

# DS 06- GyroLock

**Avec Correction**

PTSI

Lundi 05 juin 2023

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Contexte</b>	<b>2</b>
<b>II</b>	<b>Résultats expérimentaux et modélisation du mécanisme</b>	<b>4</b>
<b>III</b>	<b>Effet gyroscopique et modélisation du stabilisateur</b>	<b>7</b>
<b>IV</b>	<b>Réglage de la loi de commande du stabilisateur</b>	<b>13</b>
<b>V</b>	<b>Choix matériau-procédé</b>	<b>13</b>
<b>VI</b>	<b>Conception</b>	<b>14</b>

# GyroLock

## I Contexte

Les recours aux opérations chirurgicales pour traiter les pathologies cardiaques sont de plus en plus courants. La plupart de ces opérations est actuellement réalisée après avoir arrêté le cœur du patient et mis en place une circulation et une oxygénation extérieures du sang. Cette procédure et les suites opératoires sont lourdes. Il est possible d'opérer sans arrêter le cœur, mais ce type d'opération à cœur battant est plus délicat pour le chirurgien à cause des mouvements de la zone à opérer dus à la respiration et aux battements du cœur. Les battements cardiaques, contrairement aux mouvements respiratoires, ne sont pas cycliques et engendrent un déplacement rapide de la zone à opérer. Une intervention robotisée type maître-esclave avec prise en compte des battements cardiaques pour le déplacement du robot esclave est compliquée et dangereuse.

Lors d'une opération à cœur battant, un maintien mécanique de la zone à opérer est indispensable. Ce maintien en position est réalisé par un stabilisateur composé de deux doigts en contact avec la zone à opérer. Le déplacement de la zone à opérer est ainsi diminué. Le stabilisateur est lié à la table d'opération par une attache reconfigurable. La stabilisation (figure 1) peut être active ou passive. Dans le cas d'une stabilisation active, un actionneur génère une action mécanique de compensation dans le but de diminuer le mouvement de la zone à opérer qui n'a pas été filtré par le stabilisateur passif. Ce mouvement constitue un déplacement résiduel.

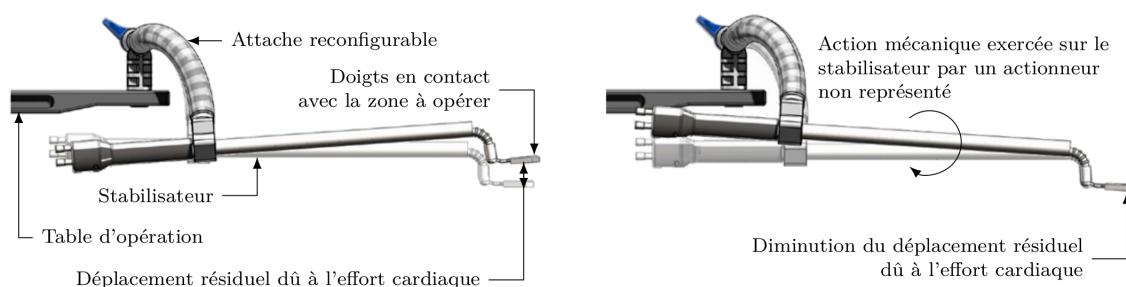
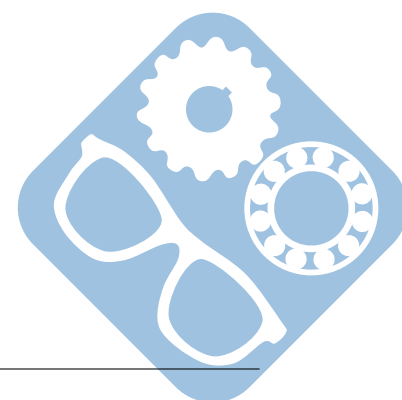


FIGURE 1 – Stabilisations passive (à gauche) et active (à droite)



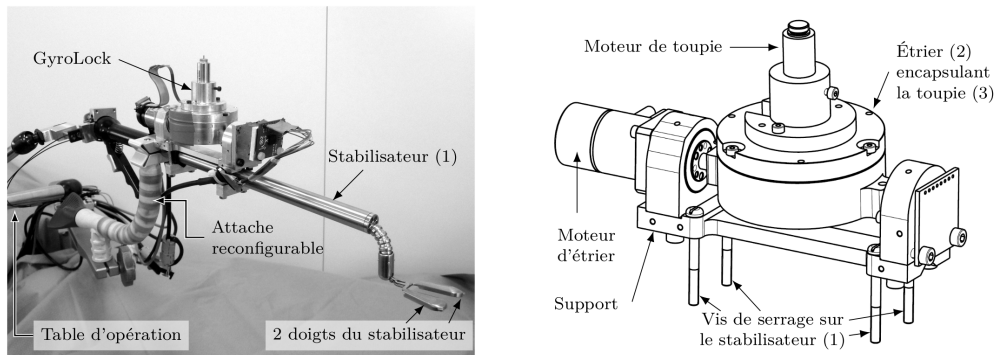


FIGURE 2 – Photo du GyroLock installé sur un stabilisateur (à gauche) et son modèle volumique (à droite)

Ce système, nommé GyroLock, présente deux avantages par rapport aux autres stabilisateurs actifs existants :

- il peut être mis en place sur la plupart des stabilisateurs passifs afin de limiter l'investissement financier des structures hospitalières voulant s'équiper de stabilisateurs actifs ;
- il ne nécessite pas de liaison avec la table d'opération donc le stabilisateur peut être placé dans n'importe quelle position. En effet, contrairement aux autres stabilisateurs actifs existants, le GyroLock ne comporte pas d'actionneur dont le stator est lié à la table d'opération.

Le GyroLock est muni de deux actionneurs. Le moteur de toupie met en rotation la toupie (3) par rapport à l'étrier (2) autour d'un axe initialement vertical. Un second moteur électrique, appelé moteur d'étrier, entraîne en rotation l'étrier (2) par rapport au support lié au stabilisateur (1) autour d'un axe colinéaire à la direction du stabilisateur (1). Cette seconde rotation génère un effet dynamique appelé effet gyroscopique. Cet effet peut être considéré comme une action mécanique permettant d'atténuer le déplacement résiduel de la zone à opérer en contact avec les doigts du stabilisateur (1).

### Exigences fonctionnelles

Le diagramme des exigences partiel de la stabilisation cardiaque est donné figure 3.

L'objectif de ce sujet est de montrer que l'utilisation d'un actionneur à effet gyroscopique permet d'améliorer le maintien de la zone à opérer. Les étapes nécessaires à la validation de cet objectif sont les suivantes :

- dans un premier temps, l'analyse de résultats expérimentaux permettra de modéliser le mécanisme ;
- après avoir analysé l'effet gyroscopique et réglé le correcteur empêchant la dérive de l'étrier, une étude dynamique du stabilisateur permettra de déterminer un modèle de comportement du stabilisateur ;
- enfin, la partie III traitera du choix d'une loi de commande permettant de respecter les exigences figure 3.

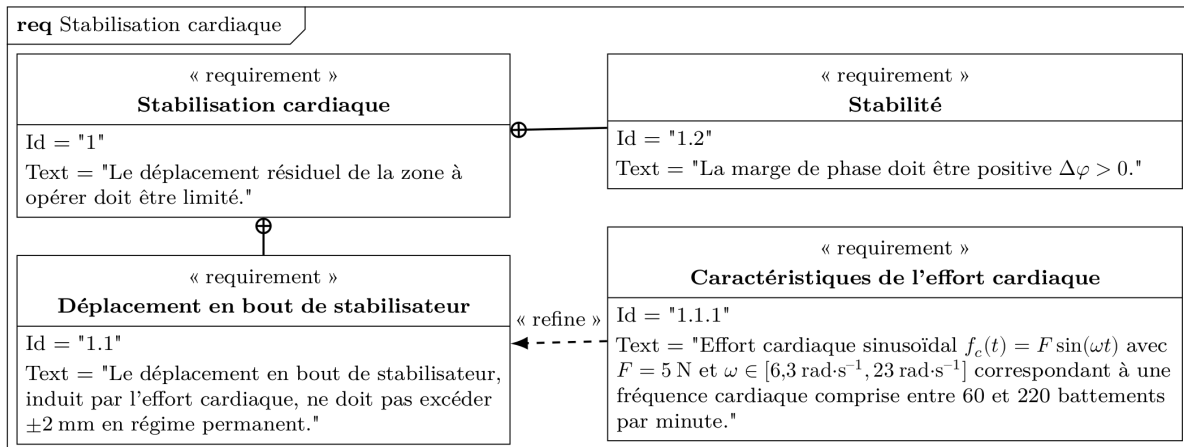


FIGURE 3 – Diagramme des exigences partiel

## II Résultats expérimentaux et modélisation du mécanisme

**Objectif :** Exploiter les résultats d'une campagne expérimentale afin de modéliser la liaison entre la table d'opération et le stabilisateur, puis exprimer le déplacement en bout de stabilisateur.

### II.1 Mesure du déplacement en bout de stabilisateur

Un stabilisateur passif (sans système de stabilisation active) a été testé sur un sujet porcin de 40 kg sous assistance respiratoire et anesthésie générale. Les volume et fréquence respiratoires sont respectivement de 300 mL et 15,6 respirations par minute. Une mesure du déplacement et de l'effort cardiaque au bout du stabilisateur passif a été effectuée.

Le système cardiovasculaire porcin étant similaire à celui d'un être humain, il est possible, grâce à une méthode non détaillée dans cette étude, d'estimer les valeurs équivalentes pour un homme de 90 kg. La figure 4 donne l'évolution temporelle, pour un patient humain, du déplacement du point P situé au bout du stabilisateur (figure 5).

**Question 1 :** Déterminer, à partir de la figure 4, les valeurs minimales et maximales de déplacement du point P dans la direction dorso-ventrale, notées  $u_d^{\max}$  et  $u_d^{\min}$ , et dans le plan frontal, notées  $u_f^{\max}$  et  $u_f^{\min}$ . Déterminer laquelle des deux stabilisations (passive ou active) est nécessaire pour respecter le diagramme des exigences figure 3.

La liaison entre le stabilisateur (1) et la table d'opération (0) sera modélisée de trois façons différentes selon la finalité :

- par une liaison sphérique (partie II.2) afin de déterminer quelles rotations doivent être prises en compte pour représenter le mouvement du stabilisateur par rapport à la table d'opération,
- par un encastrement (partie III.1) afin d'étudier l'effet gyroscopique sans prendre en compte le mouvement du stabilisateur,
- par une liaison non parfaite (partie III.3) modélisant la flexibilité de l'attache reconfigurable.

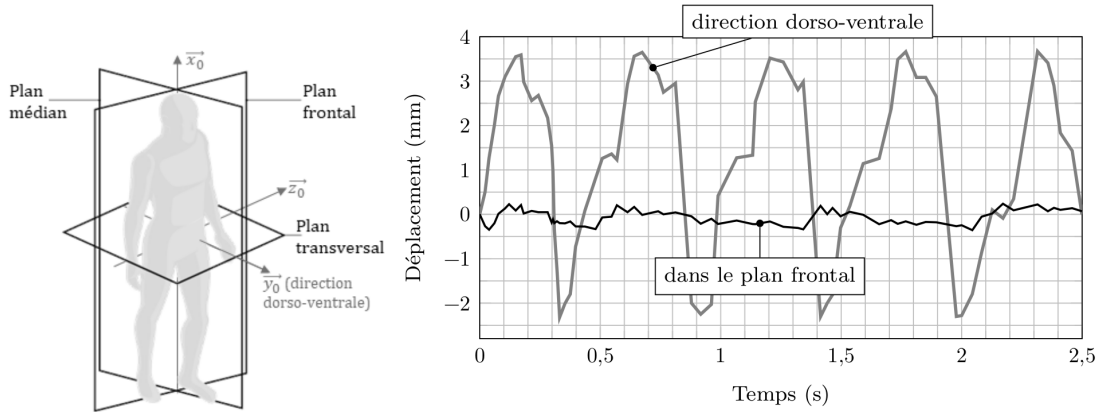


FIGURE 4 – Plans anatomiques, déplacements résiduels dans le plan frontal et dans la direction dorso-ventrale

## II.2 Formulation du modèle de la liaison entre la table d’opération et le stabilisateur

La modélisation retenue pour estimer le déplacement du point P situé au bout du stabilisateur (1) est donnée figure 5. La direction  $\vec{y}_0$  correspond à la direction dorso-ventrale, le plan  $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0)$  est le plan frontal et l’axe « pied-tête » du patient est représenté par le vecteur  $\vec{x}_0$ . Le point  $O_0$  est un point de référence choisi, considéré comme fixe par rapport à la table d’opération (0).

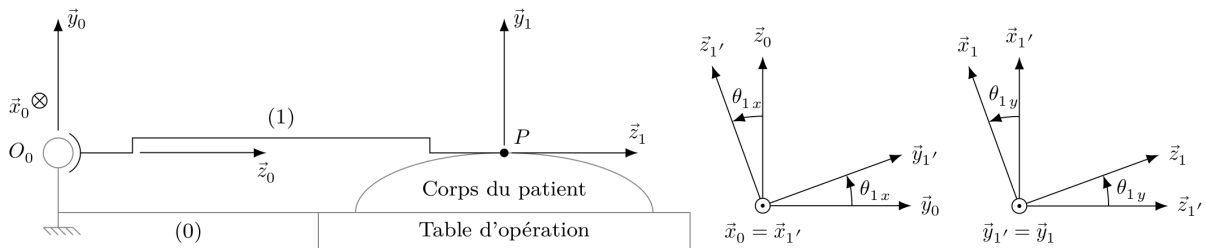
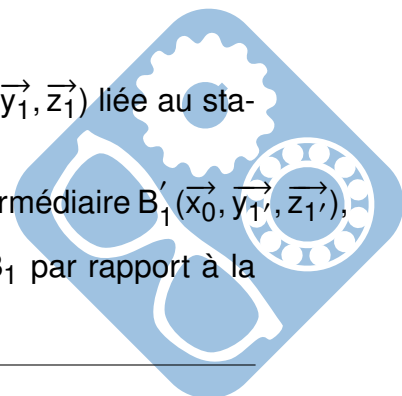


FIGURE 5 – Modélisation du stabilisateur (1) en position de référence ( $\theta_{1x} = \theta_{1y} = 0$ ) et figures de changement de base

Le déplacement du point P situé au bout du stabilisateur (1) correspond à une trop grande flexibilité de l’attache reconfigurable (figures 1 et 2) utilisée pour lier le stabilisateur à la table d’opération (0). La liaison entre les solides (0) et (1) est modélisée par une liaison sphérique de centre  $O_0$ .

Deux rotations successives permettent de positionner la base  $B_1(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  liée au stabilisateur par rapport à la base  $B_0(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  liée à la table d’opération :

- une rotation autour de  $\vec{x}_0$  d’angle  $\theta_{1x}$  permet de définir une base intermédiaire  $B'_1(\vec{x}_0, \vec{y}'_1, \vec{z}'_1)$ ,
- une rotation autour de  $\vec{y}'_1$  d’angle  $\theta_{1y}$  permet d’orienter la base  $B_1$  par rapport à la base  $B'_1$ .

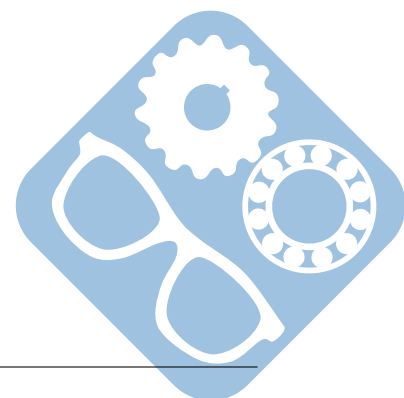


Les figures de changement de base sont données figure 5. La position du point P par rapport à la table d'opération (0) est donnée par  $\overrightarrow{OP} = L\vec{z}_1$  avec  $L = 0,3\text{m}$ . Le point  $P_0$  tel que  $\overrightarrow{OP_0} = L\vec{z}_0$  correspond à la position de référence du point P pour laquelle  $\theta_{1x} = \theta_{1y} = 0$ .

**Question 2 :** Exprimer le vecteur  $\overrightarrow{P_0P}$  dans la base  $B_0$ . En déduire l'expression de  $u_d = \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{y}_0$  correspondant au déplacement en bout de stabilisateur dans la direction dorso-ventrale et  $u_f = \|\overrightarrow{P_0P} - u_d \cdot \vec{y}_0\|$  traduisant le déplacement en bout de stabilisateur dans le plan frontal.

**Question 3 :** Déterminer les expressions linéarisées à l'ordre 1 de  $u_d$  et  $u_f$  ( $\theta_{1x}$  et  $\theta_{1y}$  sont proches de 0). En utilisant le résultat de la question 1, donner la valeur numérique (en radian) des débattements angulaires  $\Delta\theta_{1x} = \max(\theta_{1x}) - \min(\theta_{1x})$  et  $\Delta\theta_{1y}$  du stabilisateur. En déduire qu'une rotation peut être négligée (en précisant laquelle et en justifiant). En supposant la rotation d'axe  $(O_0, \vec{z}_0)$  est également négligeable, proposer une « nouvelle » liaison (en précisant ses caractéristiques géométriques) modélisant le mouvement du stabilisateur (1) par rapport à la table d'opération (0).

**Question 4 :** Préciser alors la direction du moment de compensation que devra générer le système Gyrolock afin de réduire le déplacement du point P.



### III Effet gyroscopique et modélisation du stabilisateur

**Objectif :** Étudier les actions mécaniques créées par le système GyroLock, définir et régler la chaîne d'asservissement de l'étrier puis modéliser le comportement du stabilisateur grâce à une étude dynamique.

#### III.1 Étude de l'effet gyroscopique généré par le système GyroLock

Pour déterminer les actions mécaniques créées par le système GyroLock sur le stabilisateur (1), un modèle simplifié du mécanisme, donné figure 6, est utilisé.

Ce modèle simplifié, dans lequel la liaison entre le stabilisateur (1) et la table d'opération (0) est modélisée par un encastrement, permet :

- d'étudier l'effet gyroscopique  $c_x(t)$  créé par le système GyroLock permettant de compenser l'effet de l'effort cardiaque, sans prendre en compte le mouvement du stabilisateur (1) ;
- de déterminer les conditions d'utilisation du système GyroLock afin de minimiser les autres actions mécaniques créées et considérées comme indésirables.

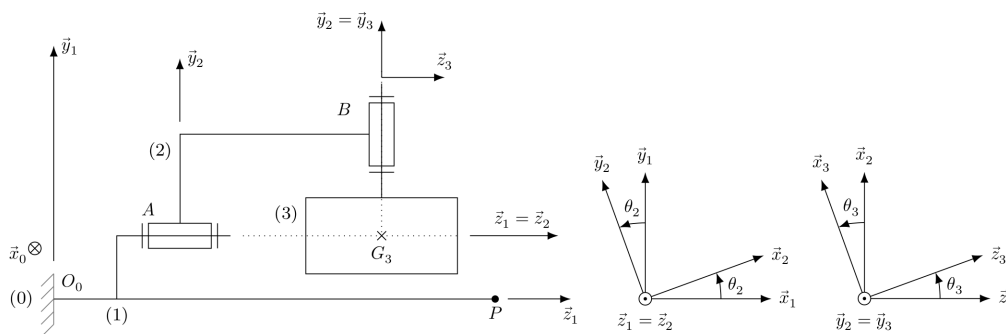


FIGURE 6 – Schéma cinématique simplifié du mécanisme (représenté pour  $\theta_2 = \theta_3 = 0$ ) et figures de changement de base

Le système GyroLock, dont la modélisation est donnée figure 6, est composé de trois solides :

- le support, relié au stabilisateur (1) de repère associé  $R_1(O_0, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ , en liaison encastrement au point  $O_0$  avec la table d'opération (0),
- l'étrier (2) de repère associé  $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2 = \vec{z}_1)$  tel que  $\theta_2 = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ ,
- la toupie (3) de repère associé  $R_3(B, \vec{x}_3, \vec{y}_2 = \vec{y}_3, \vec{z}_3)$  tel que  $\theta_3 = (\vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3)$ .

Les figures de changement de base sont données figure 6. Toutes les liaisons sont supposées parfaites et les caractéristiques inertielles des solides sont les suivantes :

- étrier (2) : masse et inertie négligeables,
- toupie (3) : masse  $m_3$ , centre d'inertie  $G_3$  tel que  $\overrightarrow{O_0G_3} = L_{G_3}\vec{z}_1 + H_{G_3}\vec{y}_1$ . L'axe  $(G_3, \vec{y}_2 = \vec{y}_3)$  étant un axe de symétrie de révolution de la toupie (3), sa matrice d'inertie au point  $G_3$  s'exprime dans la base  $B_2$  sous la forme  $I(G_3, 3) = \begin{bmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix}$

Pour la modélisation des actions mécaniques extérieures, les hypothèses suivantes sont adoptées :

- les actions mécaniques dues à la pesanteur sont négligées devant les effets dynamiques,
- l'action mécanique transmise par la liaison encastrement entre les solides (0) et (1) est modélisée au point  $G_3$  par  $\{T_{0 \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} X_{01}\vec{x}_1 + Y_{01}\vec{y}_1 + Z_{01}\vec{z}_1 \\ L_{01}\vec{x}_1 + M_{01}\vec{y}_1 + N_{01}\vec{z}_1 \end{Bmatrix}_{G_3}$

Le référentiel  $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié à la table d'opération (0) est galiléen.

**Question 5 :** Compléter le graphe d'analyse mécanique fourni sur le document réponse.

On isole le système  $\Sigma = \{1, 2, 3\}$ .

**Question 6 :** En tenant compte des hypothèses faites, faire le bilan des actions mécaniques extérieures à  $\Sigma = \{1, 2, 3\}$ .

On cherche à exprimer les composantes  $L_{01}$ ,  $M_{01}$  et  $N_{01}$  en fonction de  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ ,  $\dot{\theta}_2$ ,  $\dot{\theta}_3$ ,  $A_3$  et  $B_3$ . Il faut alors appliquer le principe fondamental de la dynamique au système isolé  $\Sigma$  dans le référentiel galiléen (pas encore abordé en PTSI), plus particulièrement l'équation de moment écrite en  $G_3$  :  $\vec{\delta}(G_3, 3/0) = \Sigma \vec{M}(G_3, \text{ext} \rightarrow \Sigma = \{1, 2, 3\})$ .

**Question 7 :** Exprimer  $\Sigma \vec{M}(G_3, \text{ext} \rightarrow \Sigma = \{1, 2, 3\})$ , la somme des moments s'appliquant sur  $\Sigma$  en  $G_3$ .

En négligeant les inerties de (1) et (2), la définition du moment dynamique au point  $G_3$  du solide (3) en mouvement dans le référentiel galiléen  $R_0$  s'écrit :  $\vec{\delta}(G_3, 3/0) = \left[ \frac{d\vec{\sigma}(G_3, 3/0)}{dt} \right]_{R_0}$ .

L'expression du moment cinétique au point  $G_3$  du solide (3) en mouvement dans le référentiel galiléen  $R_0$  est la suivante :  $\vec{\sigma}(G_3, 3/0) = B_3\theta_3\vec{y}_2 + A_3\dot{\theta}_2\vec{z}_2$ .

**Question 8 :** En déduire l'expression de  $\vec{\delta}(G_3, 3/0)$  dans la base  $B_2$ .

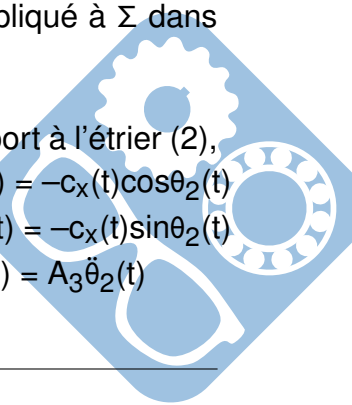
On rappelle que  $\vec{\delta}(G_3, 3/0) = \Sigma \vec{M}(G_3, \text{ext} \rightarrow \Sigma = \{1, 2, 3\})$ .

**Question 9 :** Grâce aux expressions trouvées précédemment, et en les projetant dans  $B_1$ , écrire les 3 équations issues du principe fondamental de la dynamique appliqué à  $\Sigma$  dans  $R_1$ .

Lorsque la toupie (3) tourne avec une vitesse constante  $\omega_3 = \dot{\theta}_3$  par rapport à l'étrier (2), l'expression des moments  $L_{01}$ ,  $M_{01}$  et  $N_{01}$  donne le système suivant :

$$\begin{cases} L_{01}(t) = -c_x(t)\cos\theta_2(t) \\ M_{01}(t) = -c_x(t)\sin\theta_2(t) \\ N_{01}(t) = A_3\dot{\theta}_2(t) \end{cases}$$

où  $c_x(t) = B_3\omega_3\dot{\theta}_2(t) = K_3 \cdot \dot{\theta}_2(t)$  correspond à l'effet gyroscopique.





L'action du cœur sur le stabilisateur est modélisée par un glisseur de résultante  $\vec{R}_{c \rightarrow 1} = f_c \vec{y}_1$  au point P tel que  $\vec{O}_0 \vec{P} = L \vec{z}_1$ .

Les moments  $L_{01}$ ,  $M_{01}$  et  $N_{01}$  doivent rester faibles afin de limiter les déformations de l'attache reconfigurable liant le stabilisateur (1) à la table d'opération (0).

**Question 10 :** En supposant que la toupie (3) tourne à vitesse constante par rapport à l'étrier (2), exprimer  $\dot{\theta}_2$  en fonction de  $K_3$ ,  $\theta_2$ ,  $f_c$  et  $L - L_{G_3}$  permettant de garantir que  $L_{01} = 0$  et de compenser l'effet de l'effort cardiaque  $f_c$  (Méthode : calculer  $\Sigma \vec{M}(G_3, \text{ext} \rightarrow \Sigma = \{1, 2, 3\})$  en rajoutant  $\vec{M}(G_3, c \rightarrow 1)$ ).

**Question 11 :** Donner une condition sur l'angle  $\theta_2$  et sur l'accélération angulaire  $\ddot{\theta}_2$  afin que les moments  $M_{01}$  et  $N_{01}$  soient faibles.

L'étrier (2) doit être piloté en vitesse de rotation pour que l'effet gyroscopique  $c_x(t) = K_3 \dot{\theta}_2(t)$  compense l'effet de l'effort cardiaque. La campagne expérimentale présentée en partie II a permis de déterminer que la fréquence fondamentale de l'effort cardiaque  $f_c(t)$  est de 1,5Hz.

La réponse de l'étrier (2) sera considérée comme suffisamment réactive si le temps de réponse à 5% de la vitesse  $\dot{\theta}_2(t) = \omega_2(t)$  pour une consigne  $\dot{\theta}_{c2}(t) = \omega_{c2}(t)$  en échelon est d'un ordre inférieur à la demi-période du signal perturbateur  $f_c(t)$ .

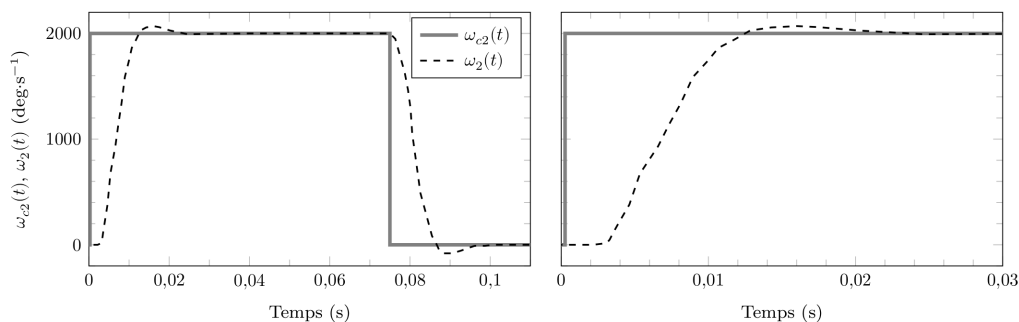


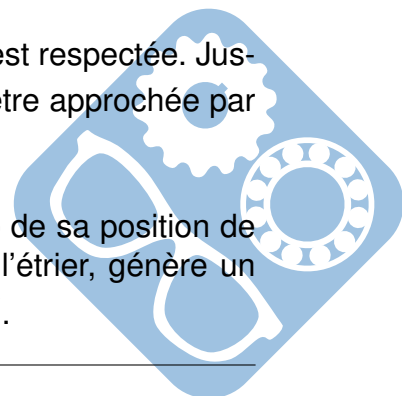
FIGURE 7 – Réponse expérimentale de l'étrier et consigne associée (à droite, zoom sur le régime transitoire)

La réponse expérimentale à un échelon de vitesse  $\Omega_{c2}(t)$  d'amplitude  $2000 \text{ deg} \cdot \text{s}^{-1}$  est représentée figure 7.

Les transformées de Laplace de  $\omega_2(t)$ ,  $\omega_{c2}(t)$ ,  $\theta_2(t)$  et  $c_x(t)$  seront notées  $\Omega_2(p)$ ,  $\Omega_{c2}(p)$ ,  $\Theta_2(p)$  et  $C_x(p)$ .

**Question 12 :** Vérifier que la condition de réactivité énoncée ci-dessus est respectée. Justifier que la fonction de transfert de l'étrier (2)  $H_2(p) = \frac{\Omega_2(p)}{\Omega_{c2}(p)}$  peut alors être approchée par un gain statique  $K_2$  de valeur à préciser.

Il faut s'assurer que la position  $\theta_2$  de l'étrier (2) ne s'éloigne pas trop de sa position de référence  $\theta_2^* = 0$ . Le non-respect de cette condition, appelé dérive de l'étrier, génère un moment parasite  $M_{01}$  responsable d'un déplacement du point P selon  $\vec{x}_1$ .



### III.2 Réglage du correcteur de la chaîne d'asservissement de l'étrier

La figure 8 montre la boucle d'asservissement sur la position  $\theta_2$ .  $C(p)$  est la fonction de transfert d'un correcteur appelé correcteur d'étrier. La dérive de l'étrier sera évitée si  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_2(t) = 0$  lorsque la commande de l'étrier  $U(p)$  est un échelon.

Les 2 cas suivants sont envisagés :

- avec une correction proportionnelle :  $C(p) = K_{10}$ ,
- avec une correction proportionnelle-intégrale :  $C(p) = K_{10} + \frac{K_{11}}{p}$ .

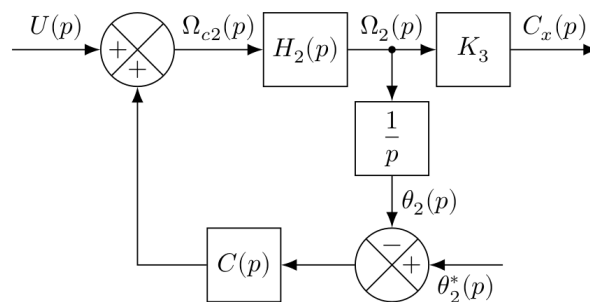


FIGURE 8 – Asservissement de l'étrier

**Question 13 :** Exprimer la fonction de transfert  $H_{\theta_2}(p) = \frac{\theta_2(p)}{U(p)}$  avec  $\theta_2^*(p) = 0$  en fonction de  $C(p)$  et  $K_2$ .

**Question 14 :** Déterminer  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_2(t)$  lorsque  $U(p)$  est un échelon unitaire pour la correction proportionnelle.

**Question 15 :** Déterminer  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_2(t)$  lorsque  $U(p)$  est un échelon unitaire pour la correction proportionnelle-intégrale.

**Question 16 :** Justifier la pertinence d'une correction proportionnelle-intégrale au regard de la problématique de la dérive de l'étrier.

Dans la suite de l'étude, le correcteur adopté est  $C(p) = K_{10} + \frac{K_{11}}{p}$ .

L'effet gyroscopique  $c_x(t)$  est lié à la vitesse de rotation  $\omega_2(t)$  et la consigne  $\theta_2^*(t)$  est maintenue à 0 pour éviter la dérive de l'étrier. La fonction de transfert utilisée pour modéliser le comportement de l'étrier (2) est notée  $H_m(p) = \frac{\Omega_2(p)}{U(p)}$ .

**Question 17 :** Exprimer sous forme canonique la fonction de transfert  $H_m(p)$  en fonction de  $K_2$ ,  $K_{10}$  et  $K_{11}$ .

Le calcul des gains  $K_{10}$  et  $K_{11}$  doit répondre aux deux exigences suivantes : permettre d'éviter la dérive de l'étrier (2) et ne pas ralentir le système, d'où le choix d'une fonction

de transfert  $H_m(p)$  caractérisée par un amortissement  $\xi_m = 0,37$  et une pulsation propre  $\omega_m = 2,45 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**Question 18 :** Déterminer les valeurs numériques de  $K_{10}$  et  $K_{11}$  au regard de ces exigences.

La rotation du stabilisateur (1) étudiée en partie II n'est pas prise en compte figure 6. Il est indispensable de considérer la flexibilité de l'attache reconfigurable utilisée pour lier le stabilisateur (1) à la table d'opération (0).

### III.3 Comportement dynamique du stabilisateur

Dans la modélisation retenue (figure 9), une liaison pivot non parfaite permet de représenter la flexibilité de l'attache reconfigurable. La table d'opération (0) est supposée fixe et le référentiel  $R_0(O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  lié à la table (0) est galiléen. Au stabilisateur (1) est associé le repère  $R_1(O_0, \vec{x}_0 = \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  avec  $\theta_1 = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$ . Le point P tel que  $O_0P = L$  représente le bout du stabilisateur (1) en contact avec la zone à opérer.

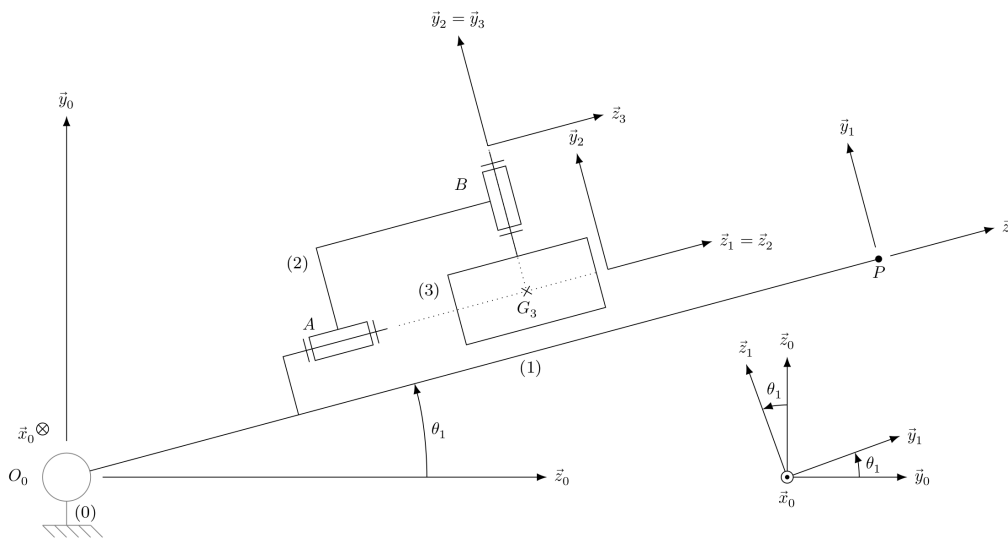


FIGURE 9 – Modèle cinématique du système GyroLock (représenté pour  $\theta_2 = \theta_3 = 0$ )

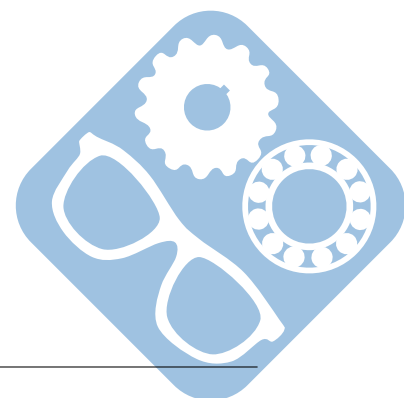
#### Paramétrage, notations et hypothèses

- la liaison pivot d'axe  $(O_0, \vec{x}_0)$  entre les solides (0) et (1) possède une raideur  $k$  et un coefficient de frottement visqueux  $f$ , d'où  $\vec{M}(O_0, 0 \rightarrow 1) \cdot \vec{x}_0 = -(k\theta_1 + f\dot{\theta}_1)$ ,
- les autres liaisons sont supposées parfaites,
- l'action du coeur sur le stabilisateur (1) est modélisée par  $\{T_{c \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} f_c \cdot \vec{y}_1 \\ 0 \end{Bmatrix}_P$ ,
- seul le déplacement vertical du point P est pris en compte. On note  $y(t) = -\vec{O}_0\vec{P} \cdot \vec{y}_0$ ,

- le stabilisateur (1) est de masse  $m_1$  et possède un centre d'inertie  $G_1$  tel que  $\overrightarrow{O_0G_1} = L_{G_1} \cdot \vec{z}_1$  et l'opérateur d'inertie est  $I(G_1, 1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{bmatrix}_{B_1}$ ,
- la masse et l'inertie de l'étrier (2) sont négligeables,
- la toupie (3) est de masse  $m_3$  et possède un centre d'inertie  $G_3$  tel que  $\overrightarrow{O_0G_3} = L_{G_3} \cdot \vec{z}_1 + H_{G_3} \cdot \vec{y}_1$ ,
- les figures de changement de base sont données figures 6 et 9,
- les actions mécaniques dues à la pesanteur sont négligées devant les effets dynamiques,
- la loi de mouvement du stabilisateur (1) peut être mise sous la forme suivante :  
 $J_x \ddot{\theta}_1(t) + f \cdot \dot{\theta}_1(t) + k \cdot \theta_1(t) = c_x(t) - L \cdot f_c(t)$ ,  
 avec  $J_x = A_1 + A_3 + m_1 L_{G_1}^2 + m_3 L_{G_3}^2 + m_3 H_{G_3}^2$ .

En supposant que  $\theta_1$  reste proche de 0, la relation  $y(t) = L \cdot \theta_1(t)$  sera utilisée.  
 Les transformées de Laplace de  $y(t)$ ,  $c_x(t)$  et  $f_c(t)$  sont notées  $Y(p)$ ,  $C_x(p)$  et  $F_c(p)$ .

**Question 19** : Déterminer les expressions littérales des fonctions de transfert  $H_{\text{pert}}(p)$  et  $H_1(p)$  du schéma bloc figure 10 en fonction de  $L$ ,  $J_x$ ,  $f$  et  $k$ .



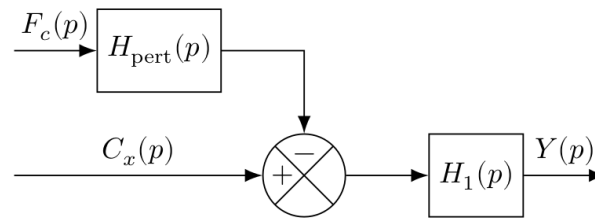


FIGURE 10 – Schéma bloc du stabilisateur (1)

On rappelle que  $L = 0,3\text{m}$  et les valeurs retenues pour  $J_x$ ,  $f$  et  $k$  sont :

- $J_x = 1,14 \cdot 10^{-2} \text{kg} \cdot \text{m}^2$ ,
- $f = 64 \cdot 10^{-3} \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{rad}^{-1}$ ,
- $k = 95 \text{N} \cdot \text{m} \cdot \text{rad}^{-1}$ .

**Question 20 :** Écrire  $H_1(p)$  sous forme canonique, puis donner les expressions littérales et numériques de ses paramètres caractéristiques : gain statique  $K_1$ , amortissement  $\xi_1$  et pulsation propre  $\omega_1$ .

**Question 21 :** Indiquer sur le diagramme de Bode du document réponse les pentes en dB/decade sur la courbe en gain, indiquer la pulsation de résonance et donner la définition littérale de  $\frac{|H(j\omega)_{\max}|}{|H(0)|}$ .

## IV Réglage de la loi de commande du stabilisateur

**Objectif :** Régler une loi de commande permettant de respecter les exigences figure 3.

Une solution pour améliorer la commande du système de stabilisation est testée (non étudiée ici, seuls les résultats sont à analyser vis-à-vis du cahier des charges).

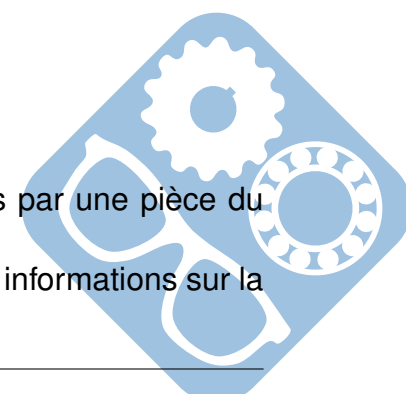
L'exploitation des modèles conduit à une simulation numérique aux évolutions temporelles de  $y(t)$  et de  $\theta_2(t)$

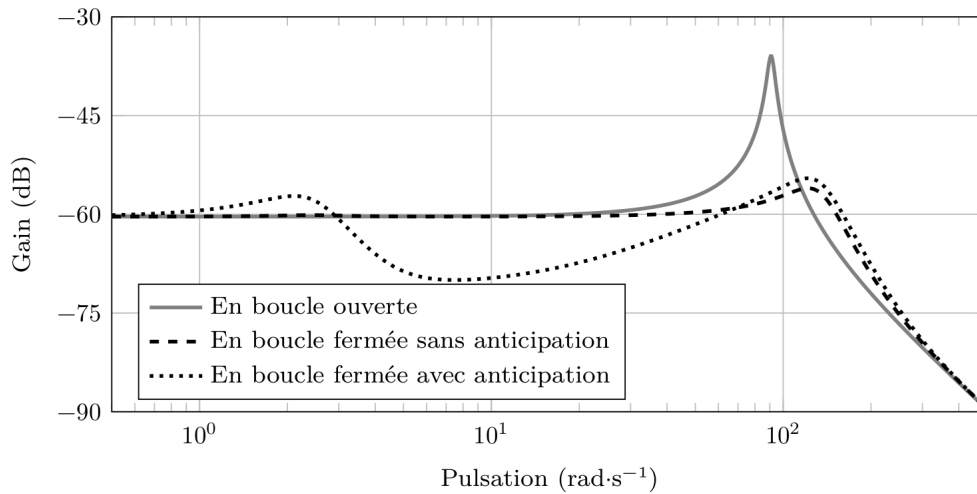
**Question 22 :** Analyser les courbes des figures 11 et 12 et les commenter vis-à-vis de l'exigence Id='1.1.1' (cf. diagramme des exigences fourni sur la figure 3). Conclure sur la capacité du GyroLock, tel qu'il a été modélisé dans cette étude, à maintenir la zone à opérer lors d'une opération à copier battant.

## V Choix matériau-procédé

**Objectif :** Choisir un matériau compatible avec les contraintes subies par une pièce du stabilisateur (toupie).

Une simulation statique par éléments finis nous permet d'obtenir des informations sur la répartition des contraintes subies par la pièce.



FIGURE 11 – Réponses fréquentielles  $|Y(j\omega)/F_c(j\omega)|$ 

Données matériaux	Prix (€/kg)	Tenue à la corrosion	Température de fusion (°C)	$\rho$ (Masse volumique) (kg · m <sup>-3</sup> )
Acier inoxydable 316 L	5.9	+	1230-1530	7800
Alliage Titane	30	+++	1650-1670	4500

TABLEAU 1 – Caractéristiques des deux matériaux

**Hypothèse :** le matériau doit avoir une limite d'élasticité  $R_{p0,2}$  à 0,2% de déformation plastique telle que  $\sigma_{\max} \leq \frac{R_{p0,2}}{s}$  avec  $s$  un coefficient de sécurité, qui vaut  $s = 3$  pour notre système.

**Question 23 :** En utilisant la figure 14, donner la valeur de contrainte maximale que peut subir la toupie  $\sigma_{\max}$ . En déduire la valeur de  $R_{p0,2}$  que le matériau doit avoir pour respecter le cahier des charges.

Les figures 15 et 16 donnent les caractéristiques des 2 matériaux suivants : Alliage de titane Ti6 Al4 V et Acier inoxydable 316L (X2CrNiMo17-12-2).

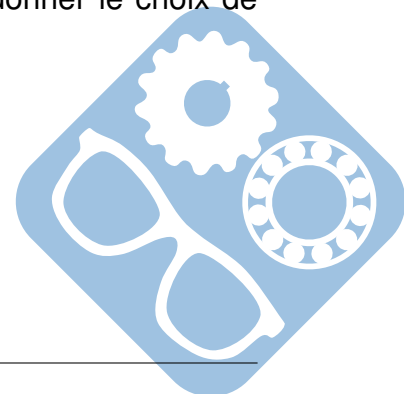
**Question 24 :** Donner la valeur de  $R_{p0,2}$  pour chacun des matériaux à partir de la courbe conventionnelle de traction.

**Question 25 :** A partir de ces résultats et du tableau 1, en justifiant, donner le choix de matériau final pour la toupie d'un point de vue résistance.

**Question 26 :** Citer un procédé d'obtention pour cette toupie.

## VI Conception

La toupie est en liaison pivot avec l'étrier.



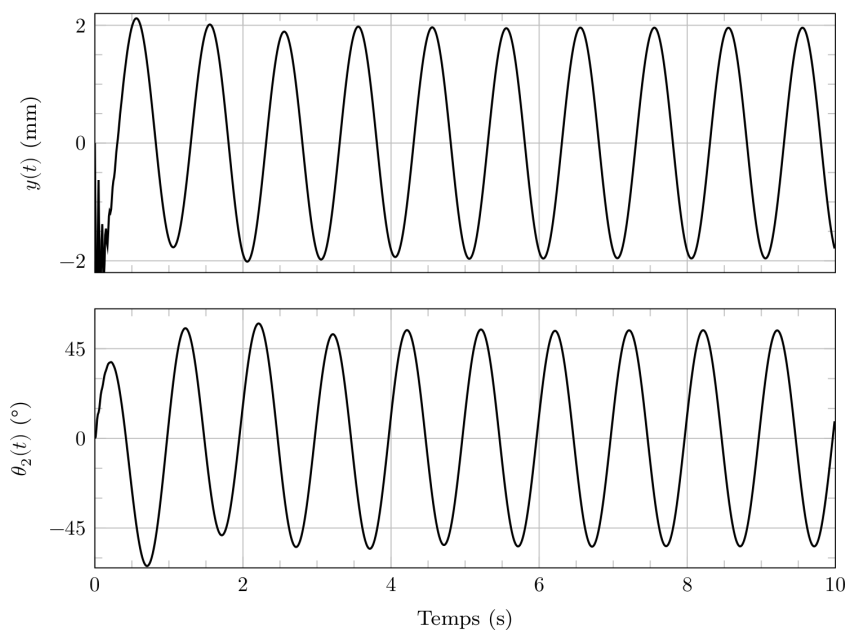
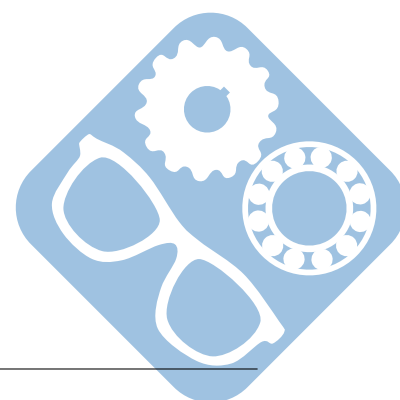


FIGURE 12 – Évolutions temporelles de  $v(t)$  et  $\theta_2(t)$  avec estimation et compensation de  $f_c(t)$ .

Cette liaison est réalisée à partir des roulement à bille à contact oblique présentés sur la figure 17 montés en X. Afin d'ajouter de la souplesse au montage, un des appuis sera réalisé par un ressort présent sur le dessin du document réponse.



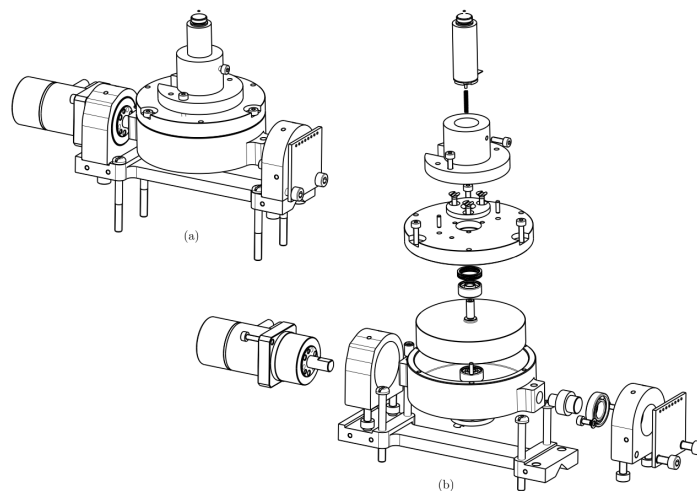


FIGURE 13 – Vues d'ensemble du modèle GyroLock (a) vue générale de l'assemblage (b) vue éclatée

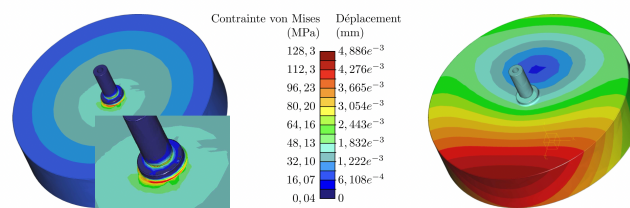
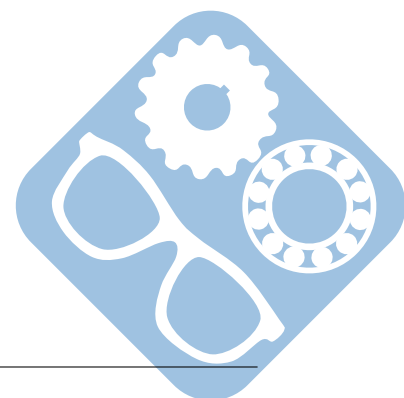


FIGURE 14 – Contraintes et déplacement du gyroscope soumis à la force centrifuge et au couple gyroscopique maximal (figure donnée en annexe en couleur)

**Question 27 :** Compléter la conception du document réponse afin d'implanter les roulements et les pièces nécessaires à leurs arrêts axiaux.





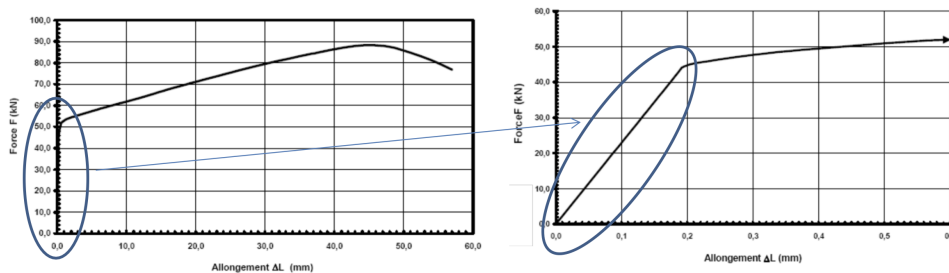


FIGURE 15 – Courbe conventionnelle de traction acier 316L  $F = f(\Delta l)$  (éprouvette  $D_0 = 15 \text{ mm}$  et  $L_0 = 150 \text{ mm}$ )

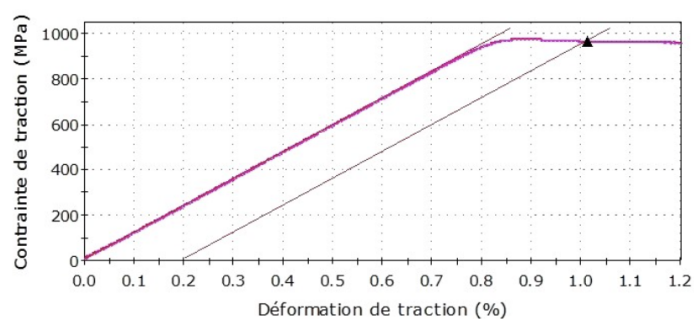
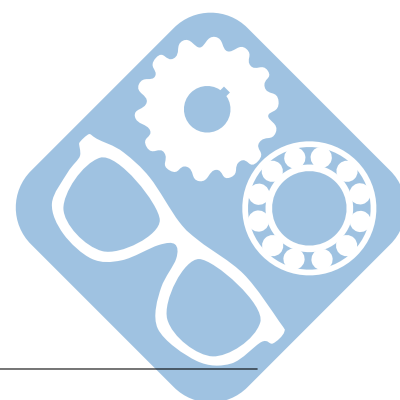


FIGURE 16 – Courbe traction alliage titane Ti Al4 V



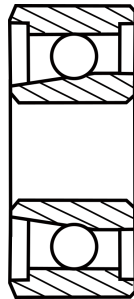


FIGURE 17 – Roulement à bille à contact oblique

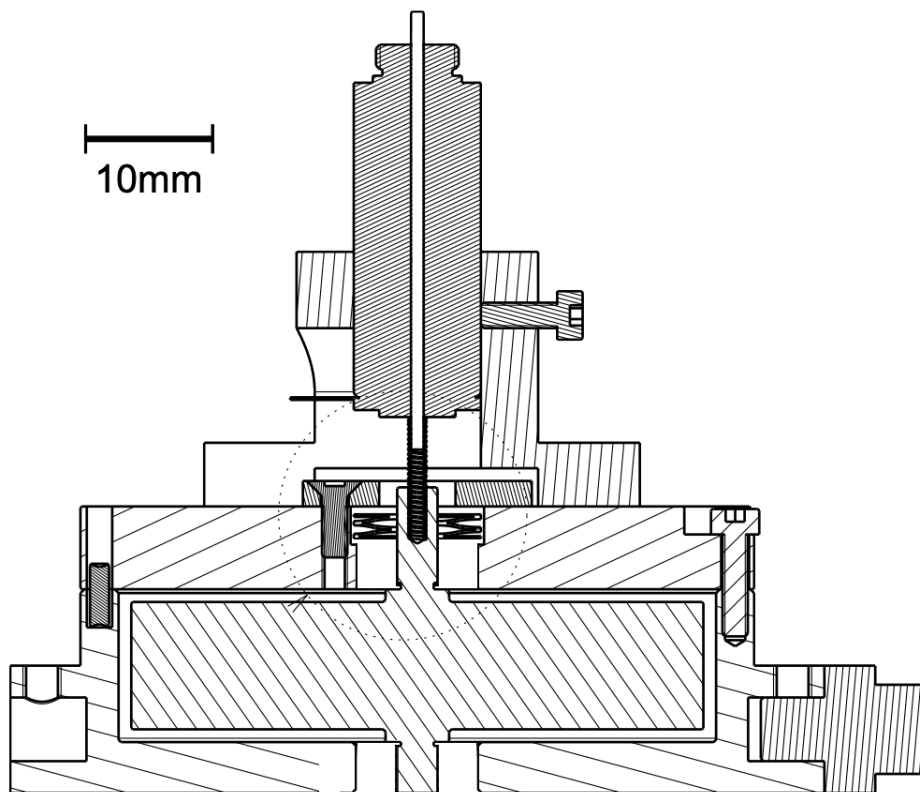
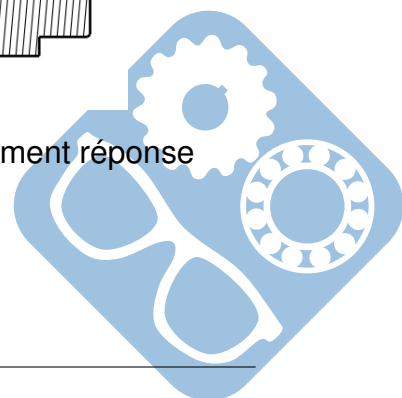


FIGURE 18 – Montage de la toupie à compléter sur le zoom du document réponse



**Question 1 :**

Direction dorso-ventrale : déplacement maximal du point P  $u_d^{\max} \approx 3,7\text{mm}$  et  $u_d^{\min} \approx -2,5\text{mm}$ .

Dans le plan frontal,  $u_f^{\max} \approx 0,25\text{mm}$  et  $u_f^{\min} \approx -0,4\text{mm}$ .

Comme le déplacement dorso-ventral est supérieur à 2mm, il faut une stabilisation active.

**Question 2 :**

On a  $\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{P_0O_0} + \overrightarrow{O_0P} = L\vec{z}_1 - L\vec{z}_0$ .

Avec :

$$\vec{z}_1 = \cos(\theta_{1y})\vec{z}_1' + \sin(\theta_{1y})\vec{x}_1' = \cos(\theta_{1y})\cos(\theta_{1x})\vec{z}_0 - \cos(\theta_{1y})\sin(\theta_{1x})\vec{y}_0 + \sin(\theta_{1y})\vec{x}_0$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{P_0P} = L \left[ \sin(\theta_{1y})\vec{x}_0 - \cos(\theta_{1y})\sin(\theta_{1x})\vec{y}_0 + (\cos(\theta_{1y})\cos(\theta_{1x}) - 1)\vec{z}_0 \right]$$

Donc :

$$u_d = \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{y}_0 = -L \cos(\theta_{1y}) \sin(\theta_{1x})$$

$$u_f = \left\| \overrightarrow{P_0P} - u_d \vec{y}_0 \right\| = L \sqrt{\sin^2(\theta_{1y}) + (\cos(\theta_{1y})\cos(\theta_{1x}) - 1)^2}$$

**Question 3 :**

On prend  $\cos(\theta_i) \approx 1$  et  $\sin(\theta_i) \approx \theta_i$  pour  $\theta_i = \theta_{1x}$  ou  $\theta_i = \theta_{1y}$ .

Par conséquent  $\overrightarrow{P_0P} \approx L \left[ \theta_{1y}\vec{x}_0 - \theta_{1x}\vec{y}_0 \right]$  donc :  $u_d \approx -L\theta_{1x}$  et  $u_f \approx L|\theta_{1y}|$

En s'appuyant sur la question 1 :

$$\Delta\theta_{1x} = \frac{u_d^{\min} - u_d^{\max}}{L} \approx \frac{-2,3 - 3,5}{0,3 \cdot 10^3} \approx -1,9 \cdot 10^{-2} \text{rad}$$

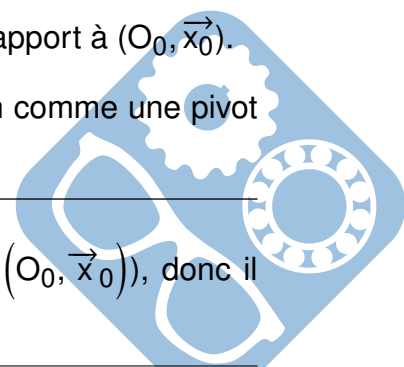
$$\Delta\theta_{1y} = \frac{u_f^{\max} - u_f^{\min}}{L} \approx \frac{0,25 + 0,4}{0,3 \cdot 10^3} \approx 2,1 \cdot 10^{-3} \text{rad}$$

On a  $\frac{\Delta\theta_{1x}}{\Delta\theta_{1y}} = 10$ , donc la rotation autour de  $(O_0, \vec{y}_1)$  négligeable par rapport à  $(O_0, \vec{x}_0)$ .

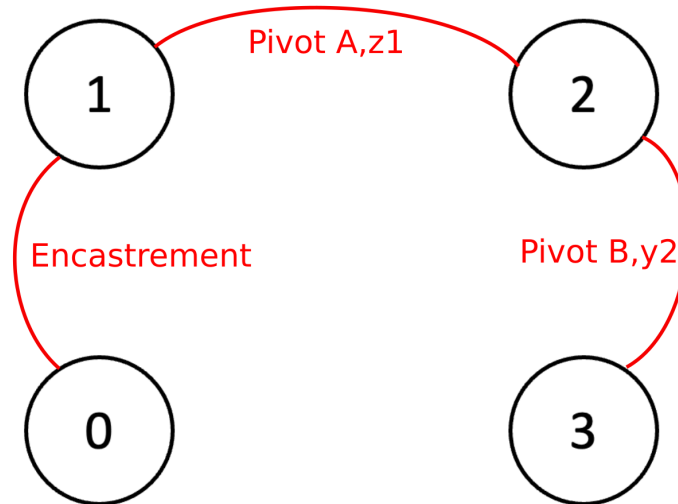
Si la rotation  $(O_0, \vec{z}_0)$  est négligée, alors on peut considérer la liaison comme une pivot autour de  $(O_0, \vec{x}_0)$ .

**Question 4 :**

On veut compenser les mouvements dans la direction dorso-ventrale  $((O_0, \vec{x}_0))$ , donc il faut un moment selon cet axe.



**Question 5 :**



**Question 6 :**

Bilan des Actions Mécaniques :

- 0 → 1 (encastrement).

**Question 7 :**

$$\Sigma \vec{M}(G_3, \text{ext} \rightarrow \Sigma) = \vec{M}(G_3, 0 \rightarrow 1) = L_{01} \cdot \vec{x}_1 + M_{01} \cdot \vec{y}_1 + N_{01} \cdot \vec{z}_1.$$

**Question 8 :**

$$\vec{M}(G_3, 3/0) = \left( \frac{d}{dt} (B_3 \dot{\theta}_3 \vec{y}_2 + A_3 \dot{\theta}_2 \vec{z}_2) \right), \text{ or } \left[ \frac{d\vec{y}_2}{dt} \right]_{B_0} = -\dot{\theta}_2 \cdot \vec{x}_2 \text{ et } \left[ \frac{d\vec{z}_2}{dt} \right]_{B_0} = \vec{0}$$

$$\text{Donc, } \vec{\delta}(G_3, 3/0) = -B_3 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_2 \vec{x}_2 + B_3 \ddot{\theta}_3 \vec{y}_2 + A_3 \ddot{\theta}_2 \vec{z}_2$$

**Question 9 :**

$$\vec{x}_2 = \cos \theta_2 \vec{x}_1 + \sin \theta_2 \vec{y}_1 \text{ et } \vec{y}_2 = -\sin \theta_2 \vec{x}_1 + \cos \theta_2 \vec{y}_1 \quad \vec{\delta}(G_3, 3/0) = B_3 (-\dot{\theta}_3 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 - \ddot{\theta}_3 \sin \theta_2) \vec{x}_1 +$$

$$B_3 (-\dot{\theta}_3 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + \ddot{\theta}_3 \cos \theta_2) \vec{y}_1 + A_3 \ddot{\theta}_2 \vec{z}_1 \quad L_{01}(t) = -B_3 (\dot{\theta}_3 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 + \ddot{\theta}_3 \sin \theta_2)$$

$$M_{01}(t) = B_3 (-\dot{\theta}_3 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + \ddot{\theta}_3 \cos \theta_2)$$

$$N_{01}(t) = A_3 \ddot{\theta}_2.$$

**Question 10 :**

$$\text{Avec } \ddot{\theta}_3 = 0, \text{ car } \dot{\theta}_3 = \text{cst} \text{ et en ajoutant } \vec{M}(G_3, c \rightarrow 1) = \vec{G}_3 \vec{P} \wedge \vec{R}_{c \rightarrow 1} = -f_c(L - L_{G_3}) \cdot \vec{x}_1.$$

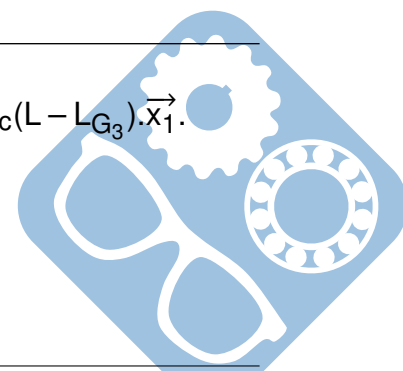
Ainsi le système précédent devient :

$$L_{01}(t) - f_c(L - L_{G_3}) = -B_3 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2$$

$$M_{01}(t) = -B_3 \dot{\theta}_3 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2$$

$$N_{01}(t) = A_3 \ddot{\theta}_2.$$

Pour avoir  $L_{01}(t) = 0$ , il faut  $f_c(L - L_{G_3}) = K_3 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2$



## Correction

$$\text{Donc, } \dot{\theta}_2 = \frac{f_c(L - L_{G_3})}{K_3 \cos \theta_2}$$

**Question 11 :**

Si on veut  $M_{01}(t)$  faible, alors  $\sin \theta_2(t)$  doit être faible.

Si on veut  $N_{01}(t)$  faible, alors  $\ddot{\theta}_2(t)$  doit être faible.

**Question 12 :**

Une demi-période,  $\frac{1}{2}T = \frac{1}{2f} = \frac{1}{2 \cdot 3} \approx 0,167$  s.

Le temps de réponse  $t_{r5\%} \approx 0,02$  donc c'est bon.

$$H_2(p) = \frac{\Omega_2(p)}{\Omega_{c2}(p)} = K_2 = 1.$$

**Question 13 :**

Avec  $\theta_2^*(p) = 0$

$$\Omega_{c2}(p) = U(p) - C(p) \cdot \frac{K_2}{p} \Omega_{c2}(p)$$

Or  $\Omega_{c2}(p) = \frac{p}{K_2} \theta_2(p)$  donc :

$$H_{\theta_2}(p) = \frac{K_2}{p + K_2 C(p)}$$

**Question 14 :**

Correction proportionnelle :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta_2(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \theta_2(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot H_{\theta_2}(p) \frac{1}{p} = \frac{1}{K_{10}}$

**Question 15 :**

Correction proportionnelle-intégrale :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \theta_2(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \theta_2(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K_2 p}{p^2 + K_2 K_{10} p + K_2 K_{11}} = 0$

**Question 16 :**

La dérive de l'étrier sera évitée avec la correction proportionnelle-intégrale.

**Question 17 :**

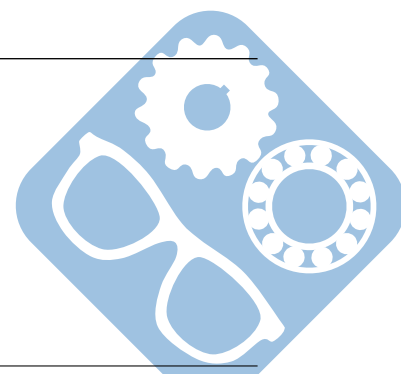
$$H_m(p) = \frac{H_2(p)}{1 + H_2(p) \frac{C(p)}{p}} = \frac{\frac{1}{K_{11}} p^2}{1 + \frac{K_{10}}{K_{11}} p + \frac{p^2}{K_2 K_{11}}}$$

**Question 18 :**

On peut identifier :

$$\omega_m = \sqrt{K_2 K_{11}} \quad ; \quad \xi_m = \frac{1}{2} K_{10} \sqrt{\frac{K_2}{K_{11}}}$$

Comme  $K_2 = 1$ , on calcule :



**Correction**

$$K_{11} = \frac{\omega_m^2}{K_2} = 6,00 \text{ rad}^2 \cdot \text{s}^{-2} \text{ et } K_{10} = \frac{2\xi_m}{\omega_m} K_{11} = 1,81 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

**Question 19 :**

D'après le schéma-bloc,  $\frac{Y(p)}{H_1(p)} = C_x(p) - H_{\text{pert}}(p)F_c(p)$ .

On a  $Y(p) = L\theta_1(p)$ , donc l'équation précédente devient :

$$(J_x p^2 + fp + k) \frac{Y(p)}{L} = C_x(p) - LF_c(p)$$

Donc  $H_1(p) = \frac{L}{J_x p^2 + fp + k}$  et  $H_{\text{pert}}(p) = L$ .

**Question 20 :**

$$H_1(p) = \frac{\frac{L}{k}}{1 + \frac{f}{k}p + \frac{J_x}{k}p^2}$$

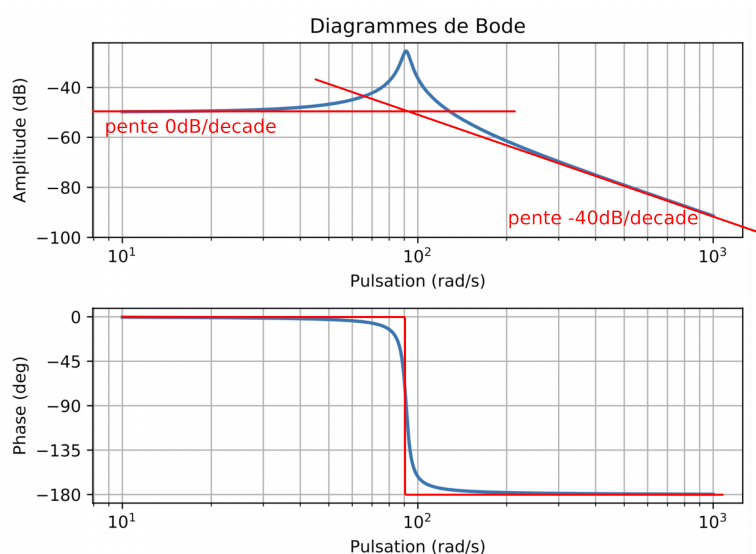
Donc :

—  $K_1 = \frac{L}{k} = \frac{0,3}{95} = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ rad/N}$

—  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{J_x}} = \sqrt{\frac{95}{1,14 \cdot 10^{-2}}} = 91,3 \text{ rad/s}$

—  $\xi_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{f}{\sqrt{kJ_x}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{64 \cdot 10^{-3}}{\sqrt{95 \times 1,14 \cdot 10^{-2}}} = 0,03$ .

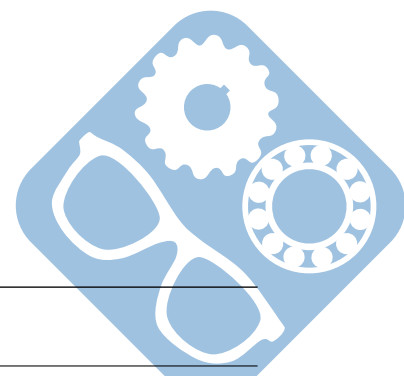
**Question 21 :**



$$\omega_0 = 90 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\frac{|H(j\omega)_{\text{max}}|}{|H(0)|} = 10^{\frac{30}{20}} = 10^{1.5} \approx 30$$

**Question 22 :**



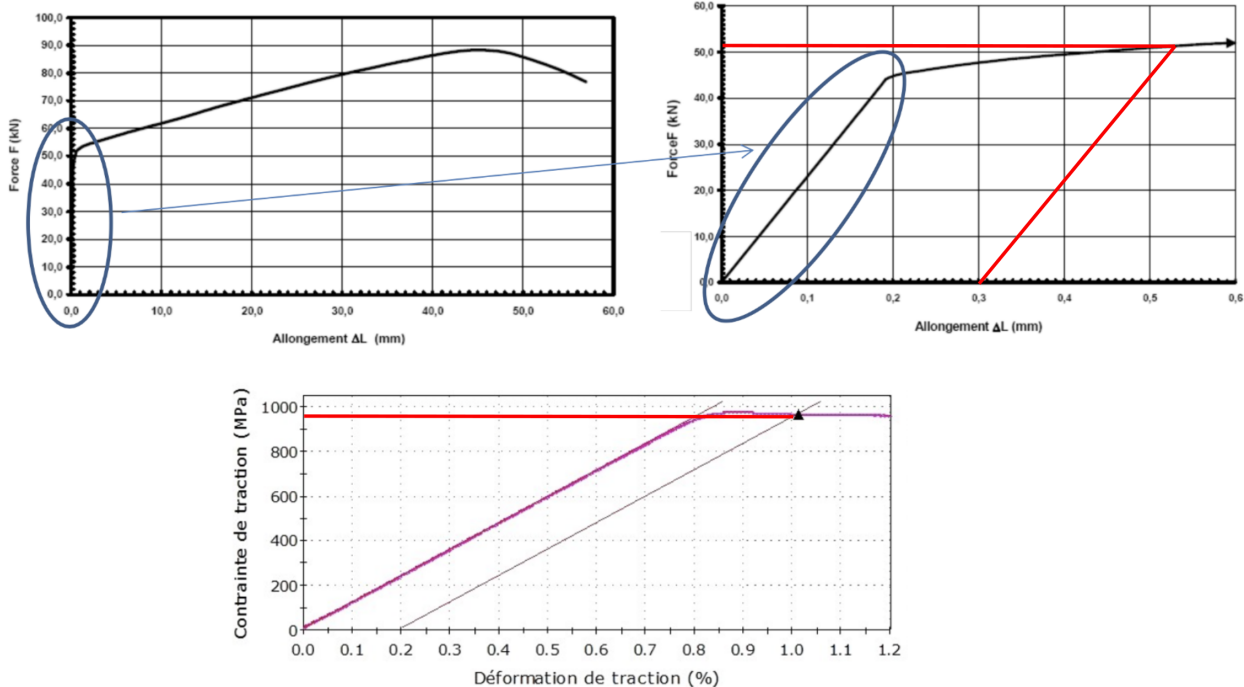
Déplacement maximal de 2mm par rapport à la référence, donc le cela respecte le cahier des charges.

**Question 23 :**

$$\sigma_{\max} = 128,3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max} \leq \frac{R_e}{S}, R_e \geq 384,9 \text{ MPa.}$$

**Question 24 :**



Pour l'acier :  $0,2\% \cdot 150 \text{ mm} = 0,3 \text{ mm}$ , ce qui donne  $F_{0,2} = 50 \text{ kN}$ , donc  $R_{p0,2\%} = \frac{50 \cdot 1000}{7,5^2 \cdot \pi} \approx 300 \text{ MPa}$

Pour le titane : on lit directement  $R_{p0,2\%} = 900 \text{ MPa}$ .

**Question 25 :**

D'après les résultats le matériau le plus adapté est le titane.

**Question 26 :**

Cette toupie peut être moulée puis usinée.

**Question 27 :**

