

DS 03- Système de télé-échographie

Avec Correction

PTSI

Samedi 07 décembre 2024

Table des matières

I	Présentation	2
II	Validation des performances cinématiques du robot porte-sonde	4
III	Commande en position du robot porte-sonde	10
IV	Lecture de plan	15
V	Annexe	17

Système de télé-échographie

I Présentation

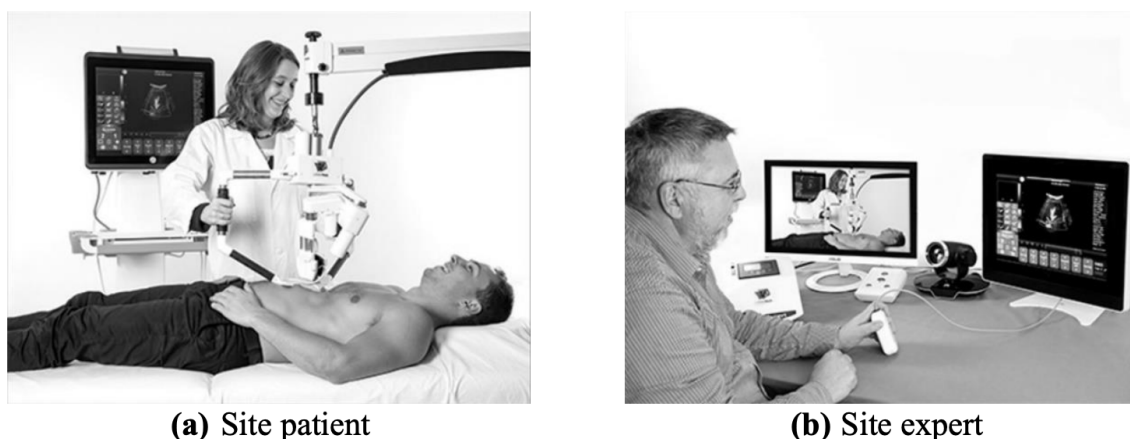


FIGURE 1 – Principe de la télé-échographie

I.1 Mise en situation

L'échographie est une technique d'imagerie médicale basée sur l'exploitation de la réflexion d'une onde ultrasonore au niveau des interfaces physiologiques entre organes. Non irradiante, peu coûteuse et mobile, elle représente l'examen d'imagerie médicale le plus pratiqué au monde. En contrepartie, sa réalisation nécessite un manipulateur expert en imagerie médicale, capable d'analyser les images échographiques en temps réel afin d'orienter la sonde en conséquence.

L'analyse et l'expertise sont donc réalisées pendant l'examen. De ce fait, cette technique d'imagerie est qualifiée de « manipulateur dépendant » : sa mise en œuvre est difficilement envisageable sur des sites isolés.

La robotisation de cette technique permet toutefois d'en élargir le champ d'application. Grâce à la télé-échographie robotisée (figure 1), il devient possible de réaliser une échographie sur un patient situé sur un site isolé (appelé site patient), alors même que le spécialiste en imagerie médicale se trouve sur un site distant de celui où est pratiqué l'examen (appelé site expert).

Sur le site patient (figure 1-a) équipé du robot porte-sonde, d'un échographe et d'un système de visioconférence, un professionnel de santé est chargé de positionner le robot porte-sonde sur le patient et de le maintenir au cours de l'examen. Depuis le site expert distant (figure 1-b), le médecin dirige l'examen échographique. En manipulant une sonde fictive, il donne une consigne de position pour la sonde, que le robot exécute au contact du patient. Réalisant le lien entre les deux sites, le réseau de communication (ISDN, 4G, satellite...) permet en temps réel, le contrôle du robot, la visioconférence ainsi que la transmission des images échographiques.

I.2 Analyse système partielle

Le diagramme d'exigences donné en Annexe, présente un extrait du cahier des charges du système de télé-échographie.

La figure 2 décrit le robot porte-sonde constitué :

- d'une structure porteuse 0 ;
- d'un module de rotation, composé des sous-ensembles 1, 2, 3 permettant d'orienter la sonde en lui imposant trois rotations (R_1 , R_2 , R_3) suivant les axes 1 à 3 ;
- du porte-sonde 4 sur lequel est fixé la sonde échographique S. La translation T suivant l'axe 4 permet de contrôler l'effort de contact sonde/peau du patient.

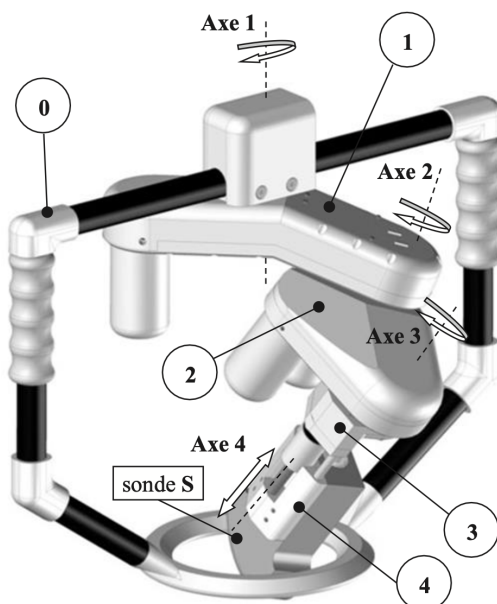
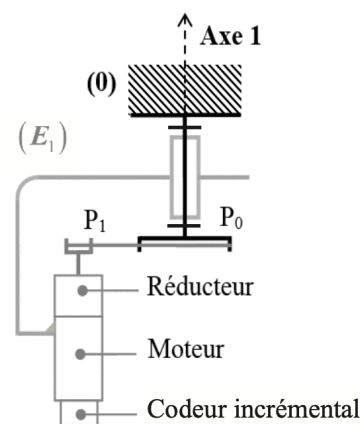


Figure 2 - Robot porte-sonde

FIGURE 2 – Robot porte-sonde



Réducteur (R)	Rapport de réduction $r = 1/30$
Poulie P ₀	Diamètre D ₀ = 46 mm
Poulie P ₁	Diamètre D ₁ = 12 mm

FIGURE 3 – Caractéristiques de la transmission

On nomme E_1 l'ensemble 1, 2, 3, 4.

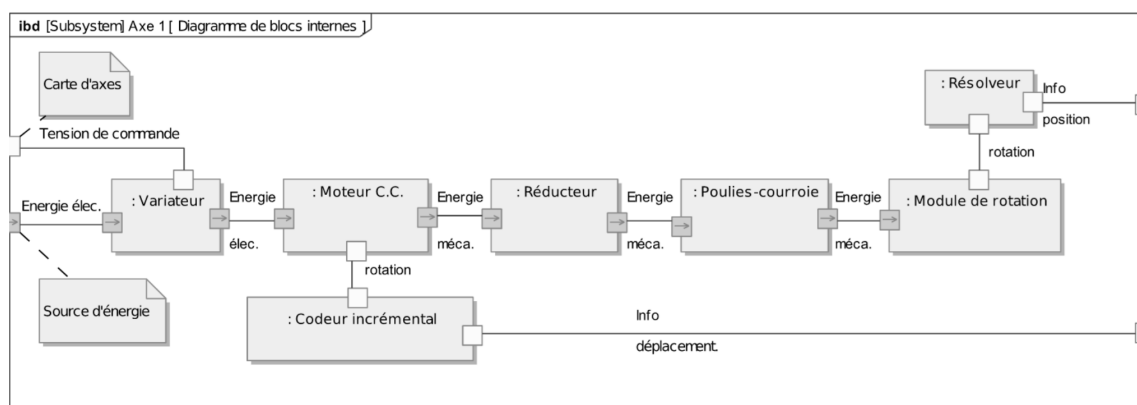


FIGURE 4 – Diagramme de blocs internes de l'axe 1

La chaîne fonctionnelle assurant la rotation R_1 de l'ensemble E_1 autour de l'axe 1 est décrite par le schéma cinématique de la figure 3 et le diagramme de bloc internes de la figure 4.

I.3 Problème posé

Afin que le praticien soit en mesure d'obtenir une image échographique d'intérêt, le système de télé-échographie doit lui permettre d'orienter la sonde de manière à trouver la meilleure incidence entre le plan ultrasonore et la partie de l'organe examinée. La qualité du positionnement de la sonde sur le patient qui conditionne l'obtention d'images d'intérêt nécessite de maîtriser notamment :

- le mouvement imposé à la sonde par le robot porte-sonde ;
- la commande, depuis un site distant, des différents axes du robot porte-sonde.

L'objectif de cette étude est de vérifier certaines performances du système afin de valider partiellement le respect des exigences liées au positionnement de la sonde échographique.

I.4 Démarche proposée

Le respect des exigences 1.1 relatives au déplacement de la sonde fait l'objet de la Partie 2. Celle-ci a pour objectif de vérifier que la structure mécanique retenue est compatible avec les exigences liées au mouvement à imposer à la sonde (exigence 1.1.1) et à l'espace de travail attendu (exigence 1.1.2).

Le respect des exigences 1.2 relatives à la commande du robot porte-sonde est abordé à travers les points suivants prévision des performances et synthèse de la commande du premier axe du robot, en vitesse (exigence 1.2.1.1) et en position (exigence 1.2.1.2), c'est l'objet de la Partie 3,.

II Validation des performances cinématiques du robot porte-sonde

Objectif : Vérifier que les différentes exigences 1.1 relatives au déplacement de la sonde peuvent être satisfaites.

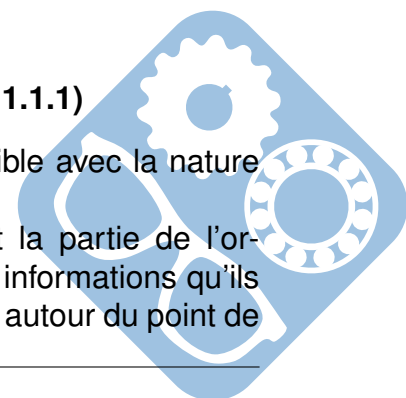
Modélisation cinématique du robot porte-sonde

Le schéma cinématique du robot porte-sonde et le paramétrage associé sont donnés dans les figures 5 et 6. Il n'est pas nécessaire de savoir lire un schéma cinématique pour répondre aux questions.

II.0.1 Validation de l'exigence " Nature du mouvement " (exigence 1.1.1)

Objectif : Vérifier que l'architecture du robot porte-sonde est compatible avec la nature du mouvement attendu.

Afin de trouver la meilleure incidence entre le plan ultrasonore et la partie de l'organe examinée, et pour obtenir une image d'échographie contenant les informations qu'ils cherchent, les praticiens imposent à la sonde un déplacement sphérique autour du point de



contact O, soit une composition de trois rotations. C'est donc naturellement le mouvement attendu lors de la manipulation de la sonde par le robot. Pour la suite de l'étude, on considère que dans sa position initiale, la sonde est en contact avec le patient. Sur le schéma cinématique de la figure 5, le point O_S , extrémité de la sonde, est alors confondu avec le point O, origine du repère lié au patient.

Objectif intermédiaire : Démontrer que dans la configuration bras tendu, $\overrightarrow{V_{O_S \in 4/0}} = \vec{0}$.

Question 1 : A l'aide des informations données figure 5, écrire une composition de vecteurs vitesse pour donner l'expression de $\overrightarrow{V_{O_S \in 4/0}}$.

Question 2 : Dans la configuration bras tendu, déterminer $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{2/1}}$.

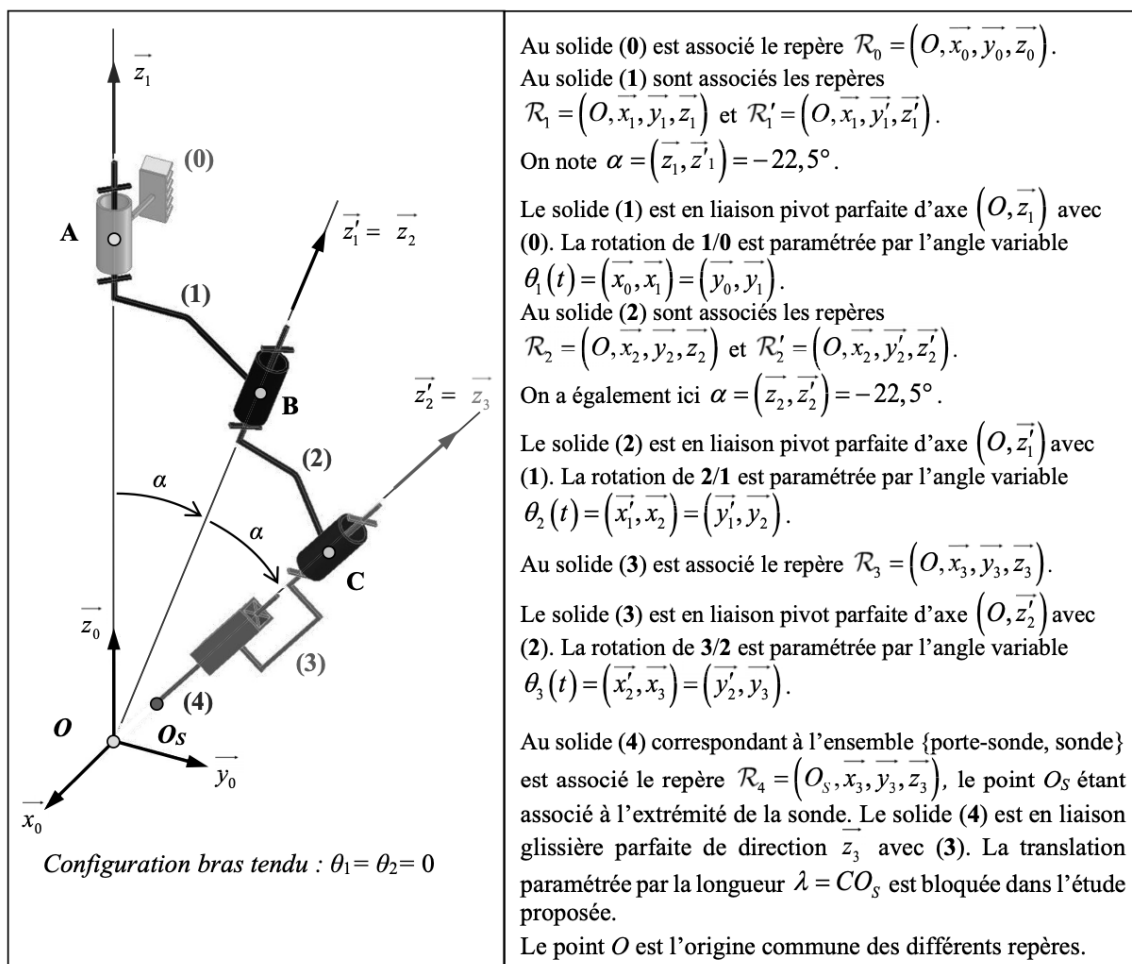


FIGURE 5 – Schéma cinématique et paramétrage du robot porte-sonde configuration bras tendu

Question 3 : Le point A est sur l'axe de rotation entre le solide 1 et le bâti 0. Déterminer $\overrightarrow{V_{O_S \in 1/0}}$ en écrivant une relation de champs de vecteurs vitesse entre les points A et O_S dans le mouvement de 1 par rapport au bâti (Théorème de Varignon).

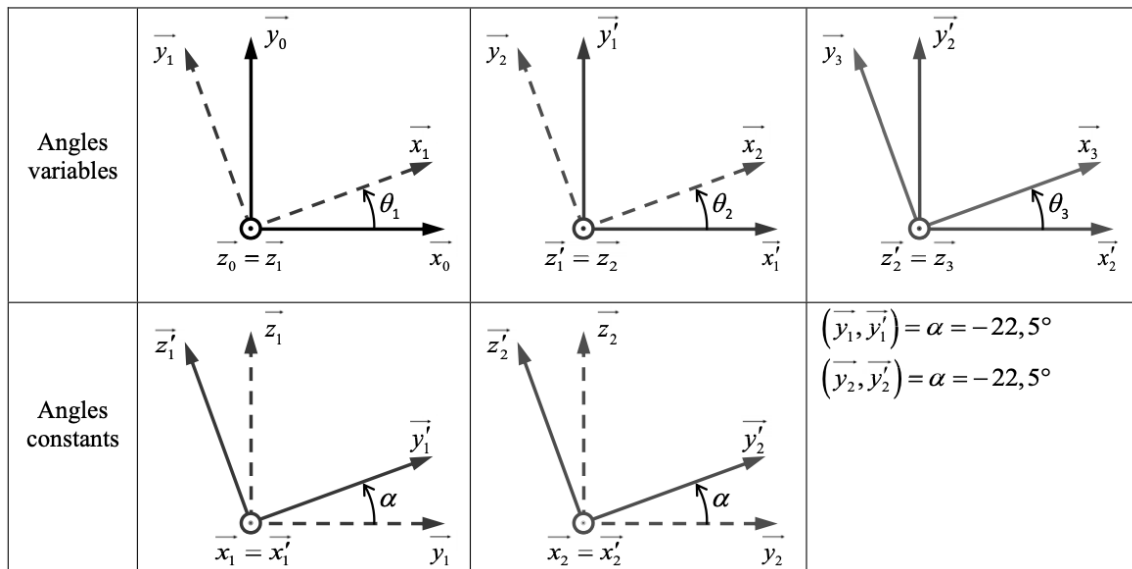


FIGURE 6 – Figures de changement de base associées au robot porte-sonde

Question 4 : Le point B est sur l'axe de rotation entre le solide 2 et le solide 1. Déterminer $\vec{V}_{O_S \in 2/1}$ en écrivant une relation de champs de vecteurs vitesse entre les points B et O_S dans le mouvement de 2 par rapport à 1 (Théorème de Varignon).

Question 5 : La translation du solide 4 par rapport à 3 est bloquée dans l'étude proposée. Déterminer alors $\vec{V}_{O_S \in 4/3}$.

Question 6 : Sachant que $\vec{O_S C} = \lambda \cdot \vec{z}_3$, déterminer $\vec{V}_{O_S \in 3/2}$.

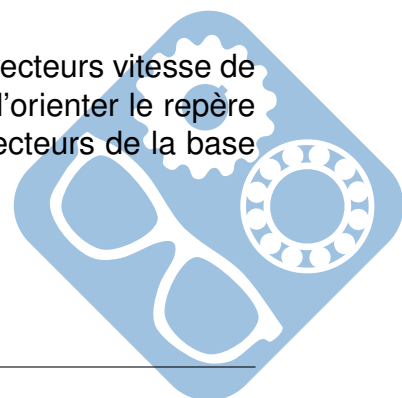
Question 7 : A l'aide des questions précédentes, démontrer alors que dans la configuration bras tendu, $\vec{V}_{O_S \in 4/0} = \vec{0}$.

Objectif : Validation de l'exigence 1.1.1

Question 8 : On rappelle que $\alpha = (\vec{z}_1, \vec{z}'_1) = (\vec{y}_1, \vec{y}'_1) = (\vec{z}_2, \vec{z}'_2) = (\vec{y}_2, \vec{y}'_2)$. Exprimer \vec{z}'_1 dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et \vec{z}'_2 dans la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.

Question 9 : En appliquant la loi de composition de mouvement sur les vecteurs vitesse de rotation, justifier, sans développer les calculs, qu'il est a priori possible d'orienter le repère R_3 lié à la sonde par rapport au repère R_0 par 3 rotations suivant les vecteurs de la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Question 10 : Conclure quant à la validation de l'exigence 1.1.1



II.1 Validation de l'exigence « Espace de travail » (exigence 1.1.2)

Objectif : Vérifier l'étendu de l'espace de travail (exigence 1.1.2)

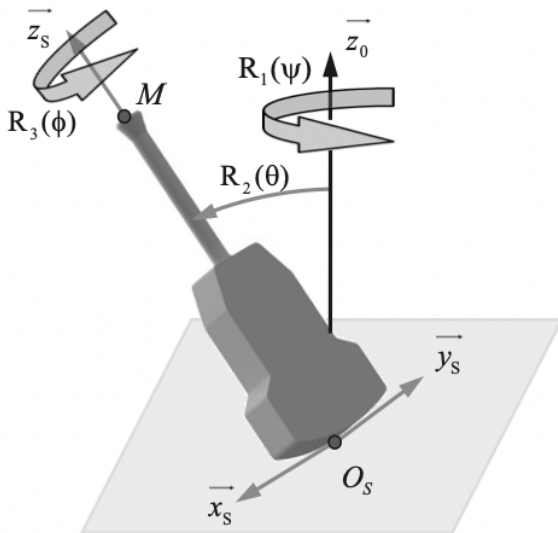


Figure 7 - Repère lié à la sonde et rotations

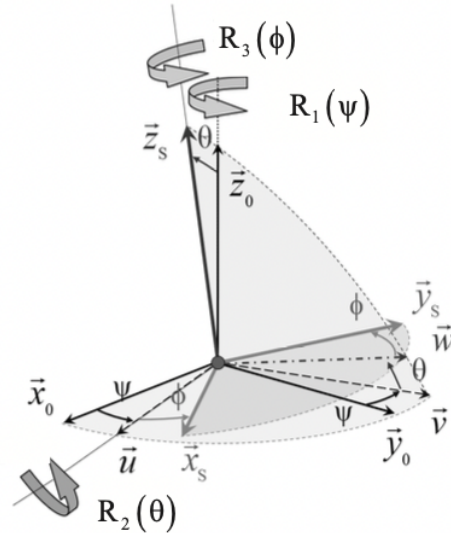


Figure 8 - Angles d'Euler

FIGURE 7 – Repères liés à la sonde

L'espace de travail d'un robot est défini comme l'ensemble des positions et orientations accessibles par le repère lié à son organe terminal. En se limitant à la configuration où la sonde reste en contact avec le patient (les points O_S et O restent confondus), la détermination de l'espace de travail revient ici à définir l'ensemble des orientations possibles pour l'ensemble porte-sonde, sonde, c'est-à-dire celles du repère $R_3 = (O, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ par rapport au repère $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

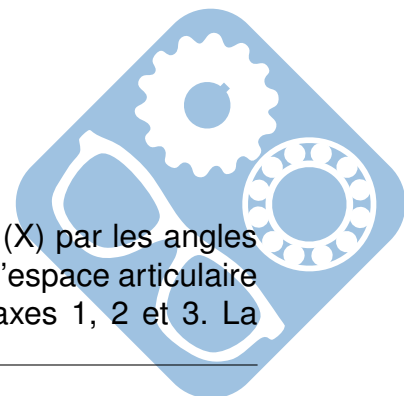
II.2 Orientation de la sonde par rapport au patient

À la sonde (S) est associé le repère $R_S = (O, \vec{x}_S, \vec{y}_S, \vec{z}_S)$ défini sur la figure 7. Ce repère est coïncidant avec le repère R_3 . Le contact sonde/patient est assimilé à un contact ponctuel au point O_S . L'orientation de la sonde par rapport au patient est paramétrée par trois successives $R_1(\psi)$, $R_2(\theta)$ et $R_3(\phi)$ auxquelles sont associés les angles d'Euler (ψ , θ , ϕ) (figures 7) :

- $\psi = (\vec{x}_0, \vec{u}) = (\vec{y}_0, \vec{v})$ est associé à la rotation R_1 autour de \vec{z}_0 ,
- $\theta = (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{z}_0, \vec{z}_S)$ est associé à la rotation R_2 autour de \vec{u} ,
- $\phi = (\vec{u}, \vec{x}_S) = (\vec{w}, \vec{y}_S)$ est associé à la rotation R_3 autour de \vec{z}_S .

II.3 Élaboration d'un modèle géométrique direct partiel

L'orientation de la sonde est paramétrée dans l'espace opérationnel (X) par les angles (ψ , θ , ϕ). Elle est liée à la configuration du robot défini quant à elle dans l'espace articulaire (Q) par les angles (θ_1 , θ_2 , θ_3) paramétrant les rotations autour des axes 1, 2 et 3. La



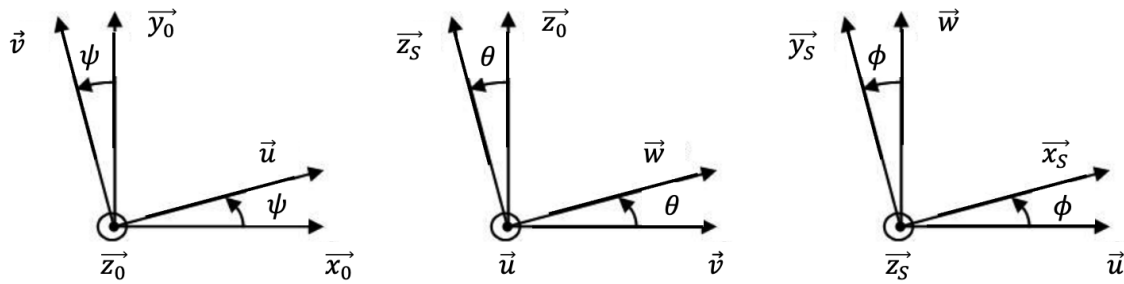
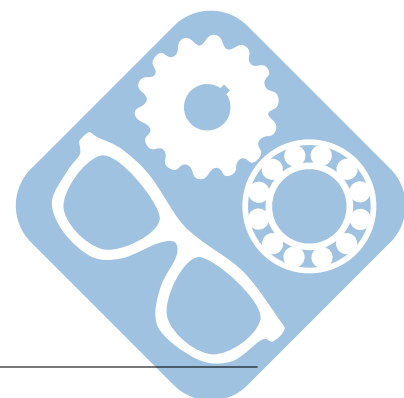


FIGURE 8 – Figures de changement de repère

détermination de l'espace de travail nécessite d'établir la relation entre les coordonnées opérationnelle (ψ, θ, ϕ), c'est-à-dire élaborer le modèle géométrique direct du robot.

Question 11 : L'orientation de l'axe de la sonde étant définie par le vecteur $\vec{z}_S = \vec{z}_3$, déterminer les expressions des projections de ce vecteur \vec{z}_S dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$ en fonction des coordonnées opérationnelles (θ), puis dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ en fonction des coordonnées opérationnelles (ψ, θ).



De la même manière, il est possible d'exprimer ce vecteur en projection dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ en fonction des coordonnées articulaires (θ_1, θ_2) :

$$\vec{z}_3 = \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \sin\theta_1 + \sin\alpha \cdot (\cos\alpha \cdot \sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2) \\ -\cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \cos\theta_1 - \sin\alpha \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2) \\ \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \cdot \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

Question 12 : Par identification des projections suivant \vec{z}_0 , déterminer l'expression de l'angle θ en fonction de θ_2 et α . Commenter le résultat obtenu et proposer une analyse de la courbe donnée en figure 9.

Question 13 : Montrer qu'en procédant de même avec les projections suivant \vec{x}_0 et \vec{y}_0 , on obtient les expressions suivantes permettant de calculer l'angle ψ :

$$\cos\Psi = \frac{\sin\alpha \cdot (-\sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 + \cos\alpha \cdot \cos\theta_1 \cdot (1 + \cos\theta_2))}{\sin\theta} \quad (1)$$

$$\sin\Psi = \frac{\sin\alpha \cdot (\cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2 + \cos\alpha \cdot \sin\theta_1 \cdot (1 + \cos\theta_2))}{\sin\theta} \quad (2)$$

Des relations similaires non présentées ici peuvent être obtenues pour l'angle ϕ . L'ensemble de ces résultats permet notamment d'obtenir les courbes de la figure 10, qui représentent les évolutions des angles ψ et ϕ pour $\theta_1 = 0^\circ$ et $\theta_2 \in [0^\circ; 180^\circ]$.

Question 14 : À partir d'une analyse des courbes obtenues, préciser en justifiant la réponse :

- les configurations dans lesquelles se trouve le robot pour les valeurs extrêmes de l'angle θ relatives à la courbe de la figure 9,
- les valeurs associées de l'angle $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_S)$,
- la nature et les caractéristiques de la surface générée par le mouvement de l'axe de la sonde (O, \vec{z}_S) .

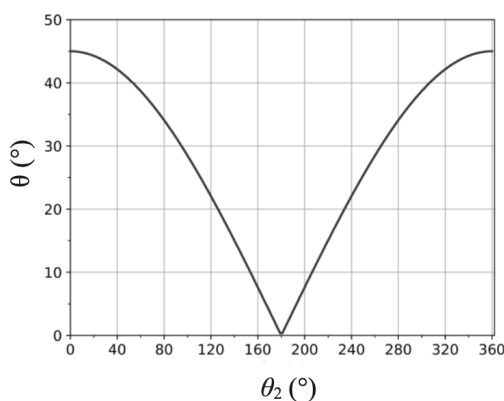


FIGURE 9 – Évolution de l'angle θ en fonction du paramètre articulaire θ_2

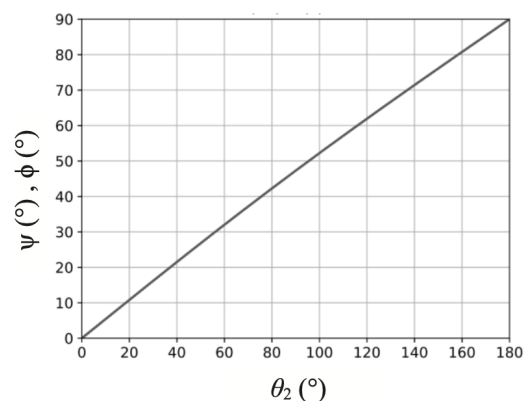


FIGURE 10 – Évolution des angles ψ et ϕ (les courbes sont ici confondues)

II.4 Prise en compte des butées articulaires

En pratique, l'espace de travail est limité par la présence de butées mécaniques sur les articulations, liées aux contraintes de mise en œuvre technique. En prenant comme référence la position du robot « bras tendu », les valeurs de ces butées sont telles que pour les 2 premiers axes : $\theta_1 \in [-165^\circ, 165^\circ]$, $\theta_2 \in [20^\circ, 340^\circ]$. Il n'y a pas de limitation sur l'axe 3 pour lequel $\theta_3 \in [0^\circ, 360^\circ]$. L'espace de travail peut être décrit à partir des positions accessibles par le point M, extrémité du vecteur unitaire \vec{z}_S d'origine O_S , porté par l'axe de la sonde (figure 7). Les points de coordonnées (z_{Sx}, z_{Sy}, z_{Sz}) associés à ces positions ont été représentés sur la figure 11 (le pas d'échantillonnage des paramètres articulaires θ_1 et θ_2 est de 2°) pour 2 configurations (a) et (b).

Question 15 : A partir de l'analyse des tracés de la figure 11, conclure quant à la validation de l'exigence 1.1.2 liée à l'espace de travail attendu.

Soit la fonction f définie de l'espace articulaire (Q) vers l'espace opérationnel (X), dont les applications coordonnées (f_1, f_2) sont telles que $f_1(\theta_1, \theta_2) = \theta$ et $f_2(\theta_1, \theta_2) = \psi$.

Question 16 : La fonction f est-elle bijective ? Justifier votre réponse en vous appuyant sur les tracés de la figure 11 et proposer une interprétation. Quelles seront les conséquences lors de la conception de la commande du robot ?

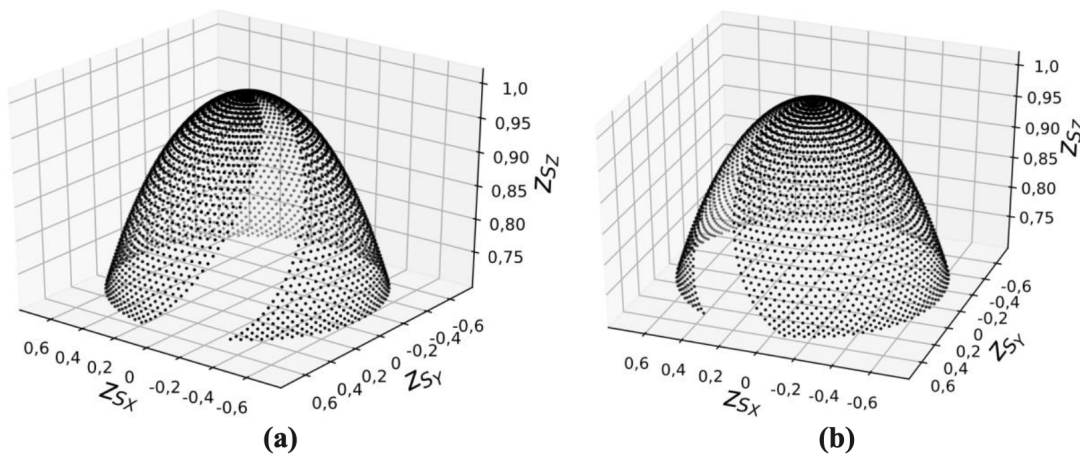


FIGURE 11 – Représentation de l'espace de travail θ_2 de 20 à 180° (a) et θ_2 de 180 à 340° (b)

III Commande en position du robot porte-sonde

Objectif : Vérifier que les différentes exigences 1.2 relatives à la commande en position du robot porte-sonde peuvent être satisfaites.



III.1 Principe de la commande du robot porte-sonde

La commande du robot porte-sonde repose sur la mise en œuvre de deux couches matérielles et logicielles qui communiquent l’une avec l’autre (figure 12).

Le contrôleur haut niveau, implémenté sur le PC de contrôle du poste patient, reçoit en paramètres d’entrée, les coordonnées du positionnement désiré pour la sonde échographique, dans l’espace de travail (Ψ, θ, ϕ) ainsi que les positions articulaires $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ acquises par le contrôle bas-niveau. L’ensemble de ces données est traité numériquement (calcul des modèles géométriques direct et inverse du robot, prise en compte des butées articulaires, des changements d’aspect et le traitement des singularités) afin de déterminer les consignes articulaires à transmettre au contrôleur bas niveau.

Le contrôleur bas niveau, implémenté sur la carte d’axes, reçoit les consignes articulaires et calcule les profils de vitesse $(\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))$ transmis ensuite aux variateurs de vitesse qui pilotent les moteurs des différents axes du robot. Il assure également l’acquisition des positions articulaires qui sont communiquées au contrôleur haut niveau.

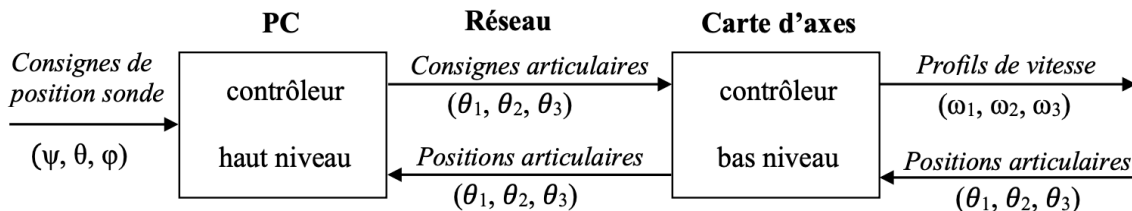


FIGURE 12 – Principe de commande du robot porte-sonde

Commande de l’axe 1

On se limite ici à l’étude de la commande du premier axe, dont la structure est présentée en figure 4. Le principe associé à cette commande est décrit par la figure 13. La structure de commande de la position angulaire θ_1 est composée de deux boucles imbriquées disposant chacune d’un réseau correcteur :

- une boucle interne de vitesse, gérée par le variateur ;
- une boucle externe de position, gérée par la carte d’axes.

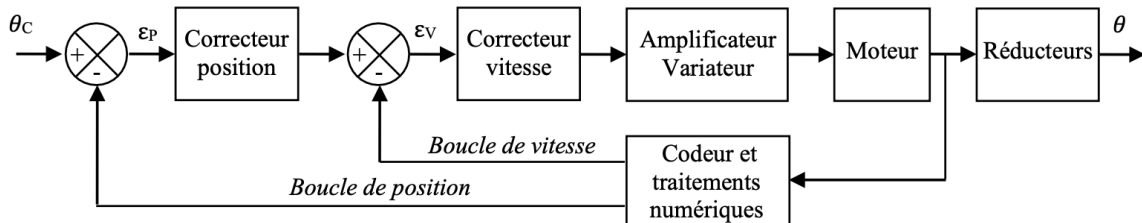
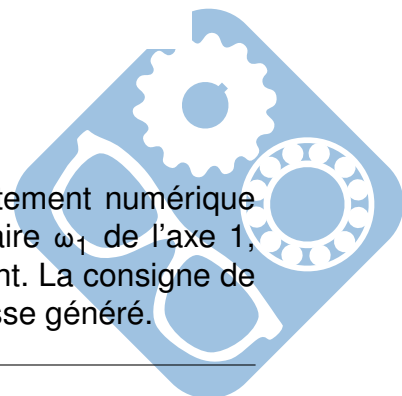


FIGURE 13 – Structure de l’asservissement d’un axe

Un codeur incrémental, solidaire de l’axe moteur permet après traitement numérique d’obtenir une image de la position angulaire θ_1 et de la vitesse angulaire ω_1 de l’axe 1, grandeurs mises en œuvre au niveau des deux boucles d’asservissement. La consigne de position est élaborée par la carte d’axes, par intégration du profil de vitesse généré.



III.2 Modélisation de l'axe 1

Objectif : Élaborer un modèle de connaissance de l'axe 1 et réaliser la synthèse de la commande.

Modélisation de la motorisation

On note $\Omega_m(p)$, $U(p)$, $E(p)$, $I(p)$, $C_m(p)$ et $C_{re}(p)$, les transformées de Laplace respectives de $\omega_m(t)$, $u(t)$, $e(t)$, $i(t)$, $c_m(t)$ et $c_{re}(t)$.

$$u(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + e(t) \tag{3}$$

$$c_m(t) = k_c \cdot i(t) \tag{4}$$

$$e(t) = k_e \cdot \omega_m(t) \tag{5}$$

$$c_m(t) - c_{re}(t) = J_{eq} \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} \tag{6}$$

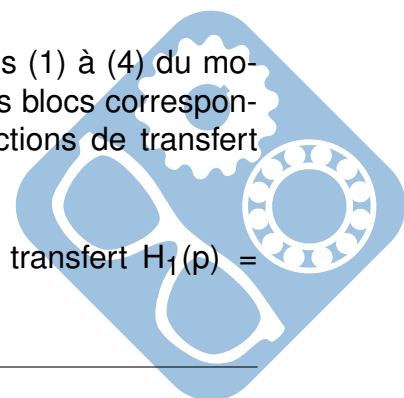
Les différentes grandeurs intervenant dans le modèle sont définies sur la figure 14 suivante :

Symbole	Désignation	Unités / valeurs
$u(t)$	Tension d'induit	V
$e(t)$	Force contre-électromotrice	V
$i(t)$	Courant d'induit	A
$\omega_m(t)$	Vitesse de rotation du moteur	rad/s
$C_m(t)$	Couple moteur	N·m
$C_{re}(t)$	Couple résistant équivalent ramené sur l'axe moteur	N·m
R	Résistance de l'induit	6 Ω
L	Inductance de l'induit	0,2 mH
k_e	Constante de force contre-électromotrice	$3 \cdot 10^{-2}$ V/(rad/s)
k_c	Constante de couple	$3 \cdot 10^{-2}$ N·m/A
J_{eq}	Inertie équivalente ramenée sur l'axe moteur	$\in [5 \cdot 10^{-6}, 9 \cdot 10^{-6}]$ kg·m ²

FIGURE 14 – Grandeurs associées au modèle de la motorisation

Question 17 : Déterminer les transformations de Laplace des équations (1) à (4) du moteur définies en considérant des conditions initiales nulles. Compléter les blocs correspondants sur le schéma-bloc fourni sur le document réponse par les fonctions de transfert manquantes.

Question 18 : Déterminer les expressions littérales des fonctions de transfert $H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} \Big|_{C_{re}(p)=0}$ et $H_2(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_{re}(p)} \Big|_{U(p)=0}$. Mettre sous forme canonique.



On pose $\tau_e = \frac{L}{R}$ et $\tau_{em} = \frac{R \cdot J_{eq}}{k_e \cdot k_c}$, respectivement constantes de temps électrique et électromécanique du moteur à courant continu.

Question 19 : Déterminer les valeurs numériques des constantes de temps τ_e et τ_{em} , pour les valeurs extrêmes de J_{eq} . En déduire qu'une constante de temps peut être considérée comme négligeable devant l'autre.

Question 20 : Montrer, en précisant l'expression de K_m , que la fonction $H_1(p)$ peut alors de mettre sous la forme : $H_1(p) \approx \frac{K_m}{(1+\tau_e \cdot p)(1+\tau_{em} \cdot p)}$.

Modélisation de la boucle de vitesse

La figure 15 présente la structure de la boucle de vitesse associée à la commande de l'axe 1. Pour une consigne de vitesse de rotation $\omega_c(t)$ [$m \cdot s^{-1}$], un convertisseur génère une tension de consigne de rotation à appliquer au moteur $u_{cv}(t)$ [V]. Un traitement numérique de la vitesse relevée sur l'axe du moteur fournit une tension mesurée $u_{mv}(t)$ [V], image de la vitesse de rotation du moteur $\omega_m(t)$. Un correcteur adapte le signal écart entre la tension de consigne et la tension mesurée, ce qui permet après correction et amplification, de définir la tension d'alimentation $u_m(t)$ à appliquer au moteur.

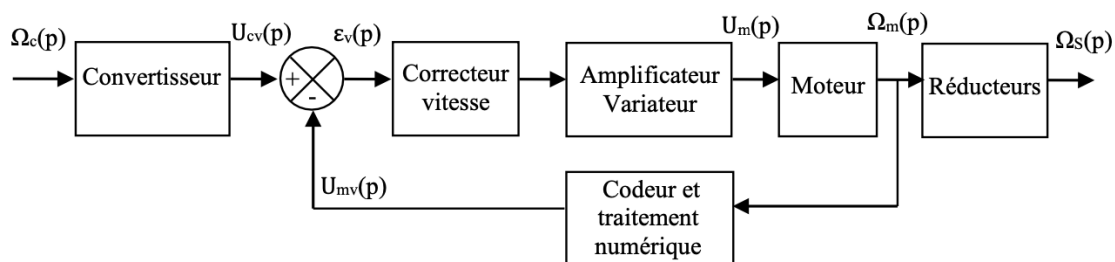


FIGURE 15 – Asservissement en vitesse d'un axe

Le tableau de la figure 16 liste les gains des différents composants intervenant dans la commande de l'axe 1.

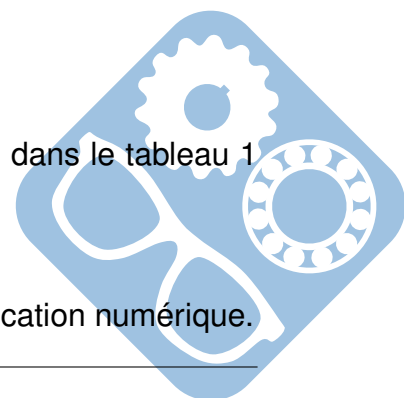
Blocs	Fonctions de transfert
Convertisseur	K_{conv} (à déterminer)
Correcteur vitesse	$C_V(p)$ (réglé par la suite)
Amplificateur/variateur	$K_A = 10$
Codeur et traitement	$K_{vit} = 8 \cdot 10^{-3}$ V/(rad/s)
Réducteurs	K_R (à déterminer)

FIGURE 16 – Gains des composants

On rappelle que les caractéristiques de la transmission sont définies dans le tableau 1 de la figure 3.

On note que $\frac{\Omega_S}{\Omega_r} = -\frac{D_1}{D_0}$ et $\frac{\Omega_r}{\Omega_m} = r$.

Question 21 : Déterminer l'expression du gain K_R (littérale). Faire l'application numérique.



Question 22 : Déterminer $\varepsilon_V(p)$ en fonction de $\Omega_S(p)$, $\Omega_C(p)$, K_{conv} , K_{vit} et K_R . Déterminer l'expression de K_{conv} pour que $\varepsilon_V(p) = 0$ lorsque $\Omega_S(p) = \Omega_C(p)$. Faire l'application numérique.

Question 23 : Compléter le schéma-bloc sur le document réponse en y faisant figurer les fonctions de transfert sous forme littérale dans le domaine de Laplace avec des conditions initiales nulles.

On pourrait montrer que le schéma-bloc peut se ramener au schéma à retour unitaire de la figure 17, avec $G_1(p) = \frac{k_C}{R} \cdot \frac{1}{1+\tau_e \cdot p}$, $G_2(p) = \frac{R}{k_C} \cdot \frac{1}{1+\tau_{em} \cdot p}$ et $K = K_{vit} \cdot K_A \cdot K_m$.

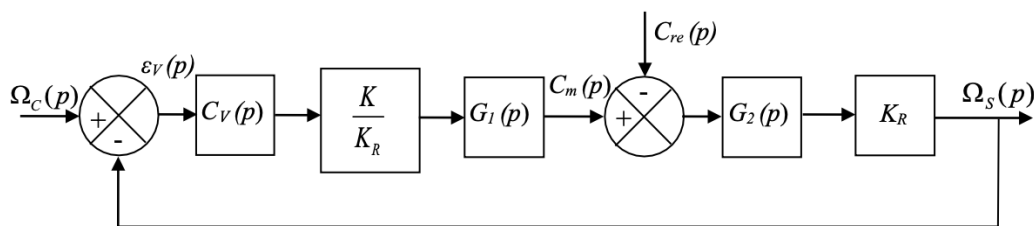


FIGURE 17 – Schéma-bloc équivalent pour la boucle de vitesse

Question 24 : A partir du schéma-bloc à retour unitaire de la figure 17, déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte $H_{BO}(p) = \frac{\Omega_S(p)}{\varepsilon_V(p)} \Big|_{C_{re}(p)=0}$ et de la fonction boucle fermée $H_{BF}(p) = \frac{\Omega_S(p)}{\Omega_C(p)} \Big|_{C_{re}(p)=0}$ en fonction de $C_V(p)$ (constante), τ_e , τ_{em} , K et les paramètres du moteur. Indiquer la classe et l'ordre de ces 2 fonctions de transfert.

On considère une entrée $\Omega_C(p)$ en échelon, $\Omega_C(p) = \frac{\Omega_0}{p}$, avec $\Omega_0 = 0.1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $C_V(p) = 1$.

Question 25 : Démontrer que $\varepsilon_V(p) = (1 - H_{BF}(p)) \cdot \Omega_C(p)$. En citant le théorème utilisé, calculer l'erreur statique ε_S . Discuter de la validation de l'exigence 1.2.1.1.2.

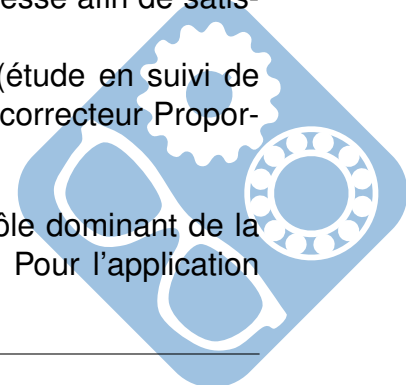
Il est nécessaire de mettre en place une action intégrale au niveau du correcteur.

III.3 Synthèse de la commande : boucle de vitesse

Objectif : Déterminer les paramètres du correcteur de la boucle de vitesse afin de satisfaire l'exigence 1.2.1.1.

Le système est à présent considéré en l'absence de perturbation (étude en suivi de consigne), soit $C_{re}(p) = 0$. Le correcteur de la boucle de vitesse est un correcteur Proportionnel Intégral (PI), de fonction de transfert : $C_V(p) = K_i \cdot \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p}$

La constante de temps T_i est choisie de manière à compenser le pôle dominant de la fonction de transfert du moteur, ce qui revient ici à prendre $T_i = \tau_{em}$. Pour l'application numérique on prendra $\tau_{em} = \tau_{em \text{ max}}$.



Question 26 : Déterminer en fonction des paramètres K_i , K , τ_{em} et τ_e , l'expression littérale de la fonction de transfert en vitesse sous la forme canonique d'un système du second ordre : $H_V(p) = \frac{\Omega_S(p)}{\Omega_C(p)} = \frac{K_V}{1 + \frac{2 \cdot z}{\omega_0} \cdot p + \frac{1}{\omega_0^2} \cdot p^2}$. Préciser la valeur de K_V et les expressions

littérales de z et ω_0 .

Le gain K_i du correcteur est fixé de manière à obtenir la réponse la plus rapide sans dépassement en boucle fermée. On rappelle que pour un modèle du second ordre, la réponse la plus rapide sans dépassement est obtenue pour un facteur d'amortissement $z = 1$, valeur pour laquelle on a $t_{r5\%} \omega_0 \approx 5$. On se place dans le cas où l'inertie équivalente est maximale, soit $J_{eq} = 8.6 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Question 27 : Déterminer l'expression de K_i ainsi que sa valeur numérique. Déterminer la valeur du temps de réponse $t_{r5\%}$ de la boucle de vitesse pour cette valeur de K_i .

On donne, sur le document réponse question 28, le diagramme de Bode de la fonction de transfert boucle ouverte $H_{BO}(p)$ ainsi corrigée.

Question 28 : Tracer les asymptotes sur le diagramme de Bode en Gain et sur le diagramme de Bode en phase. Déterminer alors graphiquement $H_{BO}(p)$ et ses valeurs caractéristiques.

III.4 Performances de la commande en position

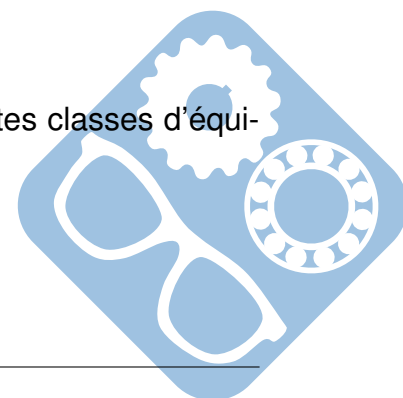
Objectif : Vérifier les performances attendues pour la boucle de position (exigence 1.2.1.2.).

Les performances de la boucle de vitesse étant validées, on complète le modèle numérique avec la boucle de position (figure 13). Les paramètres du correcteur Proportionnel Intégral Dérivé (PID) de la boucle de position sont déterminés à l'aide de l'outil de simulation numérique. La réponse temporelle en position de l'axe 1, pour une consigne en échelon de 10° , est représentée sur la figure du document réponse, question 29.

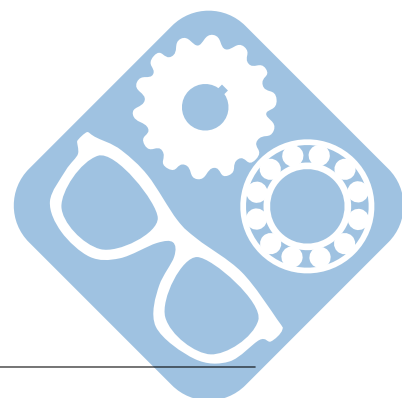
Question 29 : En faisant apparaître les constructions, déterminer graphiquement le temps de réponse à 5% du système. Conclure quant au respect de l'exigence 1.2.1.2.

IV Lecture de plan

Question 30 : Sur le dessin du document réponse, colorier les différentes classes d'équivalence du système.



Fin de l'épreuve



V Annexe

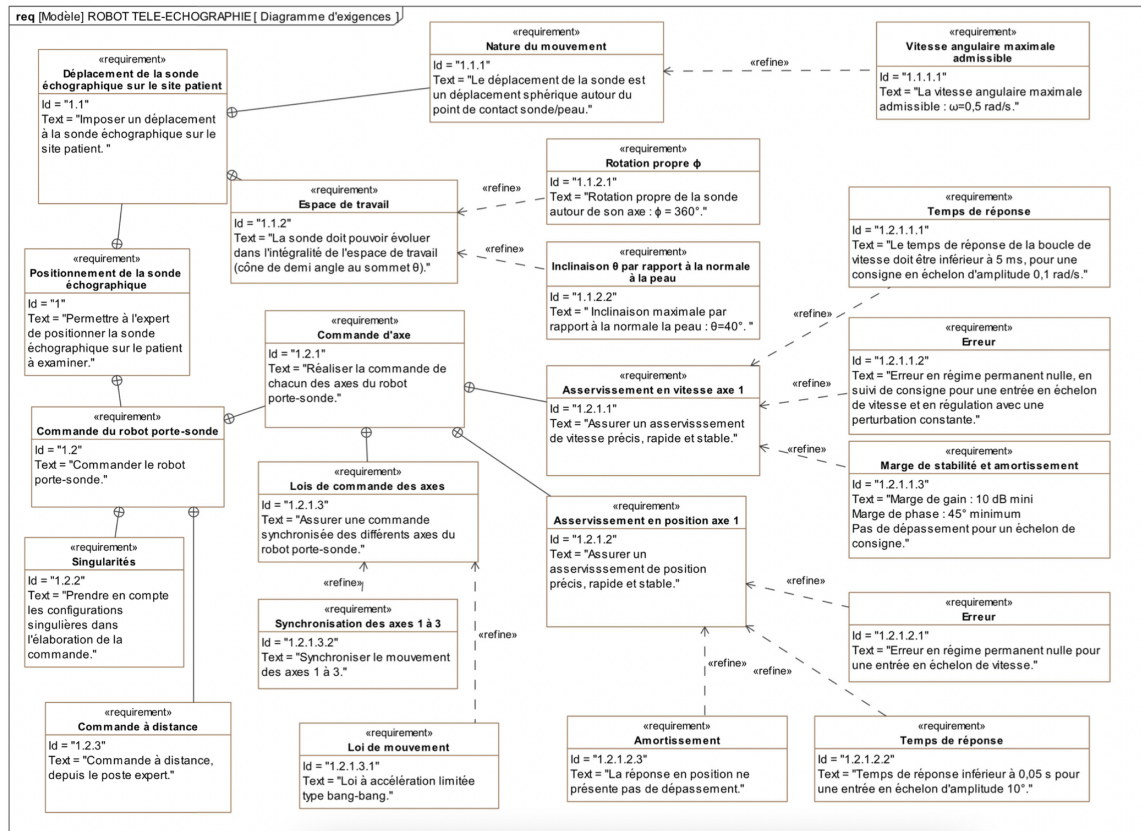
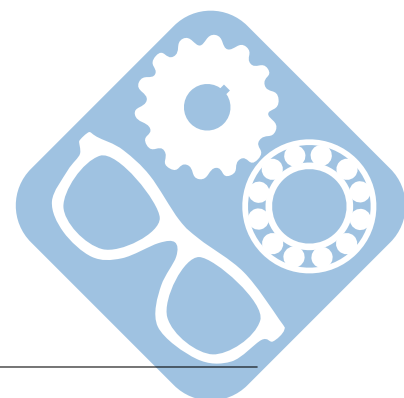
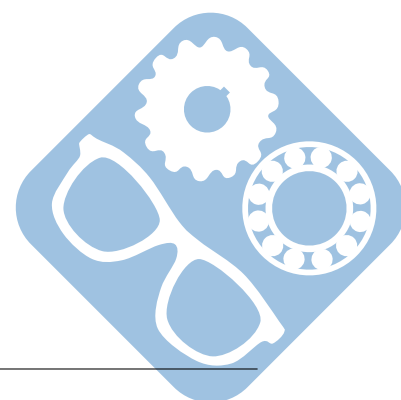


FIGURE 18 – Diagramme d'exigences





Question 1 :

$$\vec{V}_{O_S \in 4/0} = \vec{V}_{O_S \in 4/3} + \vec{V}_{O_S \in 3/2} + \vec{V}_{O_S \in 2/1} + \vec{V}_{O_S \in 1/0}$$

Question 2 :

$\vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta}_1 \cdot \vec{z}_0, \vec{\Omega}_{2/1} = \dot{\theta}_2 \cdot \vec{z}'_1$. Dans la configuration bras tendu, θ_1 et θ_2 sont constants, donc $\vec{\Omega}_{1/0} = \vec{0}$ et $\vec{\Omega}_{2/1} = \vec{0}$

Question 3 :

$$\vec{V}_{O_S \in 1/0} = \vec{V}_{A \in 1/0} + \vec{O_S \hat{A}} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = \vec{V}_{A \in 1/0} \text{ car } \vec{O_S \hat{A}} \text{ et } \vec{\Omega}_{1/0} \text{ sont colinéaires, donc } \vec{V}_{O_S \in 1/0} = \vec{0}$$

Question 4 :

$$\vec{V}_{O_S \in 2/1} = \vec{V}_{B \in 2/1} + \vec{O_S \hat{B}} \wedge \vec{\Omega}_{2/1} = \vec{V}_{B \in 2/1} \text{ car } \vec{O_S \hat{B}} \text{ et } \vec{\Omega}_{2/1} \text{ sont colinéaires, donc } \vec{V}_{O_S \in 2/1} = \vec{0}$$

Question 5 :

Si la translation est bloquée alors $\vec{V}_{O_S \in 4/3} = \vec{0}$

Question 6 :

$$\vec{V}_{O_S \in 3/2} = \left[\frac{d\vec{CO_S}}{dt} \right]_{R_2} = - \left[\frac{d\lambda \cdot \vec{z}_3}{dt} \right]_{R_2} = -\lambda \cdot \vec{\Omega}_{3/2} \wedge \vec{z}_3 = \vec{0} \text{ car } \vec{\Omega}_{3/2} \text{ et } \vec{z}_3 \text{ sont colinéaires.}$$

Question 7 :

On obtient donc $\vec{V}_{O_S \in 4/0} = \vec{0}$.

Question 8 :

$$\vec{z}'_1 = -\sin\alpha \cdot \vec{y}_1 + \cos\alpha \cdot \vec{z}_1$$

$$\vec{z}'_1 = -\sin\alpha \cdot (-\sin\theta_1 \cdot \vec{x}_0 + \cos\theta_1 \cdot \vec{y}_0) + \cos\alpha \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{z}'_1 = \sin\alpha \cdot \sin\theta_1 \cdot \vec{x}_0 - \sin\alpha \cdot \cos\theta_1 \cdot \vec{y}_0 + \cos\alpha \cdot \vec{z}_0$$

$$\text{De même, } \vec{z}'_2 = \sin\alpha \cdot \sin\theta_2 \cdot \vec{x}'_1 - \sin\alpha \cdot \cos\theta_2 \cdot \vec{y}'_1 + \cos\alpha \cdot \vec{z}'_1 = \sin\alpha \cdot \sin\theta_2 \cdot \vec{x}_1 - \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot (1 + \cos\theta_2) \cdot \vec{y}_1 + (\cos^2\alpha - \cos\theta_2 \cdot \sin^2\alpha) \cdot \vec{z}_1$$

Question 9 :

$$\vec{\Omega}_{3/0} = \vec{\Omega}_{3/2'} + \vec{\Omega}_{2'/2} + \vec{\Omega}_{2/1'} + \vec{\Omega}_{1'/1} + \vec{\Omega}_{1/0} = \dot{\theta}_3 \cdot \vec{z}_3 + \dot{\theta}_2 \cdot \vec{z}_2 + \dot{\theta}_1 \cdot \vec{z}_1.$$

$\vec{z}_1 = \vec{z}_0, \vec{z}_3$ et \vec{z}_2 s'écrivent en fonction de \vec{x}_0, \vec{y}_0 et \vec{z}_0 .

Question 10 :

Comme il y a trois rotations indépendantes, le mouvement est bien sphérique.

Question 11 :

$$\vec{z}_S = -\sin\theta \cdot \vec{v} + \cos\theta \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{z}_S = -\sin\theta \cdot (-\sin\psi \cdot \vec{x}_0 + \cos\psi \cdot \vec{y}_0) + \cos\theta \cdot \vec{z}_0$$

$$\vec{z}_S = \sin\theta \cdot \sin\psi \cdot \vec{x}_0 - \sin\theta \cdot \cos\psi \cdot \vec{y}_0 + \cos\theta \cdot \vec{z}_0$$

Question 12 :

$$\cos\theta = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \cdot \cos\theta_2$$

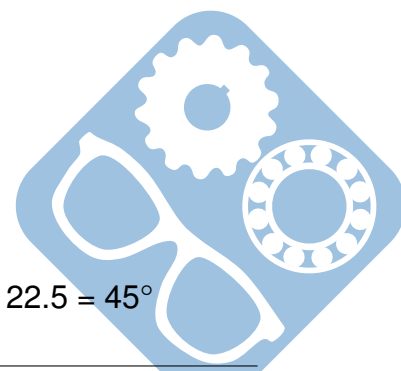
$$\theta = \arccos(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha \cdot \cos\theta_2)$$

On voit que :

— $\theta_2 = 180^\circ \Rightarrow \theta = \arccos(1) = 0^\circ$

— $\theta(\theta_2) = \theta(-\theta_2)$, donc il y a une symétrie par rapport à $\theta_2 = 180^\circ$,

— si $\theta_2 = 0$, alors $\theta = \arccos(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \arccos(\cos(2 \cdot \alpha)) = 2 \cdot 22.5 = 45^\circ$



Question 13 :

$$\sin\theta \cdot \sin\psi = \cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \sin\theta_1 + \sin\alpha \cdot (\cos\alpha \cdot \sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2)$$

$$\sin\psi = \frac{\sin\alpha \cdot (\cos\alpha \cdot \sin\theta_1 \cdot (1 + \cos\theta_2) + \cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2)}{\sin\theta}$$

$$\cos\psi = \frac{\cos\alpha \cdot \sin\alpha \cdot \cos\theta_1 + \sin\alpha \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2)}{\sin\theta}$$

$$\cos\psi = \frac{\sin\alpha \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\theta_1 \cdot (1 + \cos\theta_2) - \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2)}{\sin\theta}$$

Question 14 :

- a) $\theta = 0 : \theta_2 = 180$ (bras replié), $\psi = \phi = 90$ $\theta = 45, \theta_2 = 0$ (bras tendu), $\psi = \phi = 0$,
- b) $\theta = 0 : \vec{x}_0 = -\vec{v}, \vec{v} = \vec{w}, \vec{x}_S = \vec{w}$, donc $\beta = 180^\circ$, $\theta = 45 : \vec{x}_0 = \vec{u}, \vec{x}_S = \vec{u}$, donc $\beta = 0^\circ$,
- c) La surface balayée par l'axe de la sonde appartient à un cône de révolution de sommet O et d'axe (O, \vec{z}_2)

Question 15 :

L'espace de travail complet est obtenu en sommant les deux espaces de la figure 11. On constate qu'il y a recouvrement sauf pour une zone proche de (0.1,0.4,0.7). On peut cependant supposer que cette zone n'est pas nécessaire pour satisfaire le cahier des charges.

Question 16 :

En sachant qu'il y a recouvrement pour la majorité des coordonnées, la fonction n'est pas bijective, il y a plusieurs antécédents pour une même image. Il faudra donc le prendre en compte dans la commande pour que les variations se fassent de manière continue.

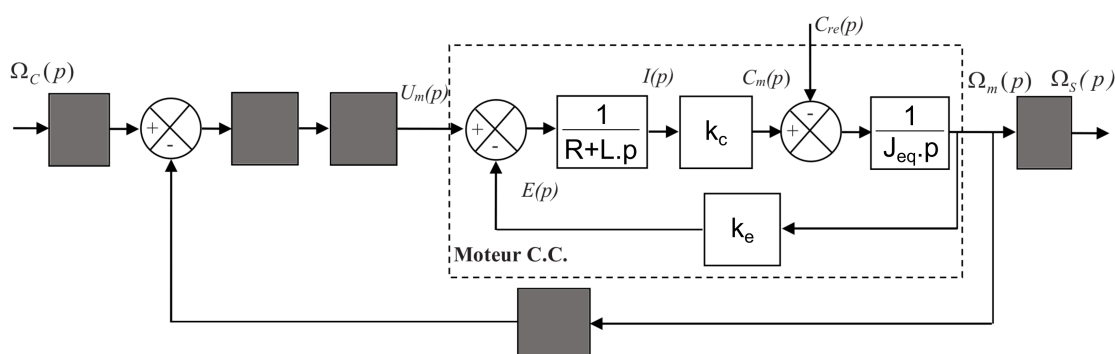
Question 17 :

$$U(p) = R \cdot I(p) + L \cdot p \cdot I(p) + E(p) \tag{7}$$

$$C_m(p) = k_c \cdot I(p) \tag{8}$$

$$E(p) = k_e \cdot \Omega_m(p) \tag{9}$$

$$C_m(p) - C_{re}(p) = J_{eq} \cdot p \cdot \Omega_m(p) \tag{10}$$



Question 18 :

$$H_1(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U(p)} \Big|_{C_{re}(p)=0} = \frac{\frac{1}{R+L \cdot p} \cdot k_c \cdot \frac{1}{J_{eq} \cdot p}}{1 + \frac{1}{R+L \cdot p} \cdot k_c \cdot \frac{1}{J_{eq} \cdot p} \cdot k_e} = \frac{k_c}{J_{eq} \cdot p \cdot (R+L \cdot p) + k_c \cdot k_e}$$

$$H_1(p) = \frac{\frac{1}{k_e}}{1 + \frac{J_{eq} \cdot R}{k_c \cdot k_e} \cdot p + \frac{J_{eq} \cdot L}{k_c \cdot k_e} \cdot p^2}$$

$$H_2(p) = \frac{\Omega_m(p)}{C_{re}(p)} \Big|_{U(p)=0}$$

$$I(p) = \frac{-E(p)}{R+L \cdot p}$$

$$C_m(p) = k_c \cdot \frac{-k_e \cdot \Omega_m(p)}{R+L \cdot p}$$

$$\left[k_c \cdot \frac{-k_e}{R+L \cdot p} - J_{eq} \cdot p \right] \cdot \Omega_m(p) = C_{re}(p)$$

$$\frac{\Omega_m(p)}{C_{re}(p)} = -\frac{R+L \cdot p}{k_c \cdot k_e + J_{eq} \cdot p \cdot (R+L \cdot p)}$$

$$H_2(p) = -\frac{R}{k_c \cdot k_e} \cdot \frac{1 + \frac{L}{R} \cdot p}{1 + \frac{J_{eq} \cdot R}{k_c \cdot k_e} \cdot p + \frac{J_{eq} \cdot L}{k_c \cdot k_e} \cdot p^2}$$

Question 19 :

$$\tau_e = \frac{L}{R} = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{6} \approx 3 \cdot 10^{-5} \approx 0.03 \text{ms}$$

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{32 \cdot 10^{-4}} \leq \tau_{em} \leq \frac{6 \cdot 9 \cdot 10^{-6}}{32 \cdot 10^{-4}}$$

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{9 \cdot 10^{-4}} \leq \tau_{em} \leq \frac{6 \cdot 9 \cdot 10^{-6}}{9 \cdot 10^{-4}}$$

$$\frac{5}{3} \cdot 10^{-4} \leq \tau_{em} \leq 6 \cdot 10^{-2}$$

$$0.017 \leq \tau_{em} \leq 0.06$$

Donc, τ_e est négligeable devant τ_{em} .

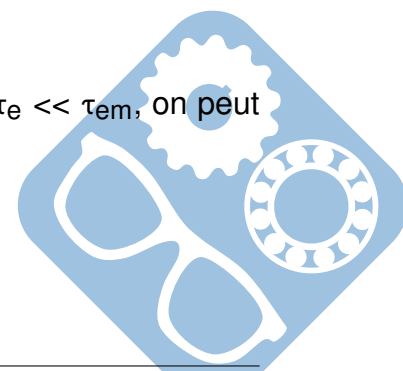
Question 20 :

$$H_1(p) = \frac{\frac{1}{k_e}}{1 + \frac{J_{eq} \cdot R}{k_c \cdot k_e} \cdot p + \frac{L}{R} \cdot \frac{J_{eq} \cdot R}{k_c \cdot k_e} \cdot p^2} = \frac{\frac{1}{k_e}}{1 + \tau_{em} \cdot p + \tau_e \cdot \tau_{em} \cdot p^2}$$

Or $\frac{\frac{1}{k_e}}{(1 + \tau_{em} \cdot p) \cdot (1 + \tau_e \cdot p)} = \frac{\frac{1}{k_e}}{1 + (\tau_{em} + \tau_e) \cdot p + \tau_e \cdot \tau_{em} \cdot p^2}$ et comme $\tau_e \ll \tau_{em}$, on peut écrire

$$H_1(p) \approx \frac{\frac{1}{k_e}}{(1 + \tau_{em} \cdot p) \cdot (1 + \tau_e \cdot p)}$$

$$\text{Donc } K_m = \frac{1}{k_e}$$



Question 21 :

$$K_R = \frac{\Omega_S(p)}{\Omega_m(p)} = -\frac{D_1}{D_0} \cdot r = -\frac{12}{48} \cdot \frac{1}{30} = -\frac{1}{120} \approx -0.008$$

Question 22 :

$$\varepsilon_v(p) = U_{cv}(p) - U_{mv}(p) = \Omega_C(p) \cdot K_{conv} - \Omega_m(p) \cdot K_{vit}$$

$$\varepsilon_v(p) = \Omega_C(p) \cdot K_{conv} - \Omega_S(p) \cdot \frac{K_{vit}}{K_R}$$

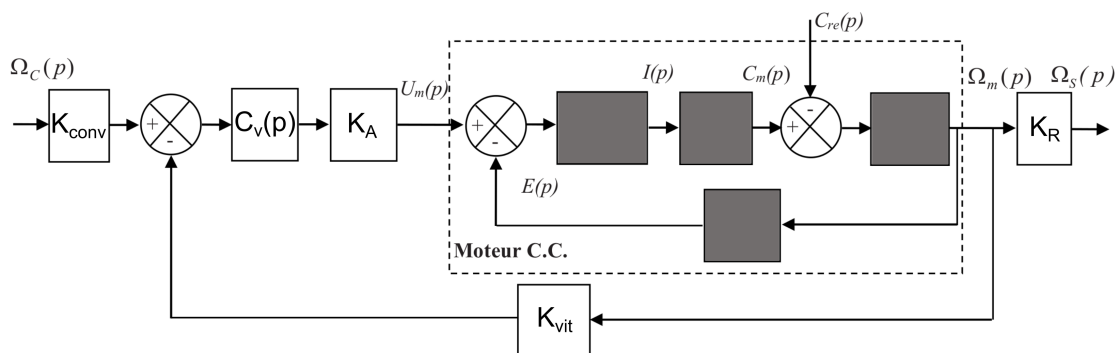
$$0 = \Omega_S(p) \cdot K_{conv} - \Omega_S(p) \cdot \frac{K_{vit}}{K_R}$$

$$0 = K_{conv} - \frac{K_{vit}}{K_R}$$

Donc $K_{conv} = \frac{K_{vit}}{K_R}$

$$K_{conv} = -\frac{8 \cdot 10^{-3}}{8 \cdot 10^{-3}} = -1$$

Question 23 :



Question 24 :

$$H_{BO}(p) = C_V(p) \cdot \frac{K}{K_R} \cdot G_1(p) \cdot G_2(p) \cdot K_R = C_V(p) \cdot \frac{K}{K_R} \cdot \frac{k_c}{R} \cdot \frac{1}{1 + \tau_e \cdot p} \cdot \frac{R}{k_c} \cdot \frac{1}{1 + \tau_{em} \cdot p} \cdot K_R$$

$$H_{BO}(p) = \frac{C_V(p) \cdot K}{(1 + \tau_e \cdot p) \cdot (1 + \tau_{em} \cdot p)}$$

Fonction d'ordre 2 et de classe 0.

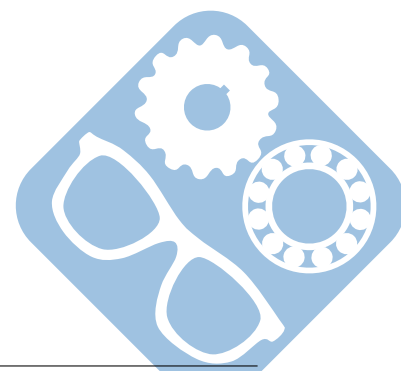
$$H_{BF}(p) = \frac{C_V(p) \cdot \frac{K}{K_R} \cdot G_1(p) \cdot G_2(p) \cdot K_R}{1 + C_V(p) \cdot \frac{K}{K_R} \cdot G_1(p) \cdot G_2(p) \cdot K_R}$$

$$H_{BF}(p) = \frac{C_V(p) \cdot \frac{K}{K_R} \cdot \frac{k_c}{R} \cdot \frac{1}{1 + \tau_e \cdot p} \cdot \frac{R}{k_c} \cdot \frac{1}{1 + \tau_{em} \cdot p} \cdot K_R}{1 + C_V(p) \cdot \frac{K}{K_R} \cdot \frac{k_c}{R} \cdot \frac{1}{1 + \tau_e \cdot p} \cdot \frac{R}{k_c} \cdot \frac{1}{1 + \tau_{em} \cdot p} \cdot K_R}$$

$$H_{BF}(p) = \frac{C_V(p) \cdot K \cdot \frac{1}{1 + \tau_e \cdot p} \cdot \frac{1}{1 + \tau_{em} \cdot p}}{1 + C_V(p) \cdot K \cdot \frac{1}{1 + \tau_e \cdot p} \cdot \frac{1}{1 + \tau_{em} \cdot p}}$$

$$H_{BF}(p) = \frac{C_V(p) \cdot K}{(1 + \tau_e \cdot p) \cdot (1 + \tau_{em} \cdot p) + C_V(p) \cdot K}$$

Fonction d'ordre 2 et de classe 0.



Question 25 :

$$\varepsilon_V(p) = \Omega_c(p) - \Omega_S(p) = \Omega_c(p) - \frac{\Omega_S(p)}{\Omega_c(p)} \cdot \Omega_c(p) = (1 - H_{BF}(p)) \cdot \Omega_c(p)$$

D'après le théorème de la valeur finale,

$$\varepsilon_S = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon_V(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot (1 - H_{BF}(p)) \cdot \Omega_c(p)$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} H_{BF}(p) = \frac{K}{1 + K}$$

$$\varepsilon_S = \left(1 - \frac{K}{1 + K}\right) \cdot \Omega_0 = \frac{\Omega_0}{1 + K}$$

$$K = K_{vit} \cdot K_A \cdot K_m = \frac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 10}{3 \cdot 10^{-2}} = \frac{8}{3} \approx 2.66$$

$$\varepsilon_S \approx \frac{0.1}{1 + 2.66} \approx 0.03 \text{rad.s}^{-1}$$

Question 26 :

$$H_V(p) = \frac{K_i \cdot \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p} \cdot K}{(1 + \tau_e \cdot p) \cdot (1 + \tau_{em} \cdot p) + K_i \cdot \frac{1 + T_i \cdot p}{T_i \cdot p} \cdot K}$$

$$H_V(p) = \frac{K_i \cdot \frac{1 + \tau_{em} \cdot p}{\tau_{em} \cdot p} \cdot K}{(1 + \tau_e \cdot p) \cdot (1 + \tau_{em} \cdot p) + K_i \cdot \frac{1 + \tau_{em} \cdot p}{\tau_{em} \cdot p} \cdot K}$$

$$H_V(p) = \frac{K_i \cdot \frac{1}{\tau_{em} \cdot p} \cdot K}{(1 + \tau_e \cdot p) + K_i \cdot \frac{1}{\tau_{em} \cdot p} \cdot K}$$

$$H_V(p) = \frac{K_i \cdot K}{(1 + \tau_e \cdot p) \cdot \tau_{em} \cdot p + K_i \cdot K}$$

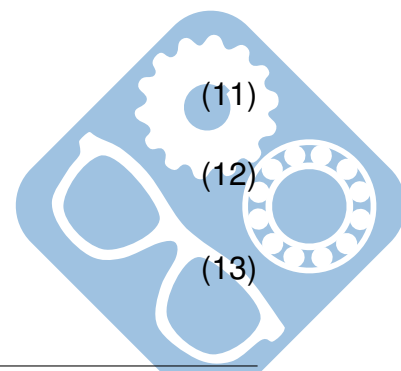
$$H_V(p) = \frac{1}{1 + \frac{\tau_{em}}{K_i \cdot K} \cdot p + \frac{\tau_{em} \cdot \tau_e}{K_i \cdot K} \cdot p^2}$$

Donc,

$$K_V = 1$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K_i \cdot K}{\tau_{em} \cdot \tau_e}}$$

$$\xi = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\tau_{em}}{K_i \cdot K \cdot \tau_e}}$$



Question 27 :

La réponse la plus rapide sans dépassement existe pour $\xi = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{\tau_{em}}{K_i \cdot K \cdot \tau_e}} = 1$

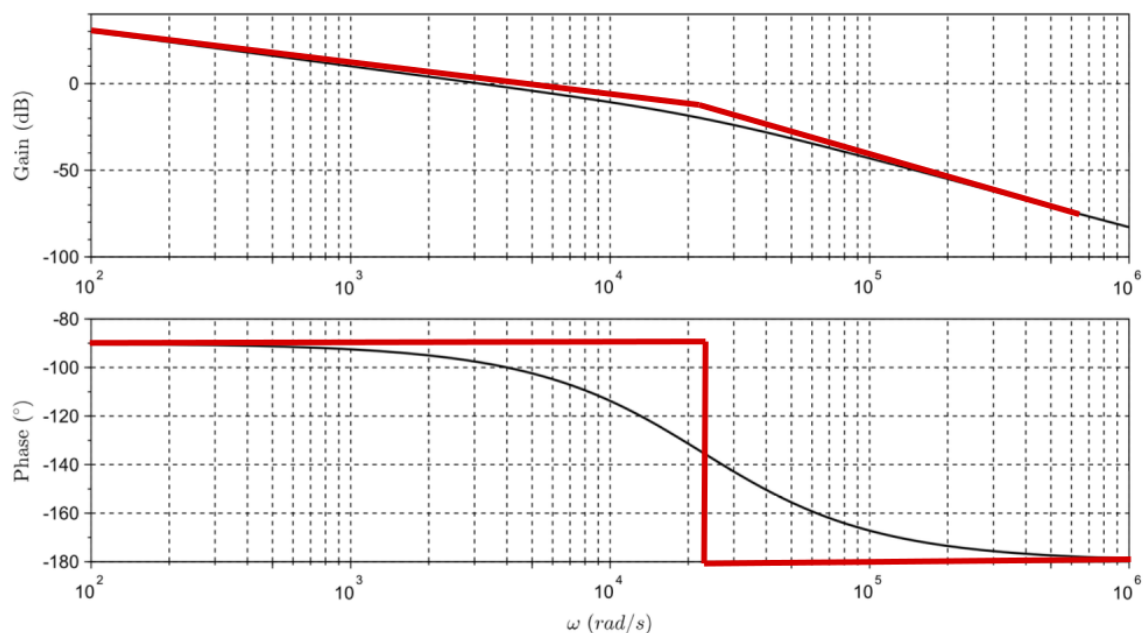
$$\frac{\tau_{em}}{K_i \cdot K \cdot \tau_e} = 2^2$$

$$K_i = \frac{\tau_{em}}{4 \cdot K \cdot \tau_e}$$

$$K_i = \frac{0.06}{4 \cdot 2.66 \cdot 3 \cdot 10^{-5}} \approx \frac{3 \cdot 10^3}{16} \approx 200$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{200 \cdot 2.66}{0.06 \cdot 3 \cdot 10^{-5}}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 10^9}{27}} \approx 1,7 \cdot 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$$

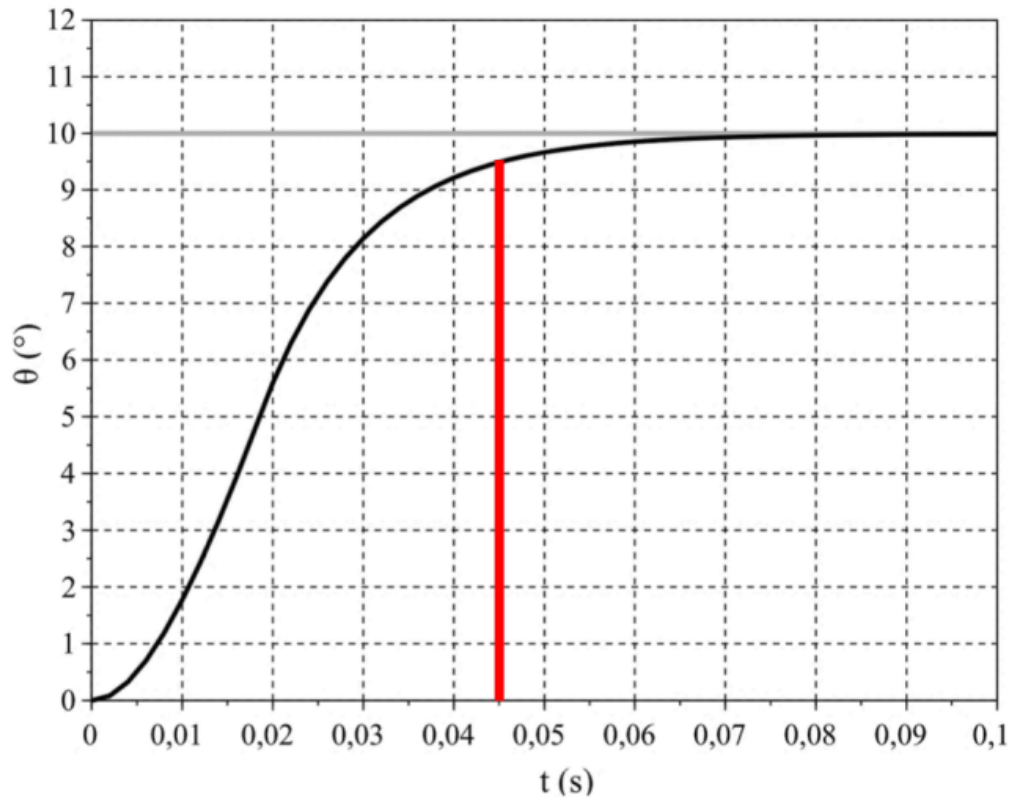
$$\text{Donc, } tr_{5\%} = \frac{5}{1,7 \cdot 10^4} \approx 0.3 \text{ ms}$$

Question 28 :

C'est une fonction de transfert d'ordre 2 et de classe 1, la pulsation de cassure est $\omega_c = 21000 \text{ rad.s}^{-1}$, donc $\tau_c = \frac{1}{21000} \approx 5 \cdot 10^{-5} \text{ s}$

Pour $\omega = 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$, $20 \cdot \log(K) - 20 \cdot \log(\omega) = 10$, donc $20 \cdot \log(K) = 10 + 20 \cdot 3 = 70$
 $\log(K) = 3.5$, donc $K = 10^{3.5} \approx 1000 \cdot 3 = 3000$

Question 29 :



Le temps de réponse est de 0.045s.

