

Consignes :

1. **Travail minimum** : Chaque élève doit traiter **au moins 60%** du devoir. Les copies présentant un travail insuffisant (moins de 60% du sujet traité) ne seront pas corrigées.
2. **Présentation** : Le devoir devra être rédigé sur des **copies doubles**.

Exercice : Sous-anneaux de $\mathbb{Q}$

Soit A un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.

1. Soit p un entier et q un entier strictement positif premier avec p .
 - (a) Montrer que si $p/q \in A$ alors $1/q \in A$.
 - (b) Soit I un idéal de A autre que $\{0\}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $I \cap \mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$ et qu'alors $I = nA$.
 - (c) Soit p un nombre premier. On pose

$$Z_p = \left\{ \frac{a}{b}; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*, p \nmid b \right\}$$

Montrer que si $x \in \mathbb{Q}^*$ alors x ou $1/x$ appartient à Z_p .

2. On suppose ici que x ou $1/x$ appartient à A pour tout $x \in \mathbb{Q}^*$. On note I l'ensemble des éléments non inversibles de A .

Montrer que I inclut tous les idéaux stricts de A . En déduire que $A = \mathbb{Q}$ ou $A = Z_p$ pour un certain nombre premier p .

Problème 1 – Polynômes de Bernoulli et fonction ζ

Partie I – Polynômes de Bernoulli

On admet l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant les trois conditions suivantes :

$$B_0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B'_n = -B_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 B_n(t) dt = 0$$

On pose également $b_n = B_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- I.1 Calculer B_1 et B_2 . En déduire b_1 et b_2 .
- I.2 Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $B_n(0) = B_n(1)$.
- I.3 On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n = (-1)^n B_n(1 - X)$. Montrer que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie les trois mêmes conditions que celles définissant la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = (-1)^n B_n(1 - X)$.
- I.4 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_{2n+1}(0) = B_{2n+1}(1) = 0$.
- I.5 À l'aide de la formule de Taylor, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n = \sum_{k=0}^n \frac{b_{n-k}}{k!} X^k.$$

- I.6 En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{2n+2} = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{b_k}{(2n+2-k)!}$$

puis que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_{2n} = \frac{1}{(2n+1)!} - 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_{2k}}{(2n+2-2k)!}.$$

I.7 Calculer b_4 .

Partie II – Lemme de Riemann-Lebesgue et noyau de Dirichlet

II.8 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) \sin(\lambda t) dt = 0.$$

II.9 Montrer que $\varphi : t \in]0, 1[\mapsto t(1-t) \sin(\pi t)$ peut se prolonger en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

II.10 Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\forall t \in]0, 1[, \quad \sum_{k=1}^p \cos(2k\pi t) = \frac{\sin((2p+1)\pi t)}{2 \sin(\pi t)} - \frac{1}{2}.$$

II.11 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = P(1) = 0$. Montrer que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^p \int_0^1 P(t) \cos(2k\pi t) dt = -\frac{1}{2} \int_0^1 P(t) dt.$$

Partie III – Fonction ζ de Riemann

On note pour tout réel $\alpha > 1$, $\zeta(\alpha) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

On pose pour $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$I_{k,n} = \int_0^1 B_{2n}(t) \cos(2k\pi t) dt.$$

III.12 Calculer $I_{k,1}$.

III.13 Déterminer une relation entre $I_{k,n}$ et $I_{k,n-1}$ valide pour tout entier $n \geq 2$. En déduire que

$$\forall (k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad I_{k,n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^{2n}}.$$

III.14 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1}}{2} \cdot (2\pi)^{2n} b_{2n}.$$

III.15 Calculer $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.

Problème 2 : Polynômes irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$

Dans tout ce problème $\mathbb{Q}[X]$ (respectivement $\mathbb{Z}[X]$) désigne l'ensemble des polynômes à une indéterminée, à coefficients dans $\mathbb{Q}$ (respectivement $\mathbb{Z}$). Ces ensembles sont des anneaux commutatifs pour les lois $+$ et $\times$ usuelles sur les polynômes.

Un polynôme Φ de $\mathbb{Q}[X]$ (respectivement $\mathbb{Z}[X]$) est dit irréductible sur $\mathbb{Q}$ (respectivement $\mathbb{Z}$) s'il n'est ni constant, ni de la forme $\Phi = PQ$ avec P, Q dans $\mathbb{Q}[X]$ (respectivement $\mathbb{Z}[X]$) et $\deg(P) \geq 1$, $\deg(Q) \geq 1$.

Partie I : Exemples.

1. Montrer que les polynômes $X^2 - X - 1$ et $X^3 - X - 1$ sont irréductibles sur $\mathbb{Z}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n$ des entiers relatifs deux à deux distincts. Définissons Φ par

$$\Phi = (X - a_1) \dots (X - a_n) - 1$$

On remarque que $\Phi \in \mathbb{Z}[X]$. Le but de la question est de montrer qu'il est irréductible sur $\mathbb{Z}$. Supposons qu'il existe P et Q dans $\mathbb{Z}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 et vérifiant $\Phi = PQ$.

- (a) Montrer que $a_1, \dots, a_n$ sont des racines de $P + Q$.
(b) En déduire que $\Phi = -P^2$.
(c) Conclure.
3. Soit n un entier naturel impair et soient $a_1, \dots, a_n$ des entiers relatifs deux à deux distincts. Montrer que $(X - a_1) \dots (X - a_n) + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}$.

Partie II : Lemme de Gauss.

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme non nul de $\mathbb{Z}[X]$. On définit le contenu de P , noté $c(P)$ par

$$c(P) = \text{pgcd}(a_0, \dots, a_n)$$

Le polynôme P est dit primitif si $c(P) = 1$. Soient P et Q dans $\mathbb{Z}[X]$.

4. On suppose dans cette question que P et Q sont primitifs. Notons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$ et

$$PQ = \sum_{k=0}^r c_k X^k. \text{ Soit } p \text{ un nombre premier.}$$

- (a) Montrer qu'il existe un plus petit entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que p ne divise pas a_k . Notons le k_0 . Notons, de même, k_1 le plus petit entier $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$ tel que p ne divise pas b_k .
(b) Montrer que p ne divise pas $c_{k_0+k_1}$.
(c) En déduire que $c(PQ) = 1$.
5. Montrer que $c(PQ) = c(P)c(Q)$ (lemme de Gauss).

Partie III : Critère d'Eisenstein.

6. Soit $\Phi \in \mathbb{Z}[X]$ pour lequel il existe des polynômes P et Q de degré supérieur ou égal à 1 et à coefficients rationnels tels que $\Phi = PQ$. Montrer qu'il existe deux polynômes P_0 et Q_0 de $\mathbb{Z}[X]$ proportionnels respectivement à P et Q et tels que $\Phi = P_0 Q_0$.
7. Soit $\Phi \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que Φ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ si et seulement si il est irréductible sur $\mathbb{Z}$.
8. Soit $\Phi = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme non constant de $\mathbb{Z}[X]$. On suppose qu'il existe un nombre premier p tel que :
- p ne divise pas a_n
 - p divise a_i pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$
 - p^2 ne divise pas a_0

Montrer que Φ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

