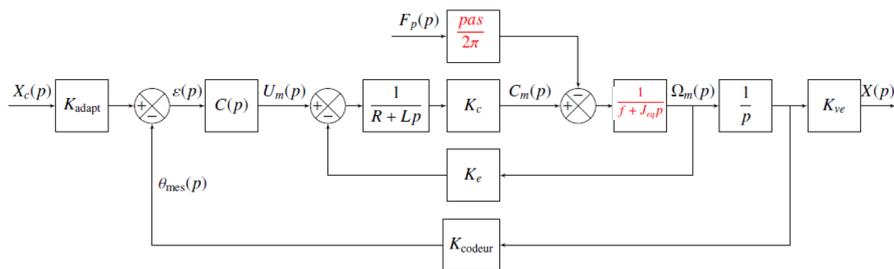
Selon la figure 3, en marche saine, les évolutions des efforts normaux sur chaque jambe et les durées de chacune des phases sont identiques. La figure 5 montre que, lors d'une marche perturbée, la phase de double appui est plus longue, 20% au lieu de 10% du cycle de marche - phase rassurante et moins douloureuse - et que la jambe invalide (gauche ici) est moins sollicitée avec un temps d'appui plus court (30% au lieu de 40%). Les efforts normaux sont en moyenne équivalents en intensité pour les deux marches, cependant leurs évolutions diffèrent dans le cas de la marche perturbée avec un effort quasi constant lors de l'appui de la jambe invalide et un effort également plus constant lors de l'appui de la jambe valide.

Question 2:

La canne prend en charge une partie des efforts normaux supportés par la jambe invalide. En contrepartie, la phase de double appui s'en trouve encore rallongée.

Question 3:

$$(J_{eq}p + f)\Omega_m(p) = C_m(p) - F_p(p)\frac{pas}{2\pi}$$



Question 4:

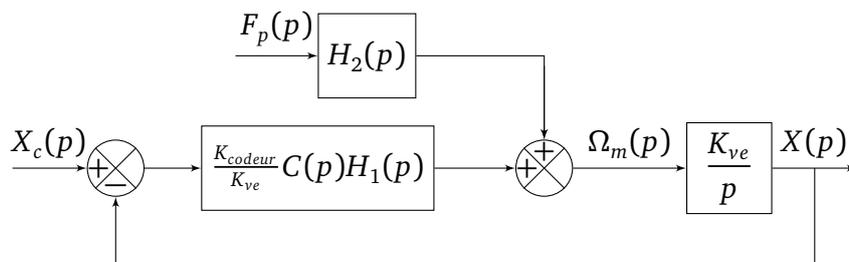
$$H_1(p) = \frac{K_c}{(R + Lp)(J_{eq}p + f) + K_c K_e} = \frac{\frac{K_c}{Rf + K_c K_e}}{1 + \frac{RJ + Lf}{Rf + K_c K_e} p + \frac{LJ}{Rf + K_c K_e} p^2} \text{ et}$$

$$H_2(p) = \frac{pas}{2\pi} \frac{1}{K_c} (R + Lp) H_1(p) = \frac{R \frac{pas}{2\pi} (1 + \frac{L}{R} p)}{1 + \frac{RJ + Lf}{Rf + K_c K_e} p + \frac{LJ}{Rf + K_c K_e} p^2}$$

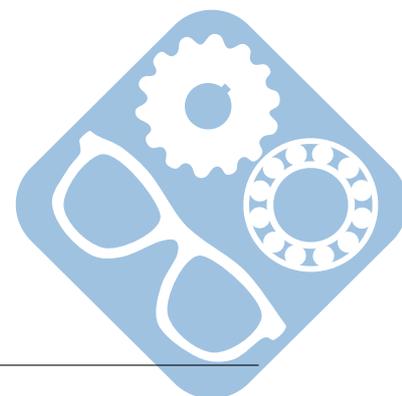
Question 5:

La condition $\varepsilon = 0$ quand $x_c = x$ impose $K_{adapt} = \frac{K_{codeur}}{K_{ve}} = \frac{79,6}{0,477} \approx \frac{80}{0,5} \approx 160 \text{ inc/min}$

Question 6:



$$H_{BO1}(p) = K_{codeur} C(p) H_1(p) \frac{1}{p}$$



Question 7:

Tracés asymptotiques de $H_{BO1}(p)$. Valeurs de T_1 , T_2 et K_{BO} .

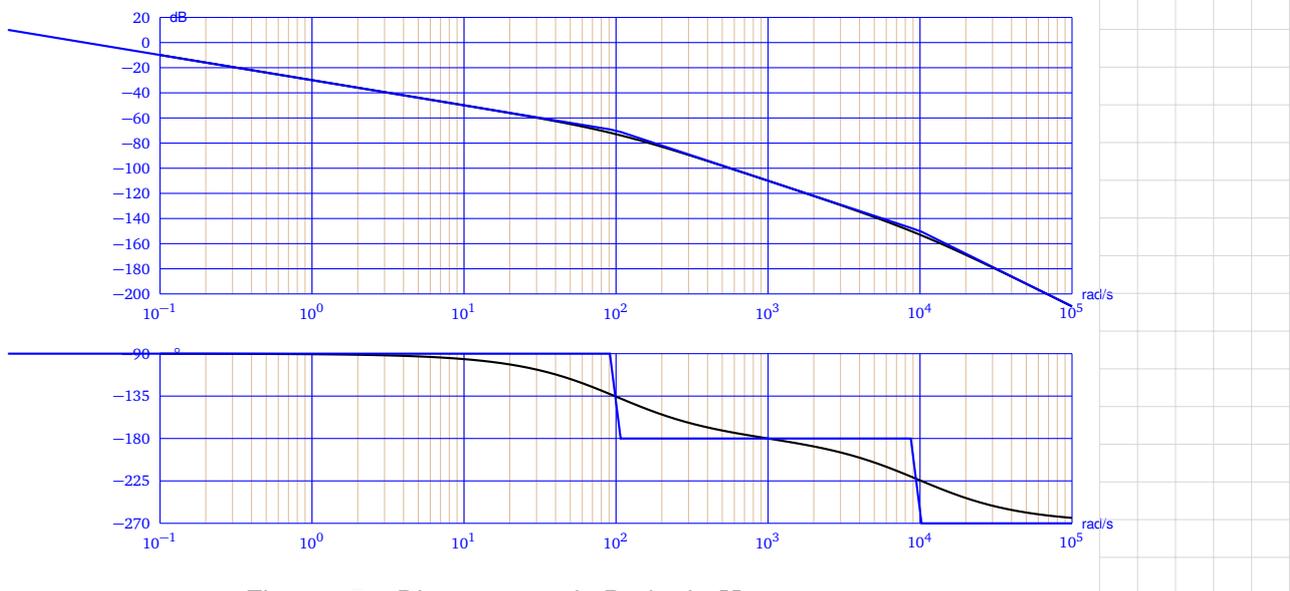


Figure 17 – Diagrammes de Bode de H_{BO}

On obtient $\omega_{c1} = 10^4 \text{ rad/s}$ donc $T_1 = 10^{-4} \text{ s} = 0,1 \text{ ms}$, et $\omega_{c2} = 10^2 \text{ rad/s}$ donc $T_2 = 10^{-2} \text{ s} = 10 \text{ ms}$.

On a aussi $20 \log(K_{BO}) = -30 \text{ dB}$ d'où $K_{BO} = 10^{\frac{-30}{20}} = 0,032$.

Question 8:

$F_{MAX} = 4 \text{ Hz}$ correspond à une sollicitation de pulsation $\omega_{MAX} = 4 \times 2\pi = 25 \text{ rad/s}$. On constate que $\omega_{MAX} < \omega_{c2} = 100 \text{ rad/s} \ll \omega_{c1} = 10^4 \text{ rad/s}$. Pour $\omega < \omega_{MAX}$, le système se comporte donc comme un intégrateur pur de gain égal à K_{BO} . L'approximation de $H_{BO}(p)$ par $\frac{K_{BO}}{p}$ avec $K_{BO} = \frac{1}{30} \approx 0.032$ est donc acceptable.

Question 9:

$$H_{BF}(p) = \frac{X(p)}{Xc(p)} = \frac{K_{corr} \frac{K_{BO}}{p}}{1 + K_{corr} \frac{K_{BO}}{p}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_{corr} K_{BO}} p}$$

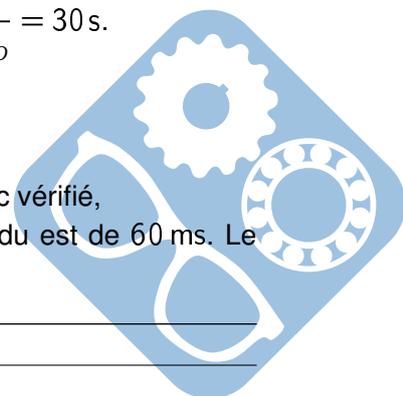
Question 10:

Avec $K_{corr} = 1$, $H_{BF}(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{K_{BO}}}$, donc 1er ordre, $K = 1$ et $\tau = \frac{1}{K_{BO}}$.

On en déduit que la gain est unitaire et que la constante de temps est $\tau = \frac{1}{K_{BO}} = 30 \text{ s}$.

Les performances de ce système sont donc :

- système stable car système du 1er ordre → cdc vérifié,
- système précis car de gain unitaire → cdc vérifié,
- système ne présente pas de dépassement car système du 1er ordre → cdc vérifié,
- $tr_{5\%} = 3 \times 30 = 90 \text{ s}$ → cdc non vérifié car le temps de réponse attendu est de 60 ms. Le système avec $K_{corr} = 1$ est donc trop lent.



Question 11:

L'augmentation du gain K_{corr} entraîne une translation de la courbe de gain uniquement selon l'axe des ordonnées.

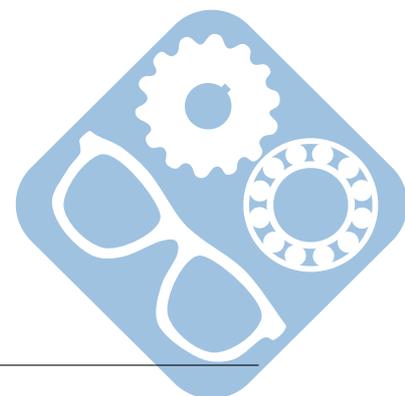
Question 12:

Il faut augmenter K_{corr} , tel que $tr_{5\%} = 3 \times \frac{1}{K_{corr} \cdot K_{BO}} \leq 60$ ms. Donc

$$K_{corr} \geq \frac{3}{60 \cdot 10^{-3} \cdot K_{BO}}. \text{ L'application numérique donne } K_{corr} \geq 1500.$$

Question 13:

L'allure de la réponse ne correspond pas à celle d'un système du 1^{er} ordre car un dépassement est observé. Avec $K_{corr} = 1500$, le système en boucle ouverte ne peut plus être modélisé par un intégrateur pur de gain K_{BO} , en effet cette valeur élevée de K_{corr} fait monter la courbe de gain, le système a une bande passante plus élevée et l'action du terme $\frac{1}{1+T_2 \cdot p}$ ne peut plus être négligée. Le comportement du système doit donc être modélisé par celui d'un système du second ordre pour se rapprocher du comportement observé.



Question 14:

$$H_{BF}(p) = \frac{K_{corr} \frac{K_{BO}}{p(1 + \tau_{BO}p)}}{1 + K_{corr} \frac{K_{BO}}{p(1 + \tau_{BO}p)}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_{corr}K_{BO}}p + \frac{\tau_{BO}}{K_{corr}K_{BO}}p^2}$$

$$\text{D'où le gain est unitaire, } \omega_0 = \sqrt{\frac{K_{corr}K_{BO}}{\tau_{BO}}} \text{ et } z = \frac{1}{2\sqrt{\tau_{BO}K_{corr}K_{BO}}}$$

Question 15:

Le critère de précision est satisfait car gain unitaire.

Pour assurer un 1er dépassement $D1\% \leq 5\%$, il faut que le système du second ordre ait un coefficient d'amortissement z , tel que $z \geq 0,7$ donc $K_{corr} \leq \frac{1}{(2 \times 0,7)^2 \cdot \tau_{BO} \cdot K_{BO}}$.

L'application numérique donne $K_{corr} \leq 1700$. On prend donc $K_{corr}^{MAX} = 1700$.

Question 16:

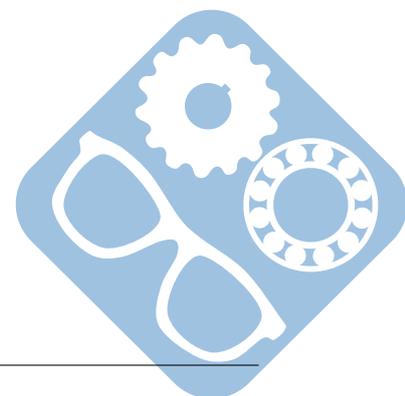
D'après l'abaque du temps de réponse réduit, pour $z = 0,7$ on relève $tr_{5\%} \cdot \omega_0 \simeq 3$. Or $\omega_0 =$

$$\sqrt{\frac{K_{corr}^{MAX} \cdot K_{BO}}{\tau_{BO}}}, \text{ donc } tr_{5\%} = 3 \cdot \sqrt{\frac{\tau_{BO}}{K_{corr}^{MAX} \cdot K_{BO}}}$$

L'application numérique donne : $tr_{5\%} \simeq 38 \text{ ms} < 60 \text{ ms} \Rightarrow \text{cdc vérifié!}$

Question 17:

Les performances de stabilité, rapidité et de 1er dépassement sont vérifiées. Cependant, le système avec correction proportionnelle n'arrive pas à atténuer suffisamment la perturbation (l'erreur est de l'ordre de 15 à 20% bien supérieure au 5% du cahier des charges). Un autre type de correction doit donc être envisagé pour satisfaire l'ensemble des critères.



Question 18:

$FTBO(p) = C(p) \cdot H_{BO}(p)$, on retrouve l'expression demandée.

Question 19:

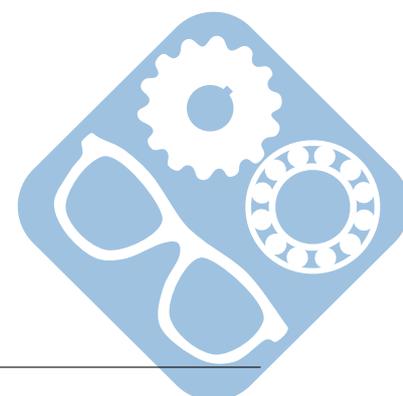
Si $\omega < \frac{1}{a}$, alors $1 + ja\omega$, alors $a\omega < 1$, donc on peut négliger $ja\omega$ devant 1. Ainsi, $\omega_1 = \frac{1}{0,2} = 5 \text{ rad/s}$ et $\omega_2 = \frac{1}{9 \cdot 10^{-3}} = 111 \text{ rad/s}$.

Question 20:

ω	$-\infty \quad \omega_1$	$\omega_1 \quad \omega_2$	$\omega_2 \quad +\infty$
$FTBO(p)$	$\frac{K_{BO} \cdot K_{corr}}{p^2}$	$\frac{K_{BO} \cdot K_{corr} \cdot T_d}{p}$	$\frac{K_{BO} \cdot K_{corr}}{p^2}$
Phase	-180	-90	-180
Pente	-40dB/decade	-20dB/decade	-40dB/decade

Question 21:

Les résultats trouvés précédemment correspondent aux tracés asymptotiques de la figure.



Question 22:

Le saturateur en courant doit être placé entre le bloc $\frac{1}{R + L.p}$ et le bloc K_c .

Question 23:

Cela diminue sensiblement les oscillations donc, cela améliore la réponse du système.

Question 24:

On peut écrire la fermeture géométrique suivante : $\vec{IA} + \vec{AH} = \vec{IH}$, c'est à dire $R.\vec{y}_0 + \ell(t).\vec{y}_2 = x.\vec{x}_0 + h.\vec{y}_0$.

Par projection sur \vec{y}_0 , il vient :

$$R + \ell(t).\cos(\theta(t)) = h = h_0$$

Question 25:

La fermeture géométrique $\vec{IA} + \vec{AH} = \vec{IH}$ s'écrit avec le paramétrage donné :

$R.\vec{j}_0 + \ell.\vec{j}_3 = \lambda(t).\vec{v}$. En projetant cette équation dans la base \mathcal{R}_0 , on obtient :

$$/ \vec{i}_0 : 0 - \ell.\sin(\theta) = -\lambda.\sin(\beta) \text{ (eq1)}$$

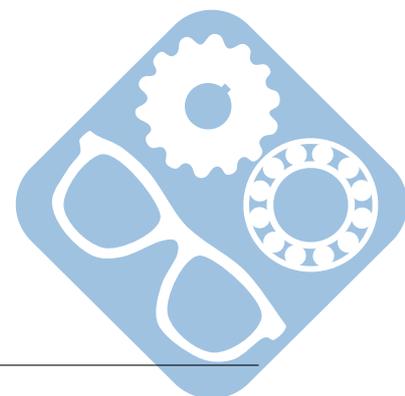
$$/ \vec{j}_0 : R + \ell.\cos(\theta) = \lambda.\cos(\beta) \text{ (eq2)}$$

On obtient la relation demandée en éliminant le paramètre λ . Pour cela on considère $\frac{\text{(eq1)}}{\text{(eq2)}}$ en s'assurant que $\beta \neq \pi/2$, il vient :

$$\tan(\beta) = \frac{\ell.\sin(\theta)}{R + \ell.\cos(\theta)}$$

Question 26:

$$\tan(\beta) = \frac{\ell.\sin(\theta)}{R + \ell.\cos(\theta)} = \frac{\ell.\sin(\theta)}{h} = \frac{\ell.\sin(\theta)}{h} \cdot \frac{h-R}{\ell.\cos(\theta)} = \frac{h-R}{h} \cdot \tan(\theta)$$



Question 27:

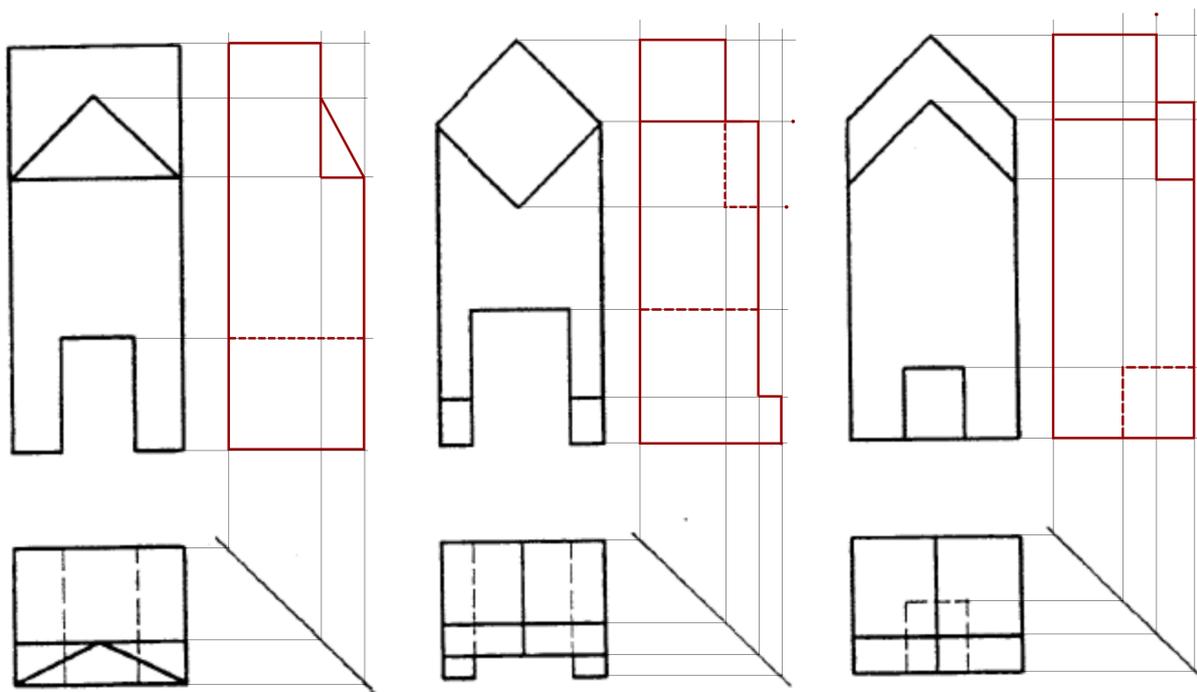
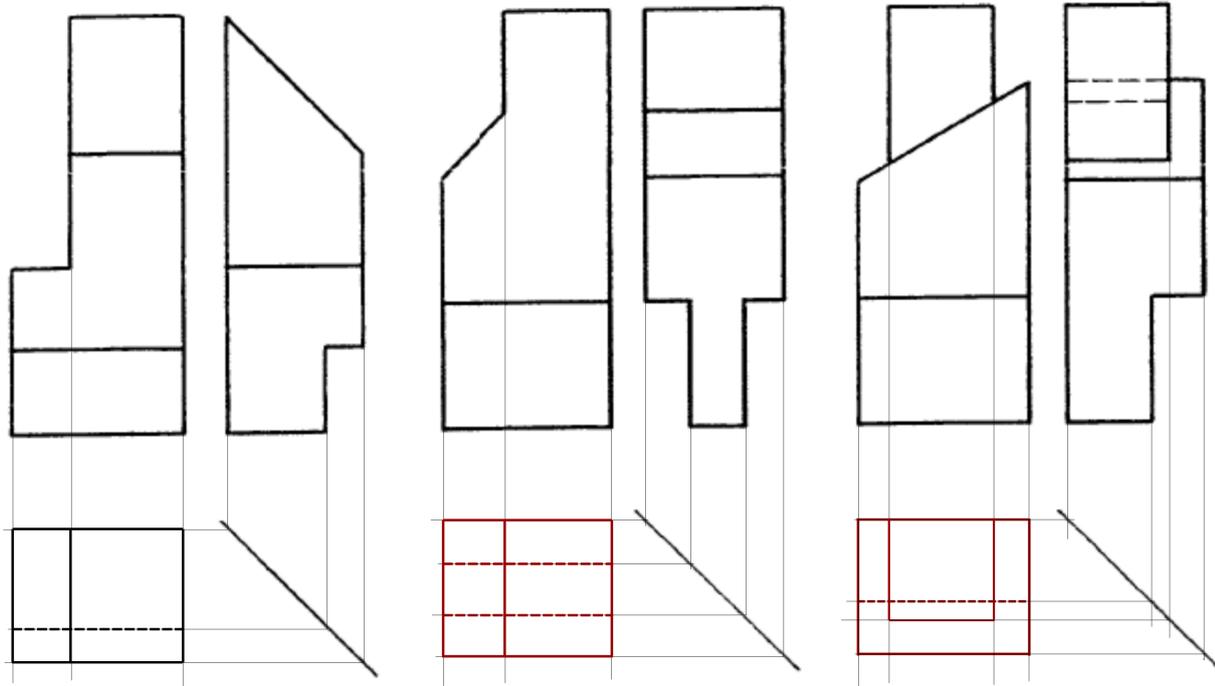


Figure 18 – Vues à compléter

