

Séquence : 04

Document : TD03
Lycée Dorian
Renaud Costadoat
Françoise Puig



Avec Correction

Calculs d'hyperstatisme

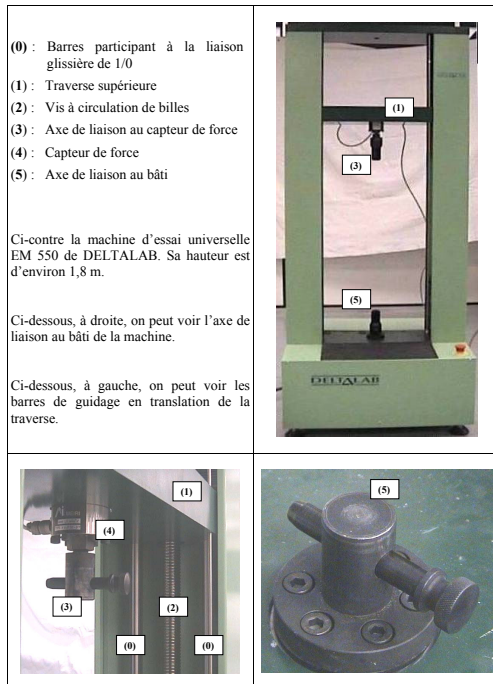


Référence	S04 - TD03
Compétences	B2-12: Proposer une modélisation des liaisons avec leurs caractéristiques géométriques. B2-13: Proposer un modèle cinématique paramétré à partir d'un système réel, d'une maquette numérique ou d'un B2-17: Simplifier un modèle de mécanisme. B2-18: Modifier un modèle pour le rendre isostatique.
Description	En appliquant les règles de la théorie des mécanismes, déterminer le degré d'hyperstatisme de plusieurs systèmes et proposer des solutions afin de diminuer ce degré
Système	E.P.A.S, Machine d'essai de traction

1 Machine d'essai universelle EM 550

La machine électromécanique universelle EM 550, figure 1 est conçue pour être utilisée dans de nombreuses applications d'essais de matériaux et de structures. Elle permet de réaliser des essais de traction, de compression, de flexion, de fatigue, de fluage, de dureté, de frottement ainsi que des tests sur des assemblages et des structures. Cette machine est commercialisée par DELTALAB. Elle est présente dans les laboratoires des services recherche et développement de nombreuses entreprises.

La machine d'essais est reliée à un micro-ordinateur équipé du logiciel DELTALAB, d'une interface logiciel/machine pour le pilotage, l'acquisition et le traitement des données et d'une imprimante.



Caractéristiques générales (voir schéma cinématique en annexe 2) :

- Effort maximal sur la traverse : 50 kN.
- Course maximale : 1 m.
- Entraînement : servomoteur à courant continu avec génératrice tachymétrique.
- Transmission : réducteur roue et vis sans fin, poulies, courroie crantée et vis et écrous à billes.
- Mesure du déplacement : codeur optoélectronique de résolution 500 positions par tour.
- Mesure de l'effort : capteur à jauges de déformations.
- Alimentation : 240 V monophasé / 50 Hz - 1 kW max.
- Couple permanent du servomoteur : 3 N.m,
- $\vec{AA}' = 2.e. \vec{x}$.

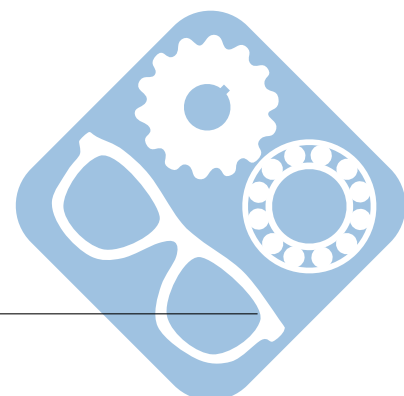
Figure 1 – Machine EM 550

La traverse est liée au bâti par deux liaisons glissières montées en parallèle.
 Le schéma cinématique du montage est donné sur la figure 2.

Question 1 : Modéliser le mécanisme grâce à un graphe de liaisons.

Question 2 : Déterminer le degré d'hyperstatisme de ce mécanisme.

Question 3 : Valider ce résultat en effectuant une étude sur les équations issues des torseurs cinématiques. A partir du système d'équations proposé, proposer des modifications qui permettraient de le rendre isostatique.



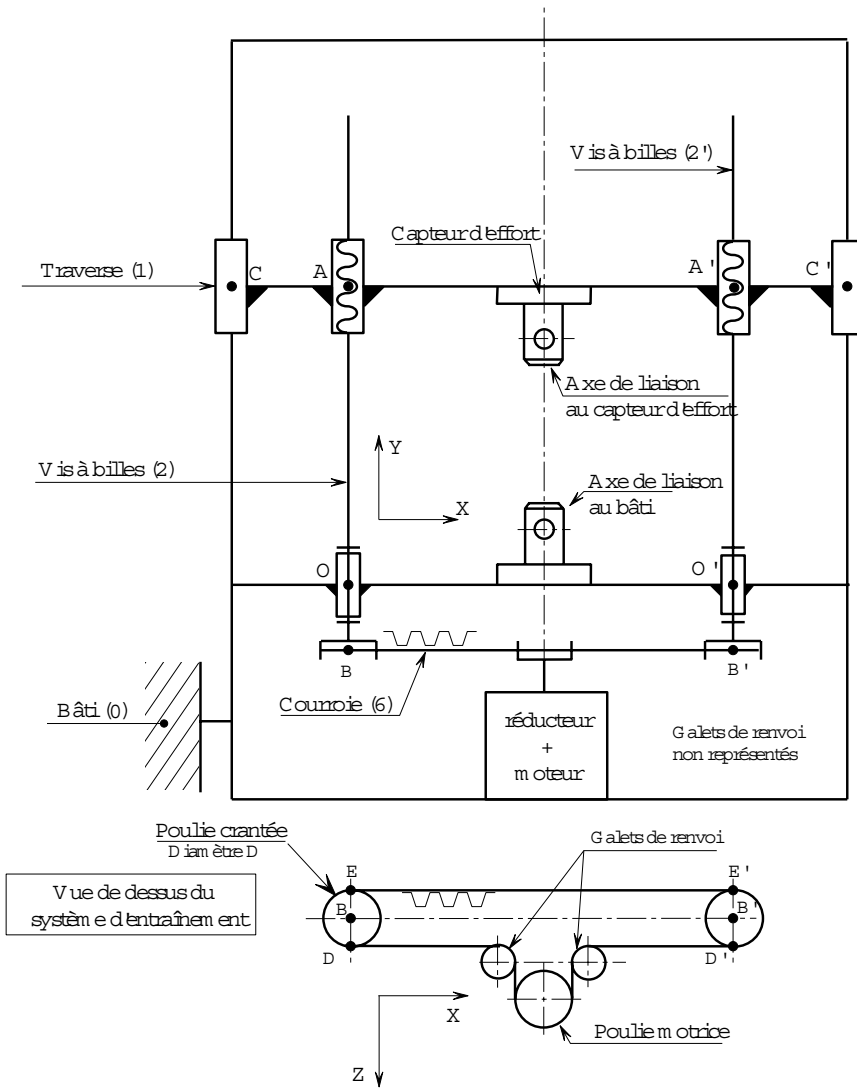
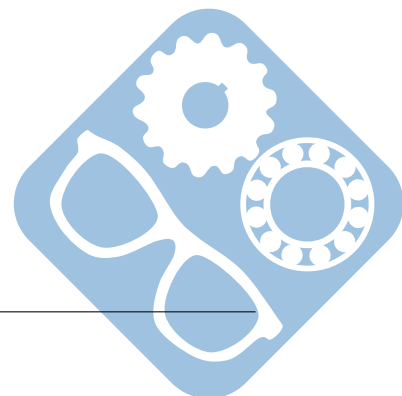


Figure 2 – Schéma cinématique



2 Système E.P.A.S.

2.1 Introduction

Une E.P.A.S. est une Echelle Pivotante Automatique à commande Séquentielle. Ce système est monté sur le châssis d'un camion de pompiers et permet de déplacer une plate forme pouvant recevoir deux personnes et un brancard le plus rapidement possible et en toute sécurité.



Figure 3 – Système E.P.A.S.

La figure 4 donne un schéma cinématique du système de manœuvre du parc échelle.

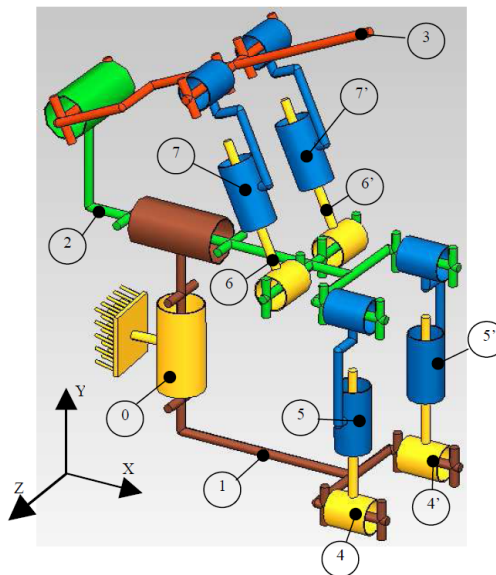
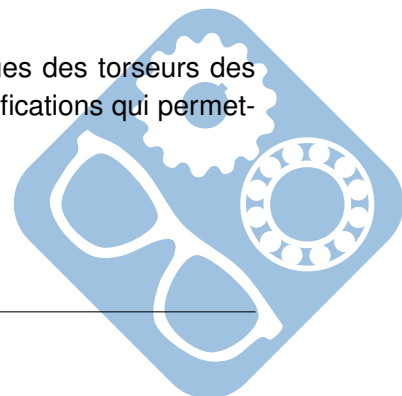


Figure 4 – Schéma cinématique du système de manœuvre

Question 1 : Modéliser le mécanisme grâce à un graphe de liaisons.

Question 2 : Déterminer le degré d'hyperstatisme de ce mécanisme.

Question 3 : Valider ce résultat en effectuant une étude sur les équations issues des torseurs des actions mécaniques. A partir du système d'équations proposé, proposer des modifications qui permettraient de le rendre isostatique.



1 Correction

1.1 Machine d'essai universelle EM 550

Question 1 : Liaisons du mécanisme :

1. Liaison glissière en C entre 1 et 0 (direction \vec{y}),
2. Liaison glissière en C' entre 1 et 0 (direction \vec{y}),
3. Liaison pivot entre 2 et 0 (axe O, \vec{y}),
4. Liaison pivot entre 2' et 0 (axe O', \vec{y}),
5. Liaison hélicoïdale entre 2 et 1 (axe A, \vec{y}),
6. Liaison hélicoïdale entre 2' et 1 (axe A', \vec{y}).

Question 2 : Calcul d'hyperstatisme :

- 4 pièces dont le bâti,
- 30 inconnues de liaison,
- les pièces flexibles (courroie) ne sont pas prises en compte,
- le système possède une mobilité.

$$h = N_s - r_s = 30 - (6 \cdot 3 - 1) = 13$$

Le degré d'hyperstatisme du système est 13.

Question 3 :

$$\{V_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{10} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(C,R)}, \quad \{V'_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V'_{10} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(C',R)}, \quad \{V_{2/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{20} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(O,R)},$$

$$\{V'_{2/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega'_{2'0} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(O',R)}, \quad \{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{21} & \frac{P}{2\pi} \cdot \omega_{21} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(A,R)}, \quad \{V'_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega'_{2'1} & \frac{P}{2\pi} \cdot \omega'_{2'1} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(A',R)}$$

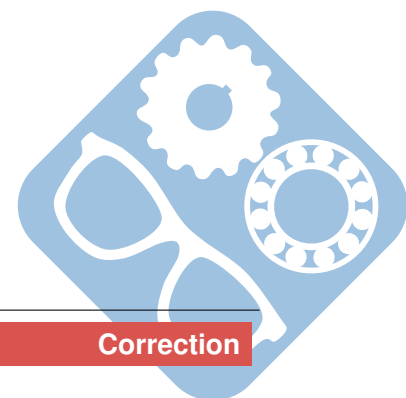
On peut tout ramener en A.

$$\{V_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{10} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(A,R)}, \quad \{V'_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V'_{10} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(A,R)}, \quad \{V_{2/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{20} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(A,R)}$$

$$\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{21} & \frac{P}{2\pi} \cdot \omega_{21} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(A,R)}, \quad \{V'_{2/0}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega'_{2'0} & 0 \\ 0 & 2.e \cdot \omega'_{2'0} \end{Bmatrix}_{(A,R)}, \quad \{V'_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega'_{2'1} & \frac{P}{2\pi} \cdot \omega'_{2'1} \\ 0 & 2.e \cdot \omega'_{2'1} \end{Bmatrix}_{(A',R)}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_{10} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(A,R)} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V'_{10} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(A,R)} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{20} - \omega_{21} & -\frac{P}{2\pi} \cdot \omega_{21} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(A,R)}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega'_{2'0} - \omega'_{2'1} & -\frac{P}{2\pi} \cdot \omega'_{2'1} \\ 0 & 2.e \cdot (\omega'_{2'0} - \omega'_{2'1}) \end{Bmatrix}_{(A',R)}$$



$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = 0 = 0 = 0 \\ 0 = 0 = \omega_{20} - \omega_{21} = \omega'_{2'0} - \omega'_{2'1} \\ 0 = 0 = 0 = 0 \\ 0 = 0 = 0 = 0 \\ V_{10} = V'_{10} = -\frac{P}{2.\pi}.\omega_{2'1} = -\frac{P}{2.\pi}.\omega'_{2'1} \\ 0 = 0 = 0 = 2.e.(\omega'_{2'0} - \omega'_{2'1}) \end{array} \right.$$

Analyse des équations :

- il y a 12 équations du type $0 = 0$,
- une équation $0 = 2.e.(\omega'_{2'0} - \omega'_{2'1})$, identique à $0 = \omega'_{2'0} - \omega'_{2'1}$,
- Soit un total de 13 équations non indépendantes.

Cela confirme le degré d'hyperstatisme déterminé précédemment.

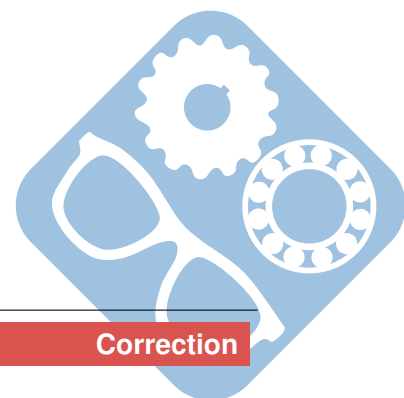
La suppression des deux liaisons glissières (les liaisons deviennent des liaisons à 6 degrés de liberté) donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{10x} = \omega'_{10x} = 0 = 0 \\ \omega_{10y} = \omega'_{10y} = \omega_{20} - \omega_{21} = \omega'_{2'0} - \omega'_{2'1} \\ \omega_{10z} = \omega'_{10z} = 0 = 0 \\ V_{10x} = V'_{10x} = 0 = 0 \\ V_{10} = V'_{10} = -\frac{P}{2.\pi}.\omega_{21} = -\frac{P}{2.\pi}.\omega'_{2'1} \\ V_{10z} = V'_{10z} = 0 = 2.e.(\omega'_{2'0} - \omega'_{2'1}) \end{array} \right.$$

Le remplacement de la liaison pivot en A' par une linéaire annulaire d'axe (A', \vec{x}) donne :

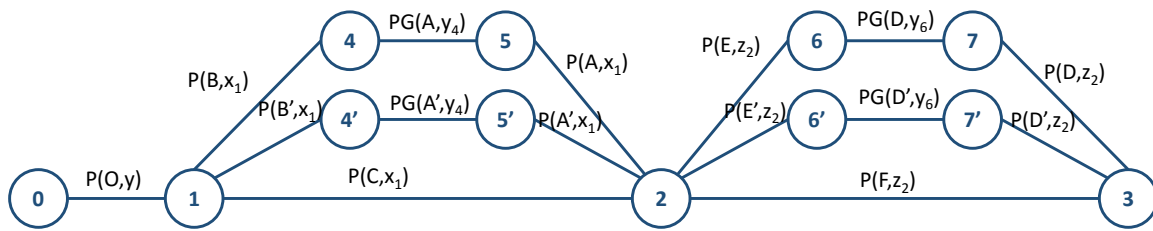
$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{10x} = \omega'_{10x} = 0 = \omega'_{2'0x} \\ \omega_{10y} = \omega'_{10y} = \omega_{20} - \omega_{21} = \omega'_{2'0} - \omega'_{2'1} \\ \omega_{10z} = \omega'_{10z} = 0 = \omega'_{2'0z} \\ V_{10x} = V'_{10x} = 0 = V'_{2'0x} \\ V_{10} = V'_{10} = -\frac{P}{2.\pi}.\omega_{21} = -\frac{P}{2.\pi}.\omega'_{2'1} \\ V_{10z} = V'_{10z} = 0 = 2.e.(\omega'_{2'0} - \omega'_{2'1}) \end{array} \right.$$

Ce système serait alors isostatique. L'hyperstatisme dans ce système a été mis en place afin de garantir une rigidité suffisante pour garantir la précision et la résistance aux efforts de la machine de traction.



1.2 Système E.P.A.S.

Question 1 :



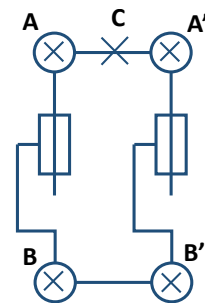
Question 2 : Calcul d'hyperstatisme :

- 12 pièces dont le bâti,
 - $11 * 5 + 4 * 4 = 71$ inconnues de liaison,
 - le système possède **trois** mobilité.
- $$h = Ns - rs = 71 - (6 * 11 - 3) = 71 - 63 = 8$$

Le degré d'hyperstatisme du système est 8.

Question 3 :

L'architecture du système montre une répétition de la structure des pièces $\{1, 4, 4', 5, 5', 2\}$, l'étude de cette partie suffira à conclure pour le reste du mécanisme.



Analyse cinématique

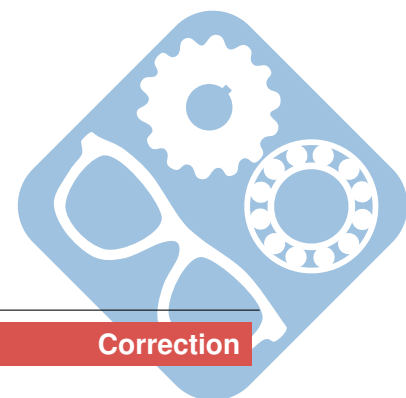
$$\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(C,R_1)}, \{V_{4/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{41} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(B,R_1)}, \{V_{4'/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{4'/1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(B',R_1)}$$

$$\{V_{5/4}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{54} & V_{54} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(A,R_4)}, \{V_{5'/4'}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_{5'/4'} & V_{5'/4'} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(A',R_4)}, \{V_{2/5}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{25} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(A,R_1)}$$

$$\{V_{2/5'}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{25'} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(A',R_1)}$$

Tout ramener en C :

$$\begin{aligned} \vec{CB} &= \vec{CO} + \vec{OB} = -h \cdot \vec{y}_1 + e \cdot \vec{z}_1 \\ \vec{CB'} &= \vec{CO} + \vec{OB'} = -h \cdot \vec{y}_1 - e \cdot \vec{z}_1 \\ \vec{CA} &= e \cdot \vec{z}_2 = e \cdot (-\sin\theta_2 \cdot \vec{y}_1 + \cos\theta_2 \cdot \vec{z}_1) \\ \vec{CA'} &= -e \cdot \vec{z}_2 = -e \cdot (-\sin\theta_2 \cdot \vec{y}_1 + \cos\theta_2 \cdot \vec{z}_1) \end{aligned}$$



$$\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{21} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{C,R_1}, \{V_{4/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{41} & 0 \\ 0 & e.\omega_{41} \\ 0 & h.\omega_{41} \end{Bmatrix}_{C,R_1}$$

$$\{V_{4'/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{4'1} & 0 \\ 0 & -e.\omega_{4'1} \\ 0 & h.\omega_{4'1} \end{Bmatrix}_{C,R_1},$$

$$\{V_{5/4}\} = \begin{Bmatrix} 0 & -e.\cos(\theta_2 - \theta_4).\omega_{54} \\ \cos\theta_4.\omega_{54} & \cos\theta_4.V_{54} \\ \sin\theta_4.\omega_{54} & \sin\theta_4.V_{54} \end{Bmatrix}_{(C,R_1)}, \{V_{5'/4'}\} = \begin{Bmatrix} 0 & e.\cos(\theta_2 - \theta_4').\omega_{5'4'} \\ \cos\theta_4'.\omega_{5'4'} & \cos\theta_4'.V_{5'4'} \\ \sin\theta_4'.\omega_{5'4'} & \sin\theta_4'.V_{5'4'} \end{Bmatrix}_{(C,R_1)}$$

$$\{V_{2/5}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{25} & 0 \\ 0 & e.\cos\theta_2.\omega_{25} \\ 0 & e.\sin\theta_2.\omega_{25} \end{Bmatrix}_{(C,R_1)}, \{V_{2/5'}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{25'} & 0 \\ 0 & -e.\cos\theta_2.\omega_{25'} \\ 0 & -e.\sin\theta_2.\omega_{25'} \end{Bmatrix}_{(C,R_1)}$$

$$\begin{cases} \omega_{21} = \omega_{25} + \omega_{41} = \omega_{25'} + \omega_{4'1} \\ 0 = \cos\theta_4.\omega_{54} = \cos\theta_4'.\omega_{5'4'} \\ 0 = \sin\theta_4.\omega_{54} = \sin\theta_4'.\omega_{5'4'} \\ 0 = -e.\cos(\theta_2 - \theta_4).\omega_{54} = -e.\cos(\theta_2 - \theta_4').\omega_{5'4'} \\ 0 = e.\cos\theta_2.\omega_{25} + \cos\theta_4.V_{54} + e.\omega_{41} = -e.\cos\theta_2.\omega_{25'} + \cos\theta_4'.V_{5'4'} - e.\omega_{4'1} \\ 0 = e.\sin\theta_2.\omega_{25} + \sin\theta_4.V_{54} + h.\omega_{41} = -e.\sin\theta_2.\omega_{25'} + \sin\theta_4'.V_{5'4'} + h.\omega_{4'1} \end{cases}$$

Analyse des équations :

- à la ligne 2, on sait que $\omega_{54} = 0$ et $\omega_{5'4'} = 0$,
- ces informations apparaissent aux lignes 3 et 4,
- **4** degrés d'hyperstatisme dans les deux cycles, soit un total de **8**.

