

Contents

1	Eléments de logique, vocabulaire ensembliste et applications	2
1	Éléments de logique	2
1.1	Quantificateurs	2
1.2	Connecteurs logiques	3
1.3	Exemples de raisonnement	5
1.4	Principe de récurrence	7
2	Notions d'ensemble	9
2.1	Théorie naïve et axiomatique d'un ensemble	9
3	Opérations sur les ensembles	10
3.1	Produit cartésien d'ensembles	10
3.2	Réunion et intersection	11
3.3	Différence de deux ensembles et complémentaires	12
3.4	L'ensemble des parties d'un ensemble	12
3.5	Partition d'un ensemble	12
4	Applications	13
4.1	Définitions	13
4.2	Exemples d'applications	13
4.3	Image directe. Image réciproque	15
4.4	Injection, surjection et bijection	16
5	Relations binaires	17
5.1	Généralités	17
5.2	Propriétés éventuelles des relations binaires	18
5.3	Relations d'équivalence	18
5.4	Relations d'ordre	19
5.5	Majorants, minorants	20
5.6	Applications entre ensembles ordonnés	21

Chapter 1

Eléments de logique, vocabulaire ensembliste et applications

1 Éléments de logique

1.1 Quantificateurs

Définition 1. On appelle **proposition** (ou assertion) toute phrase $\mathcal{P}$ dont on peut dire si elle est vraie (V) ou fausse (F).

Exemples 1. • "2 est pair" est une proposition vraie

- "3 est pair" est une proposition fausse

Notation 1. Lorsqu'une proposition dépend d'une variable x appartenant à un ensemble E , on pourra la noter $\mathcal{P}(x)$. L'ensemble E sera suivant les cas $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ou d'un sous-ensemble de l'un de ces ensembles.

Exemples 2. • Si on pose $\mathcal{P}(x) : x \geq 1$, alors $\mathcal{P}(2)$ est vraie, $\mathcal{P}(-1)$ est fausse.

- On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel $p \geq 2$ qui n'est divisible que par 1 et par lui-même.

Si on pose $\mathcal{P}(n) : "n \text{ est un nombre premier}"$, alors $\mathcal{P}(7)$ est vraie, $\mathcal{P}(8)$ est fausse.

Quantificateur universel $\forall$

Le symbole $\forall$ placé devant une variable x signifie "quel que soit x ". Ainsi la proposition " $\forall x \in E, \mathcal{P}(x)$ " se lit "quelque soit x appartenant à l'ensemble E , $\mathcal{P}(x)$ est vraie".

Quantificateur existentiel $\exists$

Le symbole $\exists$ placé devant une variable x signifie "il existe (au moins) un x ". La proposition " $\exists x \in E, \mathcal{P}(x)$ " se lit donc "il existe un élément x de E tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie".

Le symbole $\exists!$ placé devant une variable x signifie "il existe un unique x ". La proposition " $\exists! x \in E, \mathcal{P}(x)$ " se lit donc "il existe un unique élément x de E tel que $\mathcal{P}(x)$ est vraie".

Remarque 1. L'ordre des quantificateurs est important. On peut le constater en comparant par exemple les propositions " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}^+, x^2 = y$ " et " $\exists y \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}, x^2 = y$ ".

Exercice 1

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- | | |
|---|---|
| <p>1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1;$</p> <p>2. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1;$</p> | <p>3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1;$</p> <p>4. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1;$</p> |
|---|---|

1.2 Connecteurs logiques

Définition 2. La proposition contraire de $\mathcal{P}$, notée (non $\mathcal{P}$), et appelée **négation** de $\mathcal{P}$, est la proposition qui est vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse et qui est fausse lorsque $\mathcal{P}$ est vraie.

Exemple 1. Les deux propositions suivantes sont contraires l'une de l'autre :

- Quel que soit x , $\mathcal{P}(x)$ est vraie, ou $\forall x, \mathcal{P}(x)$ est vraie.
- Il existe un x tel que $\mathcal{P}(x)$ est faux, ou $\exists x, \mathcal{P}(x)$ est faux.

On peut généraliser et on retiendra qu'on procède comme suit pour nier une proposition:

Proposition 1. (Négation d'une proposition) Pour nier une proposition, on permute les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, puis on nie la conclusion.

Exemples 3. Négation des propositions suivantes:

- " $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x - 2 = 0$ " devient " $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x - 2 \neq 0$ "
- " $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}^+, x^2 = y$ " devient " $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^+, x^2 \neq y$ "
- " $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$ " devient " $\forall M \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) > M$ "

Définition 3. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

- La proposition ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$), appelée **conjonction** de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, est vraie lorsque les deux propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont vraies, fausse dans le cas contraire.
- La proposition ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$), appelée **disjonction** de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, est vraie lorsque l'une au moins des deux propositions $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ est vraie, fausse dans le cas contraire.

Remarque 2. On prendra garde au fait que le "ou" logique est un "ou" inclusif, contrairement au "ou" du langage courant qui lui est exclusif (par exemple dans "Fromage ou Dessert").

Définition 4. Étant données deux propositions logiques $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, on dit que $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$ et on note $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ lorsque, si $\mathcal{P}$ est vraie, alors $\mathcal{Q}$ est vraie.

Vocabulaire. Lorsque $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, on dit que $\mathcal{P}$ est une **condition suffisante** de $\mathcal{Q}$ et que $\mathcal{Q}$ est une **condition nécessaire** de $\mathcal{P}$. Pour que $\mathcal{Q}$ soit vraie, il suffit que $\mathcal{P}$ soit vraie. Pour que $\mathcal{P}$ soit vraie, il faut que $\mathcal{Q}$ soit vraie.

Exemple 2. On rappelle qu'un entier p divise n , et on note $p \mid n$, s'il existe un entier relatif k tel que $n = k \times p$. Est-ce que $6 \mid n$ est une condition nécessaire à ce que n soit pair? Est-ce que $6 \mid n$ est une condition suffisante à ce que n soit pair?

Exemple 3. 1. Trouver des conditions nécessaires (pas forcément suffisantes) à chacune des propositions suivantes :

- (a) Avoir son bac.

- (b) Le point A appartient au segment $[BC]$.
- (c) Le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.
2. Trouver des conditions suffisantes (pas forcément nécessaires) à chacune des propositions suivantes :
- (a) Avoir son bac.
- (b) Le point A appartient au segment $[BC]$.
- (c) Le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.

Exemple 4. Soit la proposition P : "Le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle" et les propositions

1. Q_1 : "Les diagonales de $ABCD$ ont même longueur"
2. Q_2 : " $ABCD$ est un carré"
3. Q_3 : " $ABCD$ est un parallélogramme ayant un angle droit"
4. Q_4 : "Les diagonales de $ABCD$ sont médiatrices l'une de l'autre"
5. Q_5 : "Les diagonales de $ABCD$ ont même milieu".

Dire si chacune des propositions Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5 est pour P une condition nécessaire non suffisante, une condition suffisante non nécessaire, une condition nécessaire et suffisante, ou ni l'un ni l'autre.

Définition 5. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

- L'implication $(\text{non } \mathcal{Q}) \Rightarrow (\text{non } \mathcal{P})$ est appelée la **contraposition** ou la **contraposé** de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.
- L'implication $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ est appelée **l'implication réciproque** de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

Exemple 5. La contraposée de la proposition "la nuit, tous les chats sont gris" est "Si au moins un chat n'est pas gris, alors il fait jour".
Sa réciproque est "Si tous les chats sont gris, alors il fait nuit".

Définition 6. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On dit que $\mathcal{P}$ est **équivalente** à $\mathcal{Q}$ (ou que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes), et on note $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ lorsqu'on a, à la fois, $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.

Vocabulaire. Lorsque $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes, on dit que $\mathcal{P}$ est vraie si et seulement si $\mathcal{Q}$ est vraie. On dit aussi que $\mathcal{P}$ est une condition nécessaire et suffisante de $\mathcal{Q}$. Ou encore que pour que $\mathcal{Q}$ soit vraie, il faut et il suffit que $\mathcal{P}$ soit vraie.

Table de vérité des connecteurs logiques

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\text{non } \mathcal{P}$	$\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Remarque 3. Deux propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont équivalentes si elles ont les mêmes tables de vérité.

Théorème 1. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. L'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et sa contraposée sont équivalentes. Autrement dit :

$$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Leftrightarrow (\text{non } \mathcal{Q} \Rightarrow \text{non } \mathcal{P})$$

Preuve 1. On écrit la table de vérité de la proposition $(\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P)$.

P	Q	$\text{non } Q$	$\text{non } P$	$\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P$
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V

On retrouve la même table de vérité que la proposition $P \Rightarrow Q$. La proposition $(P \Rightarrow Q)$ et la proposition $(\text{non } Q \Rightarrow \text{non } P)$ sont donc équivalentes.

Proposition 2. Soient P et Q deux propositions. Alors :

- $\text{non}(P \text{ et } Q) \Leftrightarrow (\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$,
- $\text{non}(P \text{ ou } Q) \Leftrightarrow (\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$,
- $\text{non}(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \text{ et } (\text{non } Q)$.

Preuve 2. On écrit les tables de vérités des différentes propositions et on vérifie qu'elles sont bien identiques.

Exemple 6. En utilisant le dernier point de la proposition précédente, on obtient que la négation de "la nuit, tous les chats sont gris" est "la nuit, il existe au moins un chat qui n'est pas gris".

Exercice 2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$. Traduire mathématiquement les énoncés suivants puis écrire leur négation :

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. la fonction f s'annule; 2. la fonction f est croissante; 3. la fonction f est décroissante; 4. la fonction f n'est pas monotone; 5. la fonction f est la fonction nulle; 6. la fonction f n'est pas constante; | <ol style="list-style-type: none"> 7. la fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur; 8. la fonction f présente un minimum; 9. la fonction f prend des valeurs arbitrairement grandes; 10. la fonction f ne peut s'annuler qu'une seule fois; 11. la fonction f est paire. |
|--|--|

1.3 Exemples de raisonnement

Trois types de raisonnement peuvent être mis en œuvre pour démontrer une implication $P \Rightarrow Q$:

- **Raisonnement direct:** $P \Rightarrow Q$
On montre que si la proposition P est vraie alors la proposition Q est vraie.
- **Raisonnement par contraposition:** $(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)$
Si la proposition $(\text{non } Q)$ implique la proposition $(\text{non } P)$, alors P implique Q .
- **Raisonnement par l'absurde:** P et $(\text{non } Q)$ conduisent à une contradiction.
Si les propositions P et $(\text{non } Q)$ conduisent à une contradiction, alors P implique Q .

Exercice 3

1. Montrer par un raisonnement direct que, si n est un entier pair, alors n^2 est pair.
2. Montrer par un raisonnement par contraposition que, si n^2 est pair, alors n est pair.
3. Montrer par l'absurde que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

- Pour démontrer une équivalence, il est très souvent commode de procéder en deux étapes en démontrant successivement que $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et que $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.

Exemple 7. On a vu à l'exemple précédent que :

1. Si n est un entier pair, alors n^2 est pair.
2. Si n^2 est pair, alors n est pair.

Donc n est pair si et seulement si n^2 est pair.

- Pour démontrer qu'une propriété $(\forall x, \mathcal{P}(x))$ est vraie, on peut raisonner par **disjonction des cas** en étudiant les différentes situations selon les valeurs de x .

Exemple 8. 1. Inégalité triangulaire : Si x et y sont deux réels, alors $|x + y| \leq |x| + |y|$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $|2x + 1| = |x - 3|$

- Pour déterminer les solutions d'un problème, il peut être intéressant de procéder par **Analyse - Synthèse**.

Le raisonnement se fait en deux temps :

- **Analyse** : On suppose que le problème est résolu et on en déduit des conditions nécessaires.
- **Synthèse** : On montre que ces conditions obtenues sont suffisantes, et on résout le problème.

En pratique, on démontre que, si x est solution d'un problème, il ne peut prendre que certaines valeurs (Analyse). On vérifie ensuite si ces valeurs sont effectivement solutions (Synthèse).

Exemple 9. Déterminer les solutions réelles de l'équation $\sqrt{x + 6} = x$.

Analyse : Supposons que x est solution de cette équation. Alors $x^2 = x + 6$, et donc $x = 3$ ou $x = -2$. Nous avons ainsi montré que si x est solution de $\sqrt{x + 6} = x$, alors nécessairement $x = 3$ ou $x = -2$.

Synthèse : On teste à présent les valeurs obtenues : -2 ne convient pas puisque $\sqrt{-2 + 6} \neq -2$, mais 3 convient car on a bien $\sqrt{3 + 6} = 3$.

Nous avons ainsi montré que l'équation $\sqrt{x + 6} = x$ admet une unique solution $x = 3$. Autrement dit, une condition nécessaire et suffisante pour que x soit solution de $\sqrt{x + 6} = x$ est que $x = 3$.

Exemple 10. Montrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Analyse : Supposons le problème résolu, c'est à dire qu'il existe deux fonctions g et h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, avec g paire et h impaire telles que $f = g + h$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x) + h(x)$$

Comme g est paire et h est impaire, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = g(x) - h(x)$$

On obtient donc $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

Ainsi, s'il existe deux fonctions solutions du problème, alors ce sont nécessairement les fonctions g et h ci-dessus.

Synthèse: Nous allons vérifier que g et h sont bien solutions du problème.

- La fonction g est paire.
- La fonction h est impaire.
- On a bien $f = g + h$.

Par conséquent, nous avons démontré par Analyse-Synthèse qu'il existe un unique couple (g, h) avec g paire et h impaire tel que $f = g + h$.

Exercice 4

Soit x et y deux réels. Montrer que $\min(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$ et $\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$.

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes.

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------|
| 1. $ 2x - 5 = x^2 - 4 ;$ | 3. $\sqrt{ x - 3 } = x - 1 ;$ |
| 2. $\sqrt{ x - 3 } \leq x - 1;$ | 4. $\sqrt{x - 1} \geq x - 7.$ |

Exercice 6

Soit x un réel tel que pour tout $\varepsilon > 0$, $|x| \leq \varepsilon$. Montrer que $x = 0$.

Exercice 7

Démontrer que $\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est un nombre irrationnel.

Exercice 8

Déterminer toutes les applications f de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad f(m + n) = f(m) + f(n)$$

Exercice 9

Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x)f(y) = f(xy) + x + y$$

1.4 Principe de récurrence

La récurrence simple

Définition 7. Le principe de **la récurrence simple** permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendante de n est vraie pour tout n entier naturel. La démonstration se déroule en 3 étapes:

- **Initialisation:** On prouve que $P(0)$ (ou $P(n_0)$ si la propriété ne commence qu'au rang n_0) est vraie.

- **Hérédité:** On suppose n positif donné avec $P(n)$ vraie et on démontre que l'assertion $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion:** On rappelle que par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout n entier naturel.

Exemple 11. Pour $n \geq 1$, notons $S_n = 1 + 2 + \dots + n$ la somme des n premiers entiers. Pour $n \geq 1$, on note P_n la propriété : " $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ "

- **Initialisation:** On a $S_1 = 1 = \frac{1 \times (1+1)}{2}$, donc P_1 est vraie.
- **Hérédité:** Soit $n \geq 1$ tel que P_n est vraie, c'est-à-dire tel que $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Alors, on a :

$$S_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

La propriété P_{n+1} est donc vraie.

- **Conclusion:** la propriété P_n est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 10

1. Montrer que $3|4^n - 1$ pour tout n entier naturel;
2. Soit n un entier naturel, montrer que si $3|4^n + 1$ alors $3|4^{n+1} + 1$;
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, 3 ne divise pas $4^n + 1$;
4. Conclure.

La récurrence double

Définition 8. Le principe de **la récurrence double** permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendante de n est vraie pour tout n entier naturel. La démonstration se déroule en 3 étapes:

- **Initialisation:** On prouve que $P(0)$ et $P(1)$ (ou $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ si la propriété ne commence qu'au rang n_0) sont vraies.
- **Hérédité:** On suppose n positif donné avec $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies et on démontre que l'assertion $P(n+2)$ est vraie.
- **Conclusion:** On rappelle que par le principe de la récurrence double, $P(n)$ est vraie pour tout n entier naturel.

Exercice 11

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}; u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}; u_n = 2^{n+1} - 3^n$

La récurrence forte

Définition 9. Le principe de la **récurrence forte** permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendante de n est vraie pour tout n entier naturel. La démonstration se déroule en 3 étapes:

- **Initialisation:** On prouve que $P(0)$ (ou $P(n_0)$ si la propriété ne commence qu'au rang n_0) est vraie.
- **Hérédité:** On suppose n positif donné avec $P(0), P(1), \dots, P(n)$ sont vraies et on démontre que l'assertion $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion:** On rappelle que par le principe de la récurrence forte, $P(n)$ est vraie pour tout n entier naturel.

Exercice 12

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = u_0 + \dots + u_n \end{cases}$$

Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*; u_n = 2^{n-1}$

2 Notions d'ensemble

2.1 Théorie naïve et axiomatique d'un ensemble

Définition 10. Soient E un ensemble et x un objet.

L'énoncé $x \in E$ signifie que " x appartient à E ", " x est un élément de E ", " E contient x " ou encore " x dans E ". On écrira $x \notin E$ pour signifier que E ne contient pas l'objet x .

Remarque 4. Un ensemble est la donnée d'objets sans ordre. Par exemple, les ensembles de lettres $\{a, b\}$ et $\{b, a\}$ sont les mêmes. Il faut également noter qu'un ensemble ne compte aucun doublon. Ainsi $\{a, b, a\} = \{a, b\}$.

Définition 11. • On note $\emptyset$ et on appelle ensemble vide l'ensemble qui ne contient aucun élément.

- On appelle singleton tout ensemble contenant qu'un seul élément.
- On appelle paire tout ensemble contenant deux éléments exactement.

Exemple 12. 1. L'ensemble $\{a, a\}$ est un singleton.

2. L'ensemble des solutions réelles de $x^2 = 1$ est une paire.

3. L'ensemble des solutions réelles de $x^2 = -1$ est vide.

Définition 12. On peut définir un ensemble E de deux manières :

1. **en extension** : en énumérant entre accolades les éléments;
2. **en compréhension**: E est le sous-ensemble formé des éléments x d'un ensemble connu X vérifiant une certaine propriété notée $P(x)$. On note alors $E = \{x \in X : P(x)\}$, $E = \{x \in X, P(x)\}$ ou $E = \{x \in X \mid P(x)\}$ et l'on dit que " E est l'ensemble des x dans X tels que $P(x)$ " ou encore "vérifiant $P(x)$ ".

Exemple 13. On peut définir en extension ou en compréhension l'ensemble $\mathbb{U}_3$ des racines cubiques de l'unité

$$\mathbb{U}_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = 1\} = \{1, j, j^2\}$$

avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Exercice 13

1. Écrire en extension et en compréhension l'ensemble des entiers naturels divisibles par 4.
2. Écrire en extension et en compréhension l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.

Définition 13. Soient E et F deux ensembles. On écrira $F \subset E$ et l'on dira que " F est un **sous-ensemble** de E ", " F est une **partie** de E ", ou encore que " F est **inclus** dans E " pour signifier que tous les éléments de F sont contenus dans E . La propriété $F \subset E$ est donc synonyme de $\forall x, (x \in F) \Rightarrow (x \in E)$.

Exemple 14. On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Remarque 5.

• $\emptyset \subset E$ • $E \subset E$	• $E = F \iff E \subset F \text{ et } F \subset E$
--	---

Exemple 15. Prouver les égalités suivantes :

- | | |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • $\{z \in \mathbb{C}^*, z^2 = \bar{z}\} = \{1, j, j^2\}$ | <ul style="list-style-type: none"> • $\{n \in \mathbb{N}, 3 n^2\} = 3\mathbb{N}$ |
|--|--|

Exercice 14

Soit $a \leq b$ deux réels. Prouver par double inclusion que

$$[a, b] = \{(1 - \lambda)a + \lambda b, \lambda \in [0, 1]\}$$

3 Opérations sur les ensembles

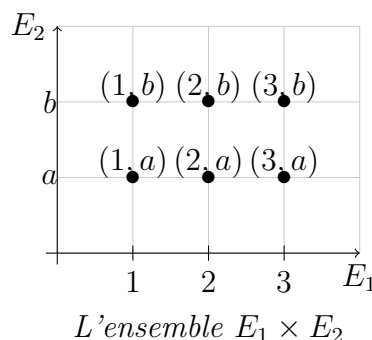
3.1 Produit cartésien d'ensembles

Définition 14. Soient E_1 et E_2 deux ensembles. Le produit cartésien de E_1 par E_2 est par définition l'ensemble $E_1 \times E_2$ des couples (x_1, x_2) tels que $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, i.e :

$$E_1 \times E_2 = \{(x_1, x_2), x_1 \in E_1 \text{ et } x_2 \in E_2\}$$

On adoptera la convention $E_1 \times E_2 = \emptyset$ lorsque l'un des deux ensembles E_1 ou E_2 est vide.

Exemple 16. Soient $E_1 = \{1, 2, 3\}$ et $E_2 = \{a, b\}$ alors le produit cartésien de E_1 et E_2 est donné par



Exercice 15

Soit $D = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 \leq 1\}$. D est-il un produit cartésien de deux parties de $\mathbb{R}$?

Définition 15. Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ n ensembles. Le produit cartésien $\prod_{k=1}^n E_k$ est par définition l'ensemble des n -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tels que $\forall k \in \{1, \dots, n\} x_k \in E_k$ i.e.:

$$\prod_{k=1}^n E_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), \forall k \in \{1, \dots, n\} x_k \in E_k\}$$

On adoptera la convention $\prod_{k=1}^n E_k = \emptyset$ lorsqu'il existe $1 \leq i \leq n$ tel que $E_i = \emptyset$.

Exercice 16

Soient A et B deux ensembles non vides $A' \subset A$ et $B' \subset B$. Que pensez de l'inclusion $A' \times B' \subset A \times B$?

3.2 Réunion et intersection

Définition 16. Soient A et B deux ensembles.

- On appelle **réunion** de A et B l'ensemble noté $A \cup B$, l'ensemble dont les éléments sont ceux de A et B i.e. :

$$A \cup B = \{x, x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

- On appelle **intersection** de A et B et on note $A \cap B$, l'ensemble dont les éléments sont les éléments communs de A et B i.e. :

$$A \cap B = \{x, x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Exemple 17. • $2\mathbb{N} \cap (2\mathbb{N} + 1) = \emptyset$

- $2\mathbb{N} \cup (2\mathbb{N} + 1) = \mathbb{N}$

Exercice 17

Soient A et B deux ensembles tels que $A \cap B = A \cup B$. Montrer que $A = B$.

Proposition 3. Soient A, B, C et D quatre ensembles. On a alors

- | | |
|---|---|
| 1. $A \subset C$ et $B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C$ | 6. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ |
| 2. $A \subset B \Rightarrow B \cap C \subset A \cap C$ | 7. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ |
| 3. $A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C$ | 8. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| 4. $A \subset B$ et $C \subset D \Rightarrow A \cup C \subset B \cup D$ | 9. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ |
| 5. $A \subset B$ et $C \subset D \Rightarrow A \cap C \subset B \cap D$ | |

Preuve 3. Preuve par double inclusion ou tables de vérité.

Définition 17. Deux ensembles A et B sont dits **disjoints** lorsque $A \cap B = \emptyset$.

Exercice 18

1. Déterminer l'intersection des ensembles $A = \{\frac{k}{2^n}, (k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\}$ et $B = \mathbb{Z}$.
2. Les ensembles $A = \{r + \alpha, (r, \alpha) \in \mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\}$ et $B = \mathbb{Q}$ sont-ils disjoints?

3.3 Différence de deux ensembles et complémentaires

Définition 18. Soient A et B deux ensembles. On appelle **différence de A et B** et on note $A \setminus B$ l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B , i.e :

$$A \setminus B = \{x, x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

Définition 19. Soient $A \subset E$. On appelle **complémentaire de A dans E** l'ensemble $E \setminus A$ et on note $\complement_E^A$ ou encore, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble E considéré, A^c .

Proposition 4 (Loi de Morgan). Soient E un ensemble, A et B deux parties de E . On a alors

- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Preuve 4. Preuve par double inclusion.

Exercice 19

Soient A et B deux parties d'un ensemble E .

1. Simplifier $A \setminus (E \setminus B)$
2. Exprimer $(A \times B)^c$ en fonction de A , B , A^c et B^c

3.4 L'ensemble des parties d'un ensemble

Définition 20. L'ensemble des sous-ensembles d'un ensemble E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Exemple 18. Si $E = \{a, b\}$ alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, E\}$.

Exercice 20

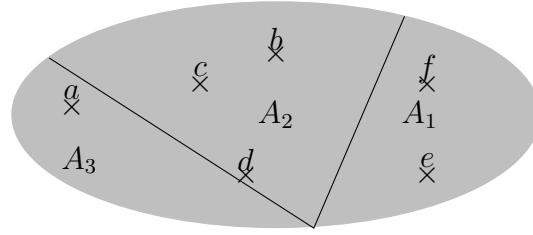
1. Déterminer $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$ lorsque $E = \{a, b\}$.
2. Soient E et F deux ensembles. Montrer que : $F \subset E \Leftrightarrow \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E)$.

3.5 Partition d'un ensemble

Définition 21. Soient E un ensemble et $\mathcal{P}$ un ensemble de parties de E . On dira que $\mathcal{P}$ est une **partition de E** , si $\mathcal{P}$ vérifie les propriétés suivantes:

- | | | |
|---|--|--|
| 1. $\forall A \in \mathcal{P}, A \neq \emptyset$ | | 3. $\bigcup_{A \in \mathcal{P}} A = E$ |
| 2. $\forall A, B \in \mathcal{P}, A \cap B = \emptyset$ | | |

Exemple 19. Si $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ alors $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, A_3\}$ est une partition de E avec



4 Applications

4.1 Définitions

Définition 22. Soient E et F deux ensembles. Une application de E vers F est l'association à chaque élément x de E d'un unique élément y de F . y est appelé l'image de x par f noté $f(x)$ i.e $y = f(x)$. On écrit $f : E \rightarrow F$ pour signifier que f est une application de E vers F . E est l'ensemble de départ et F est l'ensemble d'arrivée.

Exemple 20. 1. Si on considère $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{a', b', c'\}$. On définit l'application $f : E \rightarrow F$ par:

$$\bullet f(a) = a' \quad | \quad \bullet f(b) = a' \quad | \quad \bullet f(c) = b' \quad | \quad \bullet f(d) = a'$$

2. Soit E un ensemble. L'application de E dans E qui associe chaque élément par lui-même est appelée l'identité de E et on la note id_E i.e

$$id_E : E \rightarrow E \\ x \mapsto x$$

Remarque 6. On note F^E ou $\mathcal{F}(E; F)$ l'ensemble des applications de E vers F .

4.2 Exemples d'applications

Composée de deux applications

Définition 23. Soient E, F et G trois ensembles et $f \in F^E$, $g \in G^F$. L'application définie de E dans G qui à chaque $x \in E$ associe $g(f(x))$, est notée $g \circ f$ et appelée composée de g et f .

Exemple 21. 1. Si on considère $E = \{a, b, c, d\}$, $F = \{a', b', c'\}$ et $G = \{1, 2, 3\}$. On définit l'application $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ par:

$$\bullet f(a) = a', f(b) = a', f(c) = b', f(d) = a' \quad | \quad \bullet g(a') = 1, g(b') = 4, g(c') = 2$$

Alors $g \circ f$ est définie par:

$$\bullet (g \circ f)(a) = 1 \quad | \quad \bullet (g \circ f)(b) = 1 \quad | \quad \bullet (g \circ f)(c) = 4 \quad | \quad \bullet (g \circ f)(d) = 1$$

2. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ alors :

$$x \mapsto x^2 \quad x \mapsto x + 1$$

$$\bullet f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x + 1)^2 \quad | \quad \bullet g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 1$$

Définition 24. Pour $f : E \rightarrow E$ une application et $n \in \mathbb{N}$, on définit par récurrence $f^0 = id_E$ et $f^n = f^{n-1} \circ f$ pour $n \geq 1$.

Exercice 21

Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, $x \mapsto \frac{1}{x}$. Que vaut f^n pour $n \in \mathbb{N}$?

Familles indexée et suites

Définition 25. Soient E et I deux ensembles. On appelle famille d'éléments de E indexée par I toute application de I dans E et on la note par $(f_i)_{i \in I}$ où $f_i = f(i)$.

Définition 26. Soit E un ensemble. On appelle suite d'éléments de E indexée par $\mathbb{N}$ toute famille de E indexée par $\mathbb{N}$, autrement dit toute application de $\mathbb{N}$ dans E , et on la note par $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Définition 27. Soit I un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles indexée par I , alors,

- **Intersection** de $(A_i)_{i \in I}$ notée $\bigcap_{i \in I} A_i$ est l'ensemble des éléments communs à tous les A_i , i.e

$$x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I, x \in A_i$$

- **Réunion** de $(A_i)_{i \in I}$ notée $\bigcup_{i \in I} A_i$ est l'ensemble dont chaque élément il existe un $i \in I$ tel que $x \in A_i$, i.e

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I, x \in A_i$$

Exemple 22. Soit E un ensemble et $(A_x)_{x \in E}$ une famille de parties de E , donné par $A_x = \{x\}$ alors:

- $\bigcap_{x \in E} A_x = \emptyset$
- $\bigcup_{x \in E} A_x = E$

Exercice 22

Soit la famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des intervalles définie par $A_n = [1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}[$. Déterminer $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$.

Proposition 5. Soient E un ensemble, $(A_i)_{i \in I}$ une famille des parties de E et B une partie de E . Alors

$$\begin{array}{ll} 1. \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cap B = \bigcap_{i \in I} (A_i \cap B) & 3. \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \\ 2. \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup B = \bigcup_{i \in I} (A_i \cup B) & 4. \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} \end{array}$$

Preuve 5. Preuve par double inclusion.

Fonction indicatrice

Définition 28. Soient E et A une partie de E . On note $\mathbb{1}_A$ la fonction indicatrice de A définie de E dans $\{0, 1\}$ par

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Proposition 6. Soient E un ensemble, A et B deux parties de E . On a alors

1. $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$
2. $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$
3. $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A \cap B}$
4. Si $A \subset B$, $\mathbb{1}_{B \setminus A} = \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A$

Preuve 6. Preuve par examen des cas possibles.

Exercice 23

Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Déterminer $\mathbb{1}_A^2$, $\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{A^c}$, $\max(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$ et $\min(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$.

Restrictions et prolongements

Définition 29 (Restriction). Soient $f : E \rightarrow F$ une application et $A \subset E$. On appelle restriction de f à A et l'on note $f|_A$ l'unique application $g : A \rightarrow F$ définie pour tout x dans A par $g(x) = f(x)$.

Définition 30. Soient $f : E \rightarrow F$ une application et $E \subset \Omega$. On appelle prolongement de f à Ω toute application $g : \Omega \rightarrow F$ qui coïncide avec f sur E , i.e $g|_E = f$.

Exemple 23. Soit $E = \{a, b, c, d\}$, $F = \{a', b', c'\}$ et $A = \{b, c\}$ une partie de E , et $f : E \rightarrow F$ une application de E dans F alors $f|_A$ est donnée par:

- $f|_A(b) = f(b) = a'$
- $f|_A(c) = f(c) = b'$

Exercice 24

On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x| \end{aligned}$$

Déterminer la restriction de f sur $\mathbb{R}^+$.

4.3 Image directe. Image réciproque

Définition 31. Soient $f : E \rightarrow F$ une application, A une partie de E ($A \subset E$) et B une partie de F ($B \subset F$).

- L'ensemble $f(A) = \{f(x); x \in A\}$ est appelé l'image directe de A ;
- L'ensemble $f^{-1}(B) = \{x \in E; f(x) \in B\}$ est appelé l'image réciproque de B .

Remarque 7. • $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A; f(x) = y$

- $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$

Exemple 24. • Soit $E = \{a, b, c, d\}$, $F = \{a', b', c'\}$, $A = \{b, c\}$ une partie de E , $B = \{b', c'\}$ une partie de F et $f : E \rightarrow F$ une application de E dans F définie par:

$$- f(a) = a' \quad | \quad - f(b) = a' \quad | \quad - f(c) = b' \quad | \quad - f(d) = a'$$

Alors:

$$- f(A) = \{a', b'\} \quad | \quad - f^{-1}(B) = \{c\}$$

• Soit

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Alors:

$$- f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ \quad | \quad - f^{-1}([0, 1]) = [-1, 1] \setminus \{0\}$$

Définition 32. Soit $f : E \rightarrow F$ une application. $f(E)$ s'appelle l'image de f et est noté $\text{Im}(f)$.

Proposition 7. Soient $f : E \rightarrow F$ une application, A, A' deux parties de E et B, B' deux parties de F . Alors:

- | | |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $A \subset f^{-1}(f(A))$ 2. $f(f^{-1}(B)) \subset B$ 3. $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$ | <ol style="list-style-type: none"> 4. $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$ 5. $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$ 6. $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$ |
|--|--|

Preuve 7. Preuve par double inclusion.

Remarque 8. Les inclusions précédentes peuvent être strictes. Par exemple, si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, $A = [-1; 0]$ et $A' = [0; 1]$. Alors on a $f(A \cap A') = f(\{0\}) = \{0\}$ et $f(A) \cap f(A') = [0; 1]$.

4.4 Injection, surjection et bijection

Définition 33. Soient E et F deux ensembles. Une application $f : E \rightarrow F$ est dite

- injective lorsque : $\forall (x, y) \in E^2, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
- surjective lorsque : $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$
- bijective lorsqu'elle est injective et surjective.

Exemple 25. • Toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ strictement monotone est injective. Mais la réciproque est fautive : $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $x \in [0, 1] \mapsto x$ et $x \in [1, 2] \mapsto 3 - x$ est injective mais pas monotone sur $[0, 2]$.

- Exemples d'applications injectives, surjectives et bijectives:
 - Application surjective, non injective
 - Application injective, non surjective
 - Application bijective

Proposition 8. Soient E, F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application

- f est injective si et seulement si $\forall y \in F, f^{-1}(\{y\})$ contient au plus un élément.
- f est surjective si et seulement si $\forall y \in F, f^{-1}(\{y\})$ est non vide.
- f est bijective si et seulement si $\forall y \in F, f^{-1}(\{y\})$ contient exactement un élément.

Preuve 8. Preuve par double implication.

Exercice 25

Montrer que l'application $\mathcal{X} : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{F}(E, \{0, 1\})$ qui à $A \in \mathcal{P}(E)$ associe $\mathbb{1}_A$ est bijective.

Proposition 9. La composition de deux injections (resp. surjections) (resp. bijections) est une injection (resp. surjection) (resp. bijection).

Preuve 9. Preuve directe.

Proposition 10. Soient E, F et G trois ensembles et, soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications

- $g \circ f$ est injective $\Rightarrow f$ est injective.
- $g \circ f$ est surjective $\Rightarrow g$ est surjective.

Preuve 10. Preuve par contraposition.

Définition 34. Soit $f \in F^E$ une application bijective. Pour tout $y \in F$, l'unique antécédent de y par f est noté $x = f^{-1}(y)$. L'application qui à y associe son unique antécédent dans E par f est appelée la bijection réciproque de f .

Remarque 9. • $\forall x \in E; f^{-1}(f(x)) = x$ i.e; $f^{-1} \circ f = Id_E$
 • $\forall y \in F; f(f^{-1}(y)) = y$ i.e; $f \circ f^{-1} = Id_F$

Proposition 11. Soit $f \in F^E$, s'il existe une application $g : F \rightarrow E$ tel que:

$$\begin{cases} f \circ g = Id_F \\ g \circ f = Id_E \end{cases}$$

alors f est bijective et on a $g = f^{-1}$.

Proposition 12. Soient $f : E \rightarrow F; g : F \rightarrow G$ deux applications bijectives. Alors $g \circ f$ est bijective et on a $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Exercice 26

Montrer les propositions précédentes.

5 Relations binaires

5.1 Généralités

Soit E et F deux ensembles.

Définition 35. On appelle relation $\mathcal{R}$ de E vers F toute partie R du produit cartésien $E \times F$.

La partie R est appelée le graphe de la relation $\mathcal{R}$.

On dit qu'un élément x de E est en relation avec un élément y de F , pour la relation $\mathcal{R}$, si le couple (x, y) appartient au graphe R .

On exprime cette situation en écrivant $x\mathcal{R}y$.

Si $E = F$ (cas fréquent) on dit que $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur E .

Exemples 4. 1. La relation d'inclusion dans l'ensemble des parties de E : $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A \subset B$.

2. La relation de divisibilité sur les entiers relatifs : $m\mathcal{R}n \Leftrightarrow m$ divise n .

3. Dans $\mathbb{Z}$, et si a non nul, on définit la relation de congruence modulo a : $m\mathcal{R}n \Leftrightarrow m - n$ est divisible par a . On note le plus souvent $m \equiv n[a]$.
4. Sur tout ensemble E , on peut définir la relation égalité : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y$.
Le graphe de cette relation est la diagonale $\Delta(E) = \{(x, x), x \in E\}$.
5. Soit E et F deux ensembles quelconques.
On définit la relation universelle de E vers F par : $\forall (x, y) \in E \times F, x\mathcal{R}y$.
Le graphe de cette relation est l'ensemble $E \times F$ tout entier.

5.2 Propriétés éventuelles des relations binaires

Définition 36. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur l'ensemble E .

- $\mathcal{R}$ est dite réflexive si : $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.
- $\mathcal{R}$ est dite symétrique si : $\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.
- $\mathcal{R}$ est dite transitive si : $\forall (x, y, z) \in E^3, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.
- $\mathcal{R}$ est dite antisymétrique si : $\forall (x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$.

Remarques 1. 1. L'antisymétrie s'écrit aussi : $\forall (x, y) \in E^2, (x\mathcal{R}y \text{ et } x \neq y) \Rightarrow \text{non } (y\mathcal{R}x)$

2. Si $\mathcal{R}$ est symétrique, on dira de deux éléments x, y de E qu'ils sont ou qu'ils ne sont pas en relation (x et y ayant alors des rôles identiques).
3. L'antisymétrie n'est pas le contraire de la symétrie.
La relation "égalité", par exemple, possède les deux propriétés, alors que la relation donnée en exemple sur $\{a, b, c, d, e, f\}$ n'est ni symétrique (e est en relation avec a mais a n'est pas en relation avec e) ni antisymétrique (les éléments d et f sont en relation l'un avec l'autre, bien qu'ils soient distincts).
4. A titre d'exercice, on pourra vérifier que si une relation est à la fois symétrique, antisymétrique, et réflexive, alors c'est la relation d'égalité.

5.3 Relations d'équivalence

Définition 37. On dit qu'une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une relation d'équivalence si $\mathcal{R}$ est à la fois réflexive, symétrique et transitive.

Pour tout x de E , l'ensemble des éléments en relation avec x est appelé la classe d'équivalence de x , et notée $\mathcal{C}(x)$ (ou $\dot{x}$, ou $\bar{x}$) : $\mathcal{C}(x) = \{y \in E, x\mathcal{R}y\}$.

Conséquence 1. 1. La relation $\mathcal{R}$ étant réflexive, tout élément x de E appartient à sa propre classe d'équivalence. En particulier, aucune classe d'équivalence n'est vide.

2. Soit x et y dans E : si $x\mathcal{R}y$, alors $\mathcal{C}(x) = \mathcal{C}(y)$. Sinon $\mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y) = \emptyset$.
3. Deux classes d'équivalence sont donc ou bien identiques ou bien disjointes. Une classe d'équivalence $\mathcal{C}$ est entièrement déterminée par la donnée de l'un quelconque de ses éléments x (on dira que x est un représentant de $\mathcal{C}$).

Proposition 13. (partitions et relations d'équivalence) Soit E un ensemble.

- Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E . Soit Ω un sous-ensemble de E obtenu en choisissant dans chaque classe d'équivalence $\mathcal{C}$ un représentant x unique : la famille $(\mathcal{C}(x))_{x \in \Omega}$ est une partition de l'ensemble E . Autrement dit, les différentes classes d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}$ définissent une partition de E .
- Réciproquement, soit $(E_i)_{i \in I}$ une partition de E .
Soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur E par : $\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists i \in I, \{x, y\} \subset E_i$
Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E , et les sous-ensembles E_i sont les classes d'équivalence de E pour $\mathcal{R}$.

Exemples de relations d'équivalence

1. Soit $f : E \rightarrow F$ une application.
On définit une relation d'équivalence sur E en posant : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.
La classe d'équivalence de x est l'image réciproque par f du singleton $\{f(x)\}$.
2. Par exemple, si Ω est un point fixé du plan affine, on définit une relation sur ce plan en posant $M\mathcal{R}N \Leftrightarrow d(\Omega, M) = d(\Omega, N)$: l'ensemble des classes d'équivalence est l'ensemble des cercles de centre Ω .
3. La relation définie sur l'ensemble $\mathcal{D}$ des droites du plan affine par : $D\mathcal{R}\Delta \Leftrightarrow D // \Delta$.
Les classes d'équivalence correspondent aux différentes "directions" de droites.
4. La relation définie sur $\mathbb{Z}$ par $x \equiv y[n]$.
Il y a exactement n classes d'équivalence.
Les entiers $0, 1, 2, \dots, n-1$ constituent une famille de représentants de chaque classe.
L'ensemble des différentes classes d'équivalence s'écrit donc : $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{n-1}\}$.

5.4 Relations d'ordre

Définition 38. On dit qu'une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une relation d'ordre si $\mathcal{R}$ est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.

On note souvent $\leq$ une telle relation.

On dit alors que $(E, \leq)$ est un ensemble ordonné.

Une relation d'ordre sur E est donc caractérisée par :

1. $\forall x \in E, x \leq x$
2. $\forall x, y, z \in E, (x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$
3. $\forall x, y \in E, (x \leq y) \text{ et } (y \leq x) \Rightarrow x = y$

Définition 39. (ordre total ou ordre partiel)

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'ordre sur E .

- Deux éléments x et y de E sont dits comparables (pour $\leq$) si $x \leq y$ ou si $y \leq x$.
- Si deux éléments quelconques x et y sont toujours comparables, on dit que $\leq$ est une relation d'ordre total : l'ensemble E est dit totalement ordonné par $\leq$.
- Sinon (c'est-à-dire s'il existe au moins deux éléments non comparables x et y) on dit que $\leq$ est une relation d'ordre partiel (l'ensemble E est dit partiellement ordonné par $\leq$).

Exemples 5. 1. Relation d'ordre inverse

Si $\leq$ est une relation d'ordre sur E , on définit encore une relation d'ordre sur E , notée $\geq$, en posant : $\forall (x, y) \in E^2, x \geq y \Leftrightarrow y \leq x$.

2. Sur les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, on dispose d'une relation d'ordre total, notée $\leq$.

3. Si on pose : $x < y \Leftrightarrow (x \leq y) \text{ et } x \neq y$, on définit une nouvelle relation (appelée souvent ordre strict) qui en fait n'est pas une relation d'ordre (elle n'est pas réflexive).

4. On définit une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$ en posant : $A \leq B \Leftrightarrow A \subset B$.

Il s'agit d'un ordre partiel, sauf si E est vide ou se réduit à un élément.

Par exemple, si a et b sont distincts dans E , $\{a\}$ et $\{b\}$ ne sont pas comparables.

5. La relation de divisibilité est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.

Rappelons qu'on note $m \mid n$ (" m divise n ") s'il existe un entier q tel que $n = qm$.

C'est un ordre partiel. Par exemple 2, 3 sont non comparables (aucun ne divise l'autre).

6. La divisibilité ne définit pas une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$; en effet si m est un entier relatif non nul, les entiers m et $-m$ se divisent mutuellement (le quotient vaut -1) bien qu'ils soient distincts : la relation n'est donc pas antisymétrique.

7. Sur $\mathbb{R}^2$, on peut poser : $(x, y) \leq (x', y') \Leftrightarrow (x \leq x') \text{ et } (y \leq y')$.

C'est un ordre partiel : les couples $(1, 2)$ et $(4, 0)$, par exemple, ne sont pas comparables.

8. Toujours sur $\mathbb{R}^2$, on peut poser : $(x, y) \leq (x', y')$ si $\begin{cases} x < x' \text{ ou} \\ (x = x') \text{ et } (y \leq y') \end{cases}$

on définit ainsi une relation d'ordre total sur $\mathbb{R}^2$.

Cette relation (dont le modèle se généralise facilement à $\mathbb{R}^n$) est appelée ordre lexicographique, en référence à la relation d'ordre total qui permet de classer les mots du dictionnaire.

5.5 Majorants, minorants

Définition 40. (Majorants et minorants) Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. Soit A une partie non vide de E .

- On dit qu'un élément x de E est un majorant de A (ou qu'il majore la partie A) si x est comparable à tous les éléments de A et si, pour tout a de A , $a \leq x$.
- On dit qu'un élément x de E est un minorant de A (ou qu'il minore A) si x est comparable à tous les éléments de A et si, pour tout a de A , $x \leq a$.

Définition 41. (Parties majorées, minorées, bornées) Soit A une partie non vide d'un ensemble ordonné $(E, \leq)$. On dit que A est :

- majorée si l'ensemble de ses majorants est non vide.
- minorée si l'ensemble de ses minorants est non vide.
- bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Autrement dit : A est bornée $\Leftrightarrow \exists (x, y) \in E^2, \forall a \in A, x \leq a \leq y$.

Proposition 14. (Élément maximum, élément minimum)

Soit A une partie non vide d'un ensemble ordonné $(E, \leq)$. Soit α un élément de A .

- On dit que α est un élément maximum de A (ou plus grand élément de A) s'il majore A . Il n'existe au plus qu'un élément maximum de A : en cas d'existence, on le note $\max(A)$.
- On dit que α est un élément minimum de A (ou plus petit élément de A) s'il minore A . Il n'existe au plus qu'un élément minimum de A : en cas d'existence, on le note $\min(A)$.

Exemples 6. 1. Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, $A =]-\infty, 1[$ est majorée, mais non minorée (donc non bornée).

L'ensemble de ses majorants est $[1, +\infty[$. Le maximum de A n'existe pas.

2. Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, $B = [-2, +\infty[$ est minorée mais non majorée.

L'ensemble de ses minorants est $] -\infty, -2]$; $\min(B) = -2$.

3. Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, $C =]0, 1[$ est bornée, mais $\min(C)$ et $\max(C)$ n'existent pas.

4. Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, $D = [0, 1]$ est bornée. $\min(D) = 0$ et $\max(D) = 1$.

5. Dans $(\mathbb{N}, \leq)$, toute partie non vide possède un plus petit élément. 0 est le minimum de $\mathbb{N}$.

6. Si A est une partie finie non vide de $(E, \leq)$ totalement ordonné, $\min(A)$ et $\max(A)$ existent.

7. Dans $(\mathcal{P}(E), \subset)$, $\emptyset$ est l'élément minimum de $\mathcal{P}(E)$, et E est son élément maximum.

Toute famille $(E_i)_{i \in I}$ de parties de E est minorée par $\bigcap_{i \in I} E_i$ et majorée par $\bigcup_{i \in I} E_i$.

8. Dans $(\mathbb{N}, |)$, 1 est le minimum de $\mathbb{N}$. Toute famille finie $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ est minorée par le pgcd des entiers a_k , et majorée par leur ppcm.

5.6 Applications entre ensembles ordonnés

Définition 42. Soit f une application de l'ensemble E vers l'ensemble ordonné $(F, \leq)$.

On dit que f est majorée (resp. minorée, bornée), si l'ensemble image $f(E)$ est majoré (resp. minoré, borné) dans F .

Autrement dit :

$\diamond f$ est majorée $\Leftrightarrow \exists \beta \in F, \forall x \in E, f(x) \leq \beta$: on dit ici que f est majorée par β .

$\diamond f$ est minorée $\Leftrightarrow \exists \alpha \in F, \forall x \in E, \alpha \leq f(x)$: on dit ici que f est minorée par α .

$\diamond f$ est bornée $\Leftrightarrow \exists (\alpha, \beta) \in F^2, \forall x \in E, \alpha \leq f(x) \leq \beta$.

Remarques et Exemples

1. On dit que f est majorée sur une partie A de E si la restriction de f à A est majorée (idem avec "minorée" et "bornée").

Dans ce qui précède, il suffit de remplacer " $\forall x \in E$ " par " $\forall x \in A$ ".

2. L'application de $\mathbb{R}$ dans lui-même, définie par $f(x) = \exp x$ est minorée par 0.

Elle n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$ mais elle est majorée sur $\mathbb{R}^-$ (par 1).

3. L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par $f(x) = \sin x$ est bornée (elle est en effet majorée par 1 et minorée par -1).

Soit E et F deux ensembles ordonnés (on notera $\leq$ les deux relations d'ordre.)

Dans la suite, on notera $x < y$ pour dire : $(x \leq y)$ et $(x \neq y)$.

Définition 43. (Applications monotones)

Soit f une application de E vers F .

- On dit que f est croissante si : $\forall (x, y) \in E^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- On dit que f est décroissante si : $\forall (x, y) \in E^2, x \leq y \Rightarrow f(y) \leq f(x)$.
- L'application f est dite monotone si elle est croissante ou décroissante.

Définition 44. (Applications strictement monotones)

Soit f une application de E vers F .

- ✓ On dit que f est strictement croissante si : $\forall (x, y) \in E^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- ✓ On dit que f est strictement décroissante si : $\forall (x, y) \in E^2, x < y \Rightarrow f(y) < f(x)$.
- ✓ f est dite strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarques 2. • La monotonie stricte implique évidemment la monotonie "au sens large".

- La monotonie de f dépend des relations d'ordre choisies sur E et F . Par exemple, si f est croissante de $(E, \leq)$ dans lui-même, elle est décroissante de $(E, \leq)$ dans $(E, \geq)$!
- Si E est l'un des ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, la monotonie sera toujours considérée par référence à la relation d'ordre $\leq$ naturelle.

Exemples 7. 1. On munit $\mathcal{P}(E)$ de la relation d'inclusion.

L'application f définie par : $\forall A \subset E, f(A) = \bar{A}$ est strictement décroissante.

Si $X \subset E$ est fixé, l'application g définie sur $\mathcal{P}(E)$ par $g(A) = A \cup X$ est croissante.

2. L'application f définie par $f(x) = E[x]$ (partie entière de x) est croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

L'application g définie par $g(x) = x + \sin x$ est strictement croissante.

3. La suite u de terme général $u_n = 1/(n+1)$, considérée comme application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, est strictement décroissante.

4. La fonction Π , qui à tout réel x associe le nombre d'entiers premiers inférieurs ou égaux à x , est une application croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{N}$.