

Exercice 1 :

1. Soient f et g les deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = 3x + 1 \text{ et } g(x) = x^2 - 1$$

Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.

2. Dans les exemples suivants, déterminer deux fonctions u et v telles que $h = u \circ v$:

$$h_1(x) = \sqrt{3x-1} \quad h_2(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad h_3(x) = \frac{1}{x+7}$$

Exercice 2 : Soit pour $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Déterminer $f \circ f \circ \dots \circ f(x)$ (où le symbole f apparaît n fois) en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ et de $x \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 3 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Montrer que : $1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2$.
- Montrer que : $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = 2n^4 - n^2$.

Exercice 4 : Soit E un ensemble. Pour $A \in \mathcal{P}(E)$ une partie de E , on note $\bar{A}$ son complémentaire. La fonction $\phi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$, $A \mapsto \bar{A}$ est-elle injective? surjective?

Exercice 5 : L'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x+y, xy)$ est-elle injective? surjective?

Exercice 6 : Soient f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par $f(x) = 2x$ et

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}$$

Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$. Les fonctions f et g sont-elles injectives? surjectives? bijectives?

Exercice 7 : Soit $g : [0; +\infty[\rightarrow [0; 1[$ définie par $g(x) = \frac{x}{1+x}$. Démontrer que g est bijective et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 8 : Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par

$$f(x) = \frac{e^x + 2}{e^{-x}}$$

est bijective. Calculer sa bijection réciproque f^{-1} .

Exercice 9 : Démontrer que l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} \setminus \{-3\} &\rightarrow \mathbb{C} \setminus \{i\} \\ z &\mapsto \frac{iz-i}{z+3} \end{aligned}$$

est une bijection. Déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 10 : Soit $f : E \rightarrow F$. Montrer que f est bijective si et seulement si, pour tout A de $\mathcal{P}(E)$, on a $f(\bar{A}) = \overline{f(A)}$ ($\bar{A}$ désigne le complémentaire de A).

Exercice 11 : Soient E un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties, et A et B deux parties de E . On définit

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(E) &\rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X &\mapsto (X \cap A, X \cap B) \end{aligned}$$

- Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
- Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
- Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit bijective. Donner dans ce cas la bijection réciproque.

Exercice 12 : Soit E un ensemble et soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$:

- $A \cup X = B$;
- $A \cap X = B$.

Exercice 13 :

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2, & u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}; & u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$
Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}; u_n = 2^n + 3^n$.

Exercice 14 :

- Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$

- Déterminer un réel x non entier vérifiant la propriété $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.

Exercice 15 : Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2^{n-1} \leq n! \leq n^n$.

Exercice 16 : On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1}$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a_n \leq n^2$.

Exercice 17 : Soit $(u_n)_n$ la suite réelle définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k$

Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n-1}$.

Exercice 18 : Démontrer que tout entier $n \geq 1$ peut s'écrire comme somme de puissances de 2 toutes distinctes.

Exercice 19 : Soit $f : X \rightarrow Y$. Montrer que pour tout $B \in \mathcal{P}(Y)$, $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$.

Exercice 20 : Soient X et Y deux ensembles et $f : X \rightarrow Y$ une application. Montrer l'équivalence : f surjective $\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{P}(Y)$, $f(f^{-1}(B)) = B$.

Exercice 21 : Soient X et Y deux ensembles et $f : X \rightarrow Y$ une application. Montrer l'équivalence : f injective $\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(X)^2$, $f^{-1}(f(A)) = A$.

Exercice 22 : Soit E un ensemble. Montrer par un raisonnement direct et par contraposée l'assertion suivante :

$\forall (A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$ ($A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$) $\Leftrightarrow B = C$.

Exercice 23 : Soit $a \leq b$ deux réels. Prouver par double inclusion que

$$[a, b] = \{(1-\lambda)a + \lambda b, \lambda \in [0, 1]\}$$

Exercice 24 : Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, montrer que $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$ et $E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$.

Exercice 25 : Montrer que $\{z \in \mathbb{C}, |z+i| = |z-i|\} = \mathbb{R}$.

Sujets:

- Sujet 2: Ex1Q1 + Ex14
- Sujet 3: Ex1Q2 + Ex10 + Ex13
- Sujet 4: Ex2 + Ex9 + Ex19
- Sujet 5: Ex3Q1 + Ex8 + Ex20
- Sujet 6: Ex3Q2 + Ex7 + Ex21
- Sujet 7: Ex4 + Ex6 + Ex16
- Sujet 8: Ex11 + Ex25
- Sujet 1: Ex5 + Ex12