DS 01- Balance de cuisine

Avec Correction

PTSI

Samedi 21 septembre 2024

Table des matières

Balance de cuisine

I Présentation

Une balance de cuisine est un accessoire indispensable afin de doser les ingrédients à mettre dans une recette.

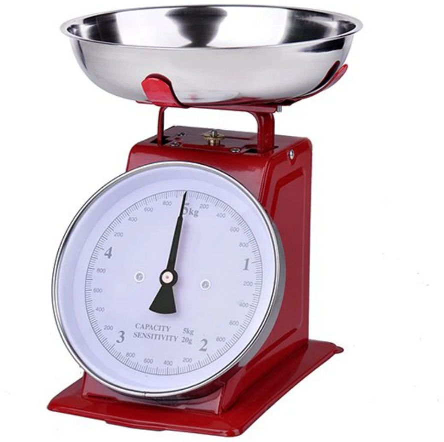

FIGURE 1 – Balance de cuisine

II Cahier des charges d'une balance

Question 1 : Tracer le diagramme des cas d'utilisation de la balance de cuisine.

Question 2 : Tracer le diagramme de contexte de la balance de cuisine.

III Modélisation

On souhaite modéliser le comportement de la balance par un système :

- Masse,
- Ressort,
- Amortisseur.

L'équation qui régie le comportement de ce modèle est la suivante :

$$m_b \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -k \cdot x(t) - f \cdot \frac{dx(t)}{dt} + p(t) \quad (1)$$

Avec :

— $x(t)$: position de la balance,

— $p(t)$: poids de l'objet sur la balance.

— $k = 2000 N \cdot m^{-1}$: raideur du ressort,

— $f = 700 N \cdot rad \cdot s^{-1}$: coefficient d'amortissement,

— $m_b = 1 kg$: masse en mouvement (masse balance),

— $g = 10 m \cdot s^{-2}$: accélération de pesanteur.

Pour simplifier les calculs, on négligera la masse ($m(t)$ variable) de l'objet à peser par rapport à la masse du plateau et des pièces en mouvement. Ainsi, on aura :

$$p(t) = m(t) \cdot g \qquad (2)$$

Les conditions initiales seront considérées nulles et on écrire $X(p)$ la transformée de Laplace de la fonction $x(t)$.

Question 3 : Écrire les équations (1) et (2) dans le domaine de Laplace.

Question 4 : Écrire une équation liant les variables $X(p)$ et $M(p)$ au reste des constantes du système.

Question 5 : Écrire la fonction de transfert $H(p) = \dfrac{X(p)}{M(p)}$ et la mettre sous la forme canonique.

Question 6 : Donner son gain, son ordre et sa classe. Et déterminer ses paramètres caractéristiques (K et τ) ou (K, ξ et ω_0).

Question 7 : Faire l'application numérique. Préciser l'unité de ces résultats.

Question 8 : D'après ces résultats, justifier le signe du discriminent Δ. Qu'en conclure sur les racines du polynôme ?

On montre que le polynôme du dénominateur peut s'écrire :
$D(p) = 1 + 0,35 \cdot p + 5 \cdot 10^{-4} \cdot p^2$
Les solutions de ce polynôme sont parmi les suivantes :

1. Solution 1 : $p_1 = -697.13$ et $p_2 = -2.868$
2. Solution 2 : $p_1 = 534.23$ et $p_2 = 0.32$
3. Solution 3 : $p_1 = -92.13$ et $p_2 = -123.35$
4. Solution 4 : $p_1 = -92.13 + 4.23i$ et $p_2 = -92.13 - 4.23i$

Question 9 : Déterminer en justifiant vos calculs laquelle des 4 solutions est celle du polynôme du dénominateur.

On montre que la fonction de transfert déterminée précédemment peut être approximée par la suivante :

$$H(p) = \frac{0,005}{1 + 0,3 \cdot p} \qquad (3)$$

On pose une masse M = 200g sur la balance, soit $M(p) = \frac{0.2}{p}$.

Question 10 : Déterminer X(p) la réponse à cette sollicitation.

Question 11 : En déduire x(t) la réponse temporelle à cette sollicitation.

Question 12 : Déterminer le temps de réponse à 5% de ce système, c'est à dire l'instant à partir duquel la sortie vaut 95% de sa valeur finale.

Question 13 : Le cahier des charges demande un temps de réponse pour la balance de $1,3$s, celui-ci est-il validé sur cet aspect ?

Question 14 : Tracer la courbe de x(t) sur le document réponse et compléter les valeurs sur les axes des abscisses et des ordonnées.

FIN

Question 1 :

Question 2 :

Question 3 :
$m_p \cdot p^2 \cdot X(p) = -k \cdot X(p) - f \cdot p \cdot X(p) + P(p)$
$P(p) = M(p) \cdot g$

Question 4 :
$m_p \cdot p^2 \cdot X(p) + k \cdot X(p) + f \cdot p \cdot X(p) = M(p) \cdot g$
$(m_p \cdot p^2 + f \cdot p + k) \cdot X(p) = M(p) \cdot g$

Question 5 :
$$\frac{X(p)}{M(p)} = \frac{g}{m_p \cdot p^2 + f \cdot p + k}$$
$$\frac{X(p)}{M(p)} = \frac{\frac{g}{k}}{\frac{m_p}{k} \cdot p^2 + \frac{f}{k} \cdot p + 1}$$

Question 6 :
$$K = \frac{g}{k}$$
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_p}}$$
$$\xi = \frac{f}{2 \cdot k} \cdot \sqrt{\frac{k}{m_p}} = \frac{f}{2 \cdot \sqrt{k \cdot m_p}}$$

Question 7 :
$$K = \frac{g}{k} = \frac{10}{2000} = 0,005 m^2 \cdot s^{-2} \cdot N^{-1}$$
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_p}} = \sqrt{\frac{2000}{1}} \approx 45 rad \cdot s^{-1}$$
$$\xi = \frac{f}{2 \cdot k} \cdot \sqrt{\frac{k}{m_p}} = \frac{f}{2 \cdot \sqrt{k \cdot m_p}} = \frac{700}{2 \cdot \sqrt{2000 \cdot 1}} = \frac{700}{90} \approx 8 \text{ (sans unité)}$$

Question 8 :
$\xi > 1$, donc $\Delta > 0$, les racines sont réelles négatives.

Question 9 :
$\Delta = 0,35^2 - 4 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \approx 0,1$
$$p_1 \approx \frac{-0,35 - \sqrt{0,35^2 - 4 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} \approx \frac{-0,7}{10^{-3}} \approx -700$$
$$p_2 \approx \frac{-0,35 + \sqrt{0,35^2 - 4 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \approx 0,1}}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} \approx 0$$
Il s'agit de la solution 1.

Question 10 :
$X(p) = \frac{0,005}{1+0,3 \cdot p} \cdot \frac{0,2}{p}$

Question 11 :
$X(p) = \frac{10^{-3}}{p \cdot (1+0,3 \cdot p)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{1+0,3 \cdot p}$
$X(p) = \frac{A \cdot (1+0,3 \cdot p) + B \cdot p}{p \cdot (1+0,3 \cdot p)} = \frac{A + (0,3 \cdot A + B) \cdot p}{p \cdot (1+0,3 \cdot p)}$
Donc : $A = 10^{-3}$ et $B = -0,3 \cdot A = -3 \cdot 10^{-4}$.
$X(p) = 10^{-3} \left(\frac{1}{p} - \frac{0,3}{1+0,3 \cdot p} \right)$
$x(t) = 10^{-3} \left(1 - e^{-3 \cdot t} \right)$

Question 12 :
$t_{R5\%} = 3 \cdot 0,3 \approx 1s.$

Question 13 :
Oui $1,3 > 1s.$

Question 14 :