

Sujet: 1

Pour cet exercice, on rappelle que $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. On fixe $a \in]-1, 1]$ et $\varepsilon > 0$ tel que $a - \varepsilon \geq -1$.

1. Démontrer qu'il existe au moins un entier $n \geq 0$ tel que $\cos(n) \in]a - \varepsilon, a[$.
2. En déduire qu'il existe une infinité d'entiers $n \geq 0$ tels que $\cos(n) \in]a - \varepsilon, a[$.
3. Montrer que l'ensemble $(\cos(n)); n \in \mathbb{N}$ est dense dans $[-1, 1]$?

Sujet: 2

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On définit la suite $\{x_n\}$ en posant $x = [x] + \frac{1}{x_1}$,

$$x_1 = [x_1] + \frac{1}{x_2}, \dots, x_{n-1} = [x_{n-1}] + \frac{1}{x_n}.$$

On a alors

$$x = [x] + \frac{1}{[x_1] + \frac{1}{[x_2] + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{[x_{n-1}] + \frac{1}{x_n}}}}.$$

Prouver que x est rationnel si et seulement s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que x_n soit un entier.

Sujet: 3

Prouver que si les $a_k > -1 (k = 1, \dots, n)$ sont de même signe, on a alors

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Sujet: 4

Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$. On cherche à prouver que, soit H est dense dans $\mathbb{R}$, soit il existe $\alpha > 0$ tel que $H = \alpha\mathbb{Z}$. Pour cela, on pose

$$G = H \cap]0, +\infty[.$$

1. Montrer que G admet une borne inférieure α dans $\mathbb{R}_+$.
2. On suppose que $\alpha > 0$.
 - (a) On suppose que $\alpha \notin H$. Démontrer qu'il existe deux éléments x et y de H tels que $\alpha < x < y < 2\alpha$. En déduire une contradiction.
 - (b) Démontrer que $H = \alpha\mathbb{Z}$.
3. On suppose que $\alpha = 0$. Démontrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.

Sujet: 5

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle croissante possédant une sous suite convergente. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est con-

vergente.

Sujet: 6

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique.

1. On suppose que les sous-suites

$$(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}, (x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (x_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$$

sont convergentes. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

2. On suppose que les sous-suites

$$(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}, (x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (x_{n^2})_{n \in \mathbb{N}}$$

sont convergentes. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Sujet: 7

On considère les suites réelles $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(H_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$\forall n \geq 1, H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad u_n = H_n - \ln(n+1)$$

1. Montrer que, pour tout entier

$$n \geq 1, \ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$$

2. Montrer que la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante et qu'elle tend vers $+\infty$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers un réel noté γ et que $\gamma > 0$.
5. Montrer qu'il existe une suite réelle $(v_n)_{n \geq 1}$ de limite nulle telle que

$$\forall n \geq 1, H_n = \ln n + \gamma + v_n$$

Sujet: 8

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. On note $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles :

$$\forall n \in \mathbb{N}, s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$$

1. Montrer que les suites $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(s_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. En déduire que la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que si s désigne sa limite, alors pour tout

$$n \in \mathbb{N}^*, |s_n - s| \leq u_{n+1}.$$

Sujet: 9

Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels > 0 telle que pour tout

$$n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq \frac{u_n + u_{n-1}}{2}.$$

Sujet: 10

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :
 $a_0 = a, b_0 = b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}$$

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
2. Calculer leur limite commune en fonction de b et φ sachant que $\varphi \in]0, \pi/2[$ et $\cos \varphi = a/b$.

Sujet: 11

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'éléments du disque $D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ du plan complexe telles que la suite $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.

1. Montrer que pour tout

$$n \in \mathbb{N}, |u_n v_n| \leq |u_n| \leq \sqrt{\operatorname{Re}(u_n)}.$$

2. En déduire que ces deux suites sont convergentes et préciser leur limite.

Sujet: 12

Soient α et β deux réels positifs tels que $\alpha + \beta \neq 0$; on note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par la donnée de $u_0 = \alpha, u_1 = \beta$ et la relation

$$u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}, n \in \mathbb{N}$$

1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, u_n > 0$.
2. Quelles sont les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.
4. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geq 1$ et que, pour tout $n \geq N, u_n \geq 1$.
5. On pose $a = \frac{1-\sqrt{13}}{6}$ et $z_n = |\sqrt{u_n} - 2|, n \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout

$$n \geq N, z_{n+2} \leq \frac{1}{3}(z_{n+1} + z_n)$$

puis, en étudiant la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$x_n = z_{n+1} - a z_n, n \in \mathbb{N}$$

, montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 4.

Sujet: 13

Étudier la suite (u_n) définie par

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2 - \sqrt{u_n}}.$$

Sujet: 14

Soit (u_n) une suite définie par

$$u_0 > 0, u_1 > 0, \lambda > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \lambda \sqrt{u_{n+1} u_n}.$$

Expliciter le n -ième terme u_n de la suite en fonction de n .

Sujet: 15

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

1. $u_n = \frac{\ln(n!)}{n}$
2. $u_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n^\alpha}$ en fonction de $x, \alpha \in \mathbb{R}$
3. $u_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n k!$

Sujet: 16

Soit $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1 + \sqrt{\dots + \sqrt{1}}}}$.

1. Écrire une formule de récurrence liée u_{n-1} et u_n .
2. Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$ est bornée.
3. Déterminer sa limite.

Sujet: 17

Étudier la convergence d'une suite u vérifiant $u_0 > 0$ et, pour tout n ,

$$0 < u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{u_n}.$$