

Sujet: 1

Trouver la borne supérieure et la borne inférieure des ensembles $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ définis par

$$\mathbf{A}_1 = \left\{ 2(-1)^{n+1} + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left(2 + \frac{3}{n} \right) : n \in \mathbb{N}^* \right\},$$

$$\mathbf{A}_2 = \left\{ \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3} : n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Sujet: 2

1. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble des nombres de la forme $\frac{(n+1)^2}{2^n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble des nombres de la forme $\frac{(n+m)^2}{2^{nm}}$, où $n, m \in \mathbb{N}^*$.

Sujet: 3

Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure des ensembles suivants :

1. $\mathbf{A} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}^*, m < 2n \right\}$,
2. $\mathbf{B} = \left\{ \sqrt{n} - [\sqrt{n}] : n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Sujet: 4

Trouver

1. $\sup \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1 > 0\}$,
2. $\inf \{z = x + x^{-1} : x > 0\}$,
3. $\inf \{z = 2^x + 2^{\frac{1}{x}} : x > 0\}$.

Sujet: 5

Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure des ensembles suivants :

1. $\mathbf{A} = \left\{ \frac{m}{n} + \frac{4n}{m} : m, n \in \mathbb{N}^* \right\}$,
2. $\mathbf{B} = \left\{ \frac{mn}{4m^2+n^2} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$,
3. $\mathbf{C} = \left\{ \frac{m}{m+n} : m, n \in \mathbb{N}^* \right\}$,
4. $\mathbf{D} = \left\{ \frac{m}{|m|+n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$,
5. $\mathbf{E} = \left\{ \frac{mn}{1+m+n} : m, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Sujet: 6

Pour cet exercice, on rappelle que $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. On fixe $a \in]-1, 1]$ et $\varepsilon > 0$ tel que $a - \varepsilon \geq -1$.

1. Démontrer qu'il existe au moins un entier $n \geq 0$ tel que $\cos(n) \in]a - \varepsilon, a[$.
2. En déduire qu'il existe une infinité d'entiers $n \geq 0$

tels que $\cos(n) \in]a - \varepsilon, a[$.

3. Montrer que l'ensemble $\{\cos(n) : n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$?

Sujet: 7

Prouver le résultat suivant par récurrence : si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des réels strictement positifs tels que $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, alors $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$.

Sujet: 8

On note respectivement A_n, G_n et H_n les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique des n nombres réels strictement positifs $a_1, a_2, \dots, a_n$, soit

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n}$$

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

1. Démontrer que $A_n \geq G_n \geq H_n$.
2. En déduire ($A_n \geq G_n$), l'inégalité de Bernoulli $(1+x)^n \geq 1+nx$ pour $x > 0$

Sujet: 9

Vérifier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les propositions suivantes :

1. $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{2}{3}$,
2. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1$,
3. $\frac{1}{2} < \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \dots + \frac{1}{5n} + \frac{1}{5n+1} < \frac{2}{3}$,
4. $n(\sqrt[n]{n+1} - 1) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} < n\left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} + \frac{1}{n+1}\right)$, $n > 1$.

Sujet: 10

1. Montrer que, pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{x^n}{1+x+x^2+x^3+\dots+x^{2n}} \leq \frac{1}{2n+1}.$$

2. Soit $\{a_n\}$ une suite arithmétique à termes strictement positifs. Prouver que

$$\sqrt{a_1 a_n} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_n}{2}.$$

3. $\sqrt{n} \leq \sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}$, $n \in \mathbb{N}^*$
4. Soit $a_k (k = 1, 2, \dots, n)$ des réels strictement positifs tels que $\sum_{k=1}^n a_k \leq 1$. Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} \geq n^2$

Sujet: 11

1. Soit $a_k > 0, k = 1, 2, \dots, n$ et $n > 1$, on pose $s = \sum_{k=1}^n a_k$. Vérifier les propositions suivantes :

$$n \left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{s - a_k} \right)^{-1} \leq n - 1 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{s - a_k}{a_k};$$
$$\sum_{k=1}^n \frac{s}{s - a_k} \geq \frac{n^2}{n - 1}; \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{s + a_k} \right)^{-1} \geq n + 1$$

2. Prouver que si $a_k > 0 (k = 1, 2, \dots, n)$ et $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, alors

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 2^n.$$

3. Démontrer l'inégalité de Cauchy suivante :

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2$$

Sujet: 12

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On définit la suite $\{x_n\}$ en posant

$$x = [x] + \frac{1}{x_1}, \quad x_1 = [x_1] + \frac{1}{x_2}, \dots, x_{n-1} = [x_{n-1}] + \frac{1}{x_n}.$$

On a alors

$$x = [x] + \frac{1}{[x_1] + \frac{1}{[x_2] + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{[x_{n-1}] + \frac{1}{x_n}}}}}$$

Prouver que x est rationnel si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que x_n soit un entier.

Sujet: 13

Prouver que si les $a_k > -1 (k = 1, \dots, n)$ sont de même signe, on a alors

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Sujet: 14

Établir les inégalités suivantes :

$$\sum_{k=1}^n |a_k| \leq \sqrt{n} \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{n} \sum_{k=1}^n |a_k|.$$

Sujet: 15

Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$. On cherche à prouver que, soit H est dense dans $\mathbb{R}$, soit il existe $\alpha > 0$ tel que $H = \alpha\mathbb{Z}$. Pour cela, on pose $G = H \cap]0, +\infty[$.

1. Montrer que G admet une borne inférieure α dans $\mathbb{R}_+$.

2. On suppose que $\alpha > 0$.

(a) On suppose que $\alpha \notin H$. Démontrer qu'il existe deux éléments x et y de H tels que $\alpha < x < y < 2\alpha$. En déduire une contradiction.

(b) Démontrer que $H = \alpha\mathbb{Z}$.

3. On suppose que $\alpha = 0$. Démontrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.