

**Sujet: 1**

Soit un entier  $n \geq 1$ , Calculer les sommes suivantes:

1.  $\sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$
2.  $\sum_{k=1}^{n^2} E(\sqrt{k})$
3.  $\prod_{p=0}^{n-1} \sum_{k=0}^p 2^{pk}$
4. Calculer l'intégrale  $I = \int_0^{\pi/2} \cos^4(t) \sin^2(t) dt$ .

**Sujet: 2**

Soit un entier  $n \geq 1$ , Calculer les sommes suivantes:

1.  $\sum_{k=1}^{n^3} E(\sqrt[3]{k})$
2.  $\sum_{k=1}^n k \times k!$
3. Calculer  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \max(i, j)$
4. On note  $\mathbb{U}_n$  l'ensemble des racines  $n$ -èmes de l'unité. Calculer  $\sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z - 1|$ .

**Sujet: 3**

Soit un entier  $n \geq 1$ , Calculer les sommes suivantes:

1.  $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$
2. Calculer  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1}$ .
3. Démontrer que
$$\sum_{k=n+1}^{2n-1} \ln \left( \sin \left( \frac{k\pi}{2n} \right) \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln \left( \sin \left( \frac{k\pi}{2n} \right) \right).$$
4. Calculer la valeur de  $\prod_{p=2}^{p=n} \frac{p^3 - 1}{p^3 + 1}$

**Sujet: 4**

1. Déterminer trois réels  $a, b$  et  $c$  tels que  $\forall k \geq 2$ ,  $\frac{k-5}{k(k^2-1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}$ . En déduire la valeur de  $\sum_{k=2}^{k=n} \frac{k-5}{k(k^2-1)}$
2. Calculer  $\prod_{k=1}^n (4k^2 - 1)$ .
3. Résoudre  $(z-1)^5 = (z+1)^5$
4. Soit  $z$  un nombre complexe,  $z \neq 1$ . Démontrer que :  $|z| = 1 \iff \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}$ .

**Sujet: 5**

1. Calculer  $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \frac{i^2}{j}$
2. Par 3 méthodes résoudre l'équation :  $|z-i| = |z+i|$
3. Montrer que  $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$  (ind:utiliser le polynôme  $(1+x)^{2n}$ ).

**Sujet: 6**

1. Calculer  $\sum_{k=1}^n \arctan \frac{1}{k^2 + k + 1}$
2. Calculer  $\sum_{k=1}^n \arctan \frac{2}{k^2}$ .
3. Calculer  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(i, j)$
4.  $4iz^3 + 2(1+3i)z^2 - (5+4i)z + 3(1-7i) = 0$ , sachant qu'elle admet une racine réelle.

**Sujet: 7**

Soient  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  et  $\omega = \exp(2i\pi/n)$

1. Établir que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 1$ ,  $\prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k) = \sum_{\ell=0}^{n-1} z^\ell$
2. Justifier que l'égalité reste valable pour  $z = 1$ .
3. En déduire l'égalité  $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \left( \frac{k\pi}{n} \right) = \frac{n}{2^{n-1}}$

**Sujet: 8**

Soit  $a$  un nombre complexe de module 1,  $z_1, \dots, z_n$  les racines de l'équation  $z^n = a$ .  
Montrer que les points du plan complexe dont les affixes sont  $(1+z_1)^n, \dots, (1+z_n)^n$  sont alignés.

**Sujet: 9**

Soit  $n \geq 1$  et  $\omega = e^{2i\pi/n}$ .

1. Calculer le produit des racines  $n$ -ièmes de l'unité.
2. Soit  $p \geq 0$ . Calculer  $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$ .
3. En déduire que  $\sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^n = 2n$ .