

Contents

1	Notions de base sur les nombres complexes	1
1.1	Construction de $\mathbb{R}$	1
1.2	Lien avec le plan géométrique	2
1.3	Conjugué d'un nombre complexe	3
1.4	Module d'un nombre complexe	4
1.5	Argument d'un nombre complexe non nul	5
1.6	Lien de l'argument avec le plan géométrique	6
2	Équations algébriques	6
2.1	Racines carrés d'un nombre complexe	6
2.2	Équations algébriques du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$	7
2.3	Racines n -ièmes de l'unité	7
2.4	Racines n -ièmes d'un nombre complexe	8
3	Exponentielle complexe	8
3.1	Exponentielle imaginaire	9
3.2	Retour à l'exponentielle complexe	10
4	Transformations géométriques dans le plan complexe	10
4.1	Translation	10
4.2	Homothétie	11
4.3	Rotation	11
4.4	Similitude direct	12
4.5	Similitudes dans le Plan Complexe	12
5	Annexe : CALCUL TRIGONOMETRIQUE	14
5.1	Formules de transformations	14
5.2	Formules de la tangente	14
5.3	LES ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES	14
5.4	L'équation : $a \cos x + b \sin x + c = 0$	15

Chapter 2

Les nombres complexes

1 Notions de base sur les nombres complexes

1.1 Construction de $\mathbb{C}$

Nous supposons dans ce chapitre que nous connaissons parfaitement l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels muni de ses deux opérations usuelles : $+$; son addition et $\times$; sa multiplication.

Partant de là, nous allons construire le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, c'est-à-dire justifier qu'un tel ensemble existe avec toutes ses propriétés.

On définit sur $\mathbb{R}^2$ deux opérations $\oplus$ et $\otimes$ en posant, pour tous $(a, b), (a', b') \in \mathbb{R}^2$:

$$(a, b) \oplus (a', b') = (a + a', b + b') \quad \text{et} \quad (a, b) \otimes (a', b') = (aa' - bb', ab' + ba').$$

Par définition, l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de ces deux opérations est noté $\mathbb{C}$ et ses éléments sont appelés les nombres complexes.

Remarquons que pour tous $a, a' \in \mathbb{R}$, $(a, 0) \oplus (a', 0) = (a + a', 0)$ et $(a, 0) \otimes (a', 0) = (aa', 0)$. Ces deux égalités montrent que l'addition $\oplus$ et la multiplication $\otimes$ agissent sur les couples de la forme $(a, 0)$, $a \in \mathbb{R}$, comme l'addition $+$ et la multiplication $\times$ agissent sur $\mathbb{R}$. C'est pour cette raison qu'il est légitime d'identifier un réel $a \in \mathbb{R}$ avec le complexe $(a, 0) \in \mathbb{C}$. Cette identification permet de considérer $\mathbb{R}$ comme un sous-ensemble de $\mathbb{C}$.

Par cette identification, pour tous $a, a' \in \mathbb{R}$:

$$a \oplus a' = (a, 0) \oplus (a', 0) = (a + a', 0) = a + a' \quad \text{et} \quad a \otimes a' = (a, 0) \otimes (a', 0) = (aa', 0) = a \times a'.$$

Ces égalités montrent que les opérations $\oplus$ et $\otimes$ généralisent à $\mathbb{C}$ les opérations usuelles $+$ et $\times$ que nous connaissons sur $\mathbb{R}$.

Par conséquent, nous noterons, sans risque d'ambiguïté, l'opération $\oplus$ et l'opération $\otimes$.

Par l'identification précédente, nous avons choisi de noter $1 = (1, 0) \in \mathbb{C}$. Nous décidons de noter à présent $i = (0, 1) \in \mathbb{C}$.

Il vient alors que

$$i^2 = (0, 1) \otimes (0, 1) = (0 \times 0 - 1 \times 1, 0 \times 1 + 1 \times 0) = (-1, 0) = -1.$$

Soit $z = (a, b) \in \mathbb{C}$. Alors $z = (a, b) = (a, 0) \oplus (0, b) = (a, 0) \oplus ((0, 1) \otimes (b, 0)) = a + ib$.

De plus, cette écriture est unique car si $z = a + ib = a' + ib'$ alors, par le calcul précédent, $z = (a, b) = (a', b')$ puis $a = a'$ et $b = b'$. Ces deux dernières remarques permettent de légitimer la définition qui suit.

Définition 1. • Pour tout nombre complexe z il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :
 $z = a + ib$

L'écriture $z = a + ib$ est appelé **l'écriture algébrique** du nombre complexe z

- a s'appelle **partie réelle** de z on note $a = \operatorname{Re}(z)$
- b s'appelle **partie imaginaire** de z on note $b = \operatorname{Im}(z)$

Exemple 1. 1. Justifier que l'écriture algébrique du nombre complexe $z = (1 + i\sqrt{2})^3 + 1 + 8i$ est $-4 + i(8 + \sqrt{2})$.

2. Trouver l'écriture algébrique du nombre complexe i^n en fonction de n .

Proposition 1. Soient z, z' deux nombres complexes. Alors

1. $\operatorname{Re}(z + z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z')$
2. $\operatorname{Im}(z + z') = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z')$

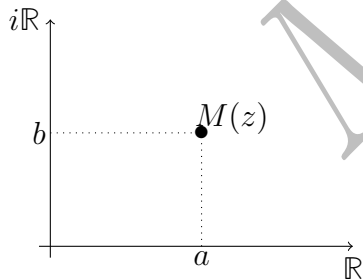
Exercice 1

Que pensez-vous de la propriété suivante: $\forall z, z' \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(zz') = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z')$

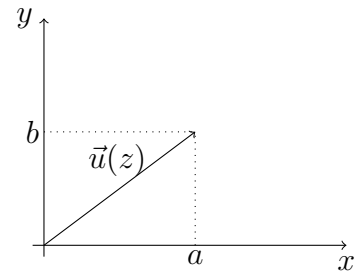
1.2 Lien avec le plan géométrique

On identifie $\mathbb{C}$ par le plan affine euclidienne (géométrique) $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct.

1. Tout point M de coordonnées $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est associé au nombre complexe $z = a + ib$
 - z s'appelle l'affixe de $M(a, b)$ et on note $\operatorname{aff}(M) = z$
 - On écrit $M(z)$ pour signifier que le point M est d'affixe z
2. Tout vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x, y) est associée au nombre complexe $z = a + ib$
 - z s'appelle l'affixe de $\vec{u}(a, b)$ et on note $\operatorname{aff}(u) = z$
 - On écrit $\vec{u}(z)$ pour signifier que le vecteur $\vec{u}$ est d'affixe z



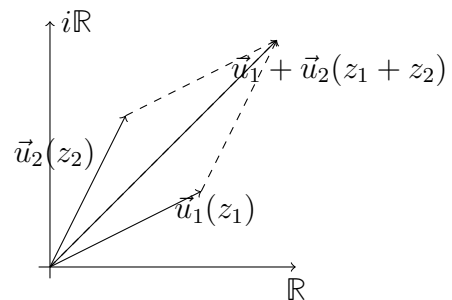
Affixe d'un point M



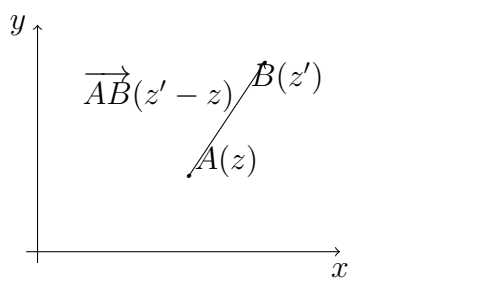
Affixe d'un vecteur $\vec{u}$

Remarque 1.

1. Soient $\vec{u}_1(z_1)$ et $\vec{u}_2(z_2)$ deux vecteurs du plan. Le nombre complexe $z_1 + z_2$ est l'affixe du vecteur $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$: l'addition des nombres complexes **correspond** donc à l'addition des vecteurs.



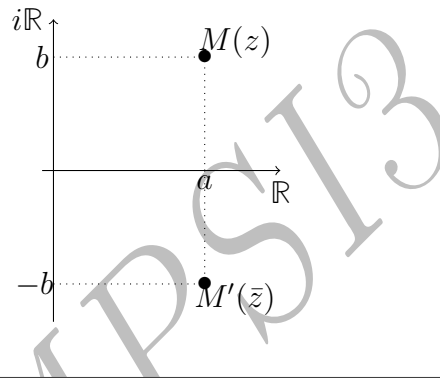
2. Si A et B deux points du plan avec $\operatorname{aff}(A) = z$ et $\operatorname{aff}(B) = z'$, donc $\operatorname{aff}(\overrightarrow{AB}) = z' - z$



1.3 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 2. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Le conjugué de z , noté $\bar{z}$, est le nombre complexe définie par $a - ib$.

Remarque 2. D'un point de vue géométrique, les points $M(z)$ et $M'(\bar{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses (Ox). L'application de conjugaison définie sur $\mathbb{C}$ par $z \mapsto \bar{z}$ correspond donc à la symétrie par rapport à l'axe des réels (Ox).



Exercice 2

Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que :

1. $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ et $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
2. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0$
3. $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0$

Proposition 2. Soit $z, z', z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{z \pm z'} = \bar{z} \pm \bar{z}'$
- $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$
- Si $z' \neq 0$, $\frac{\bar{z}}{z'} = \frac{\bar{\bar{z}}}{\bar{z}'}$
- $\overline{\sum_{k=0}^n z_k} = \sum_{k=0}^n \bar{z}_k$
- $\overline{\prod_{k=0}^n z_k} = \prod_{k=0}^n \bar{z}_k$

Exercice 3

Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que : $\frac{z}{1-z}$ soit un réel.

1.4 Module d'un nombre complexe

Lemme 1. Pour tout nombre complexe z le nombre $z\bar{z} = \operatorname{Re}^2(z) + \operatorname{Im}^2(z)$, et donc $z\bar{z}$ est un nombre positif.

Remarque 3. Ce petit calcul permet d'écrire sous forme algébrique le quotient de deux nombres complexes, il suffit pour cela de multiplier dénominateur et numérateur de la fraction par la quantité conjuguée du dénominateur : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}$. Par exemple,

$$\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{1^2+1^2} = \frac{1+i}{2}$$

Exercice 4

Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $z = \frac{(i-1)^3}{(i+3)^2+(i-5)^5}$

Définition 3. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Le module de z est le nombre positif $\sqrt{a^2 + b^2}$ noté $|z|$.

Remarque 4.

- Si M est d'affixe z , avec $z = a + ib$, donc $|z| = OM$
- Si M et M' sont d'affixes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ respectivement, donc $|z - z'| = MM'$.



Exercice 5

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z - 1| = |z + 1 + i3|$.

Proposition 3. Soit $z, z' \in \mathbb{C}$.

- $z\bar{z} = |z|^2$
- $|zz'| = |z||z'|$
- Si $z' \neq 0$, alors $|\frac{z}{z'}| = \frac{|z|}{|z'|}$
- $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$
- $\forall n \in \mathbb{N}, |z|^n = |z^n|$
- Si $|z| = 1$, alors $\frac{1}{z} = \bar{z}$

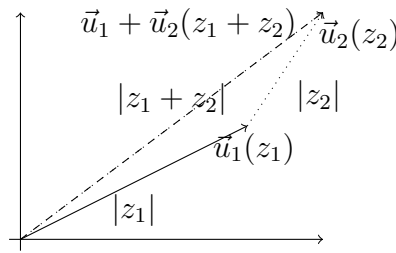
Exercice 6

Montrer que $z \in \mathbb{R}^+$ si et seulement si $\operatorname{Re}(z) = |z|$

Proposition 4. Soit $z, z', z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, alors

- $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$
- $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ **L'inégalité triangulaire**
- $|\sum_{k=0}^n z_k| \leq \sum_{k=0}^n |z_k|$

Remarque 5. L'interprétation géométrique de l'inégalité triangulaire est immédiate : une ligne brisée est toujours plus longue qu'une ligne droite de mêmes extrémités.



Exercice 7

Montrer les assertions suivantes:

1. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ tel que $z' \neq 0$ alors $(|z + z'| = |z| + |z'| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^+, z = \lambda z')$
2. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, alors $||z| - |z'|| \leq |z - z'|$

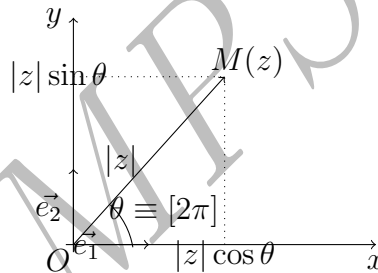
1.5 Argument d'un nombre complexe non nul

Définition 4. Soit z un nombre complexe non nul. Tout réel θ tel que $z = |z|e^{i\theta}$ est appelé un **argument** de z .

Exemple 2. Écrire sous la forme exponentielle $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = \sqrt{2} + 1 - i$

Définition 5. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. L'unique réel $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que $z = |z|e^{i\theta}$ est appelé **l'argument principal** de z . On le note $\arg(z)$.

Remarque 6. Si $z \in \mathbb{C}^*$; $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$. M est le point d'affixe z , alors $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}) \equiv \arg(z)[2\pi]$



Exercice 8

Soient $z \in \mathbb{C}^*$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = re^{i\theta}$. Montrer que les arguments de z sont de la forme $\arg(z) + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Proposition 5. Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$

- $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)[2\pi]$
- $\arg(zz') \equiv -\arg(z) + \arg(z')[2\pi]$
- $\arg(\frac{z}{z'}) \equiv \arg(z) - \arg(z')[2\pi]$
- $\arg(z^n) \equiv n \arg(z)[2\pi], \forall n \in \mathbb{N}$

Exercice 9

1. Calculer un argument de $\alpha = j - j^2$
2. Exprimer $e^{\frac{i\pi}{3}}$ en fonction de j et j^2

Proposition 6. Soit $z \in \mathbb{C}^*$

- $z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0[2\pi]$
- $z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \pi[2\pi]$
- $z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0[\pi]$
- $z \in i\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$
- $z \in i\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$
- $z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$

1.6 Lien de l'argument avec le plan géométrique

Proposition 7. Si A, B, C sont trois points distincts du plan d'affixes respectives a, b, c alors

$$\arg \left(\frac{c-a}{b-a} \right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) [2\pi].$$

Exercice 10

Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan complexe $\mathcal{P}$ d'affixes respectives a, b, c et d . Montrer les assertions suivantes :

1. A, B, C sont alignés si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$
2. ABC est un triangle rectangle en A si et seulement si $\frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}$
3. A, B, C et D des points cocycliques si et seulement si $\frac{d-a}{b-a} \times \frac{d-c}{b-c} \in \mathbb{R}$ ou $\frac{d-a}{b-a} \times \frac{b-c}{d-c} \in \mathbb{R}$

2 Équations algébriques

2.1 Racines carrées d'un nombre complexe

Proposition 8. Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées complexes opposées.

Exercice 11

Soient ω un nombre complexe non nul, et $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ une racine carrée de ω

1. Montrer que $x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(\omega)$, $2xy = \operatorname{Im}(\omega)$ et $x^2 + y^2 = |\omega|$
2. Vérifier que le système $\begin{cases} x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(\omega) \\ x^2 + y^2 = |\omega| \end{cases}$ admet 4 couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ solutions;
3. On suppose que x et y sont positives, par considération le signe de $\operatorname{Im}(\omega)$ déterminer les racines de ω
4. Déterminer les racines carrées de ω dans les cas suivants:

a) $\omega = -8 + i6$

b) $\omega = 1 \pm i$

c) $\omega = 3 + i5$

2.2 Équations algébriques du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$

Proposition 9. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ tel que $a \neq 0$. L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$$

avec δ est une racine carrée de $\Delta = b^2 - 4ac$

Exemple 3. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1+i)z + 2+2i = 0$

Exercice 12

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ tel que $a \neq 0$. Considérons l'équation $(E) : az^2 + bz + c = 0$. Montrer que z_1, z_2 sont solutions de (E) si et seulement si $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

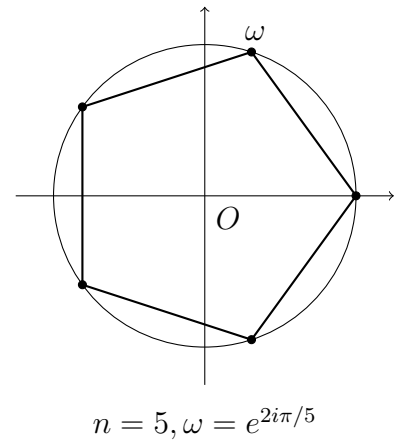
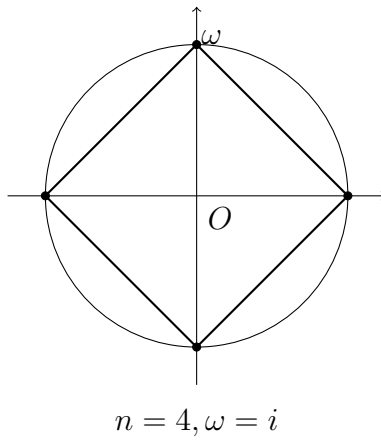
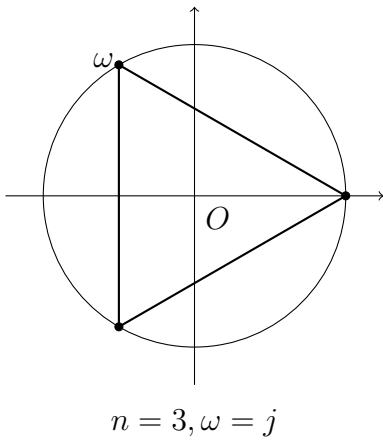
2.3 Racines n -ièmes de l'unité

Définition 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une racine n -ième de l'unité est un nombre complexe z tel que $z^n = 1$. Et on note par $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n -ième de l'unité.

Proposition 10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ non nul, il existe exactement n racines n -ièmes de l'unité, les $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $0 \leq k \leq n-1$, où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Exemple 4. Montrons que les racines cubiques de l'unité sont $1, j$ et j^2 . avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

Remarque 7. On peut également tirer de la proposition précédente des renseignements sur la configuration géométrique des images des n racines n -ièmes de l'unité. Puisque pour tout $0 \leq k \leq n-1$, ω^k est de module 1 et d'argument principal $\frac{2k\pi}{n}$, les images des racines n -ièmes de l'unité ω^k sont réparties régulièrement sur le cercle unité : elles forment un polygone régulier à n côtés en partant du point d'abscisse 1. Par exemple, dans le cas $n = 5$, les points d'abscisses $1, e^{\frac{2i\pi}{5}}, e^{\frac{4i\pi}{5}}, e^{\frac{6i\pi}{5}}$ et $e^{\frac{8i\pi}{5}}$ sont les sommets d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle unité.

**Exercice 13**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Montrer que : $1 + \omega + \dots + \omega^n = 0$.

2.4 Racines n -ièmes d'un nombre complexe

Définition 7. Une racine n -ième de $\alpha \in \mathbb{C}$ est un nombre complexe z tel que $z^n = \alpha$.

Proposition 11. Tout nombre complexe z non nul admet exactement n racines n -ièmes. Si z_0 désigne l'une quelconque d'entre elles, la liste des racines n -ièmes de z s'écrit $z_0, z_0\omega, \dots, z_0\omega^{n-1}$ avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Exemple 5.

1. Déterminer les racines cubiques de -1
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-1)^n + (z+1)^n = 0$.

3 Exponentielle complexe

Définition 8. On rappelle que la fonction $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est une bijection sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionnelle :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : f(x+y) = f(x)f(y)$$

On prolonge cette fonction à $\mathbb{C}$, on pose pour tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit de la forme $z = x + iy$

$$\exp(z) = \exp(x) \exp(iy)$$

et on l'appelle **l'exponentielle complexe** de z , ou encore

$$e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i \operatorname{Im}(z)}$$

Définition 9. Pour tout nombre complexe z non nul, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$. Une telle écriture est appelée **forme trigonométrique ou polaire** de z .

Exemple 6. Écrire sous forme polaire les nombres complexes i , $1+i$ et $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

3.1 Exponentielle imaginaire

Définition 10. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Remarque 8. La forme polaire s'écrit désormais d'une manière condensée : $z = |z|e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$

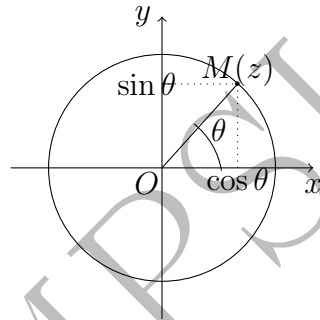
Définition 11. On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 et on l'appelle **cercle trigonométrique**

Remarque 9.

- $\forall z \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, z = e^{i\theta}$
- $\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} = (e^{i\theta})^{-1}$

Formule d'Euler :

- $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$
- $\forall \theta \in \mathbb{R}, \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$



Interprétation géométrique de $z = e^{i\theta}$

Exercice 14

Déterminer le conjugué des nombres suivants : $\frac{e^{-i}}{1+i}$, j , $\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$

Proposition 12.

1. $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R} : e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
2. (**formule de Moivre**) $\forall \theta \in \mathbb{R} : (e^{i\theta})^n = e^{i(n\theta)}$ c'est-à-dire

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$
3. $\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R} : e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta' \equiv \theta[2\pi]$

Exercice 15

Montrer les assertions suivantes

1. Si $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$. Alors $e^{i\sum_{k=1}^n \theta_k} = \prod_{k=1}^n e^{i\theta_k}$
2. (**Méthode de factorisation par arc moitié**) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors

- (a) $e^{i\alpha} + e^{i\beta} = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$
 (b) $e^{i\alpha} - e^{i\beta} = 2i \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}$
 (c) $e^{i\alpha} + 1 = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$
 (d) $e^{i\alpha} - 1 = 2i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)e^{i\frac{\alpha}{2}}$

3.2 Retour à l'exponentielle complexe

Proposition 13. Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, on a :

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'}$$

Exercice 16

Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N} : (e^z)^n = e^{nz}$

Proposition 14. Soit $z \in \mathbb{C}$

- $e^z \neq 0$
- $\arg(e^z) = \text{Im}(z)[2\pi]$
- $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$
- $|e^z| = e^{\text{Re}(z)}$
- $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$

Proposition 15. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$:

$$e^z = e^{z'} \Leftrightarrow (\text{Re}(z) = \text{Re}(z') \text{ et } \text{Im}(z) = \text{Im}(z') + 2\pi k)$$

Exercice 17

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : $e^z = -7$, $e^z = -2i$ et $e^z = 1 + i$

4 Transformations géométriques dans le plan complexe

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct à tout application

$$\begin{aligned} F : \mathcal{P} &\rightarrow \mathcal{P} \\ M &\mapsto M' = F(M) \end{aligned}$$

on associe sa représentation complexe $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

Si M d'affixe z , M' d'affixe z' , alors $M' = F(M) \Leftrightarrow f(z) = z'$

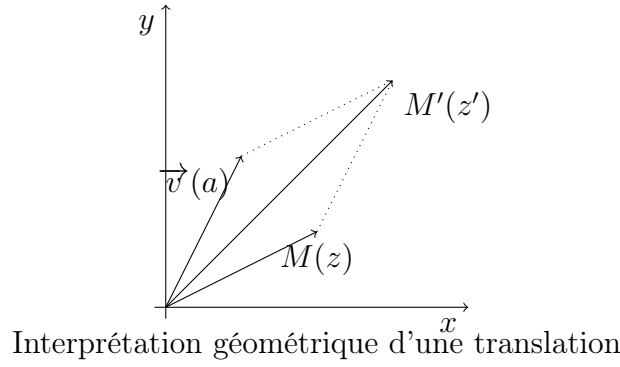
4.1 Translation

Définition 12. Soit $\vec{u}$ un vecteur. La translation de vecteur $\vec{u}$ est l'application

$$\begin{aligned} t_{\vec{u}} : \mathcal{P} &\rightarrow \mathcal{P} \\ M &\mapsto M' = F(M) \end{aligned}$$

telle que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$

Exemple 7. $z \mapsto z + 2$ désigne la translation de vecteur $\vec{u}(2)$



Proposition 16. Soit $\vec{u}$ un vecteur d'affixe b et $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$.

F est la translation de vecteur $\vec{u}$, si sa représentation complexe est $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto z + b$

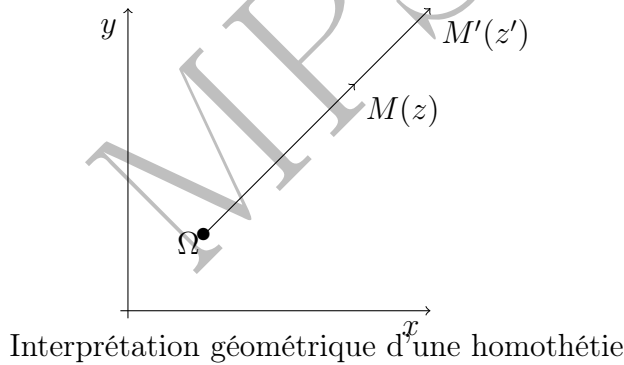
4.2 Homothétie

Définition 13. Soient $\Omega \in \mathcal{P}$ et $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. L'homothétie de centre Ω et de rapport k est l'application noté $h_{\Omega, k}$ qui à chaque point $M \in \mathcal{P}$ associe le point $M' \in \mathcal{P}$ vérifiant $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$, i.e

$$h_{\Omega, k} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$$

$$M \mapsto M', \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$$

Exemple 8. $z \mapsto 1 - 2(z - 1)$ désigne l'homothétie de rapport -2 et de centre $\Omega(1)$.



Proposition 17. Soient $\Omega \in \mathcal{P}$ un point d'affixe ω , $k \notin \{0, 1\}$ et $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$.

F est l'homothétie $h_{\Omega, k}$, si sa représentation complexe est $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto k(z - \omega) + \omega$

Remarque 10. Une homothétie $h_{\Omega, k}$ ($k \notin \{0, 1\}$) est une bijection. Sa bijection réciproque est $h_{\Omega, \frac{1}{k}}$

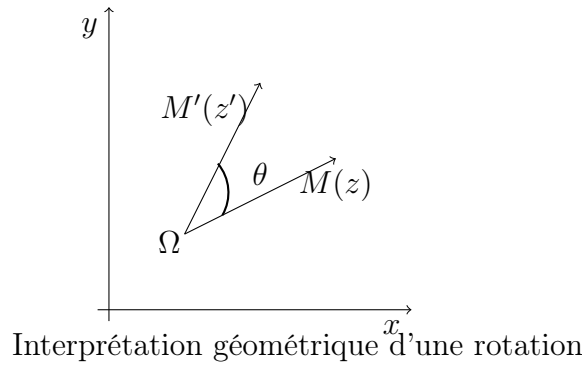
4.3 Rotation

Définition 14. Soient $\Omega \in \mathcal{P}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. La rotation de centre Ω et d'angle θ est l'application noté $R_{\Omega, \theta}$ $R_{\Omega, \theta} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, avec $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta[2\pi]$ et $\Omega M = \Omega M'$
 $M \mapsto M'$

Exemple 9.

1. $z \mapsto 1 + e^{i\frac{\pi}{8}}(z - 1)$ désigne la rotation d'angle $\frac{\pi}{8}$ et de centre $\Omega(1)$.

2. $z \mapsto 4 - 1(z - 4)$ désigne à la fois l'homothétie de rapport -1 et de centre $\Omega(4)$ et la rotation d'angle π et de centre $\Omega(4)$. Dans ce cas, on parle également de symétrie centrale de centre $\Omega(4)$.



Remarque 11. $R_{\Omega, \theta}$ est bijective, sa bijection réciproque est $R_{\Omega, -\theta}$

Proposition 18. Soient $\Omega \in \mathcal{P}$ un point d'affixe ω , $\theta \in \mathbb{R}$ et $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$.

F est la rotation $R_{\Omega, \theta}$, si et seulement si sa représentation complexe est $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$

4.4 Similitude direct

Définition 15. Une similitude direct est toute application $\mathcal{S} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ dont la représentation complexe est

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto az + b$$

où $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$

Exemple 10. Les translation, les homothéties et les rotations sont des similitude direct.

Proposition 19. Soit $\mathcal{S} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ une similitude directe et $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sa représentation complexe.
 $z \mapsto az + b$

- Si $a = 1$, alors $\mathcal{S}$ est la translation de vecteur $\vec{u}(b)$.
- Si $a \neq 1$ et $|a| = 1$ i.e $\exists \theta \in \mathbb{R}$, $a = e^{i\theta}$. Alors $\mathcal{S}$ admet un point fixe Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1 - a}$ et on a $\mathcal{S} = R_{\Omega, \theta}$.
- Si $|a| \neq 1$ et $\exists \theta \in \mathbb{R}$, $a = |a|e^{i\theta}$. Alors $\mathcal{S} = h_{\Omega, |a|} \circ R_{\Omega, \theta} = R_{\Omega, \theta} \circ h_{\Omega, |a|}$ avec Ω d'affixe $\omega = \frac{b}{1 - a}$.

Remarque 12. L'application $z \mapsto \bar{z}$ est la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses. Plus généralement, pour $\theta_0 \in [0, \pi]$, l'application $z \mapsto e^{2i\theta_0}\bar{z}$ correspond à la symétrie orthogonale d'axe la droite issue de O et faisant un angle θ_0 avec l'axe $(O, \vec{i})$.

4.5 Similitudes dans le Plan Complexe

Définition 16. Soit $\lambda > 0$. On appelle similitude (plane) de rapport λ toute application f du plan dans lui-même telle que pour tous points M, N on ait :

$$f(M)f(N) = \lambda MN.$$

Il existe deux types :

- **Similitudes directes** : conservent les angles orientés
- **Similitudes indirectes** : renversent les angles orientés

On identifie le point $M(x, y)$ avec son affixe $z = x + iy$.

Théorème 1. Une transformation f du plan est une similitude directe **si et seulement si** son écriture complexe est :

$$z' = az + b$$

où :

- $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$
- Rapport de similitude : $k = |a|$
- Angle de la similitude : $\theta = \arg(a)$

La décomposition d'une similitude directe :

$$z' = az + b \quad \text{avec} \quad a = ke^{i\theta}$$

1. **Rotation** d'angle $\theta = \arg(a)$ autour de l'origine
2. **Homothétie** de rapport $k = |a|$ de centre l'origine
3. **Translation** de vecteur d'affixe b

Cas particuliers :

Transformation	Écriture complexe	a	b
Translation	$z' = z + b$	$a = 1$	Vecteur translation
Rotation (centre Ω , angle θ)	$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$	$a = e^{i\theta}$	$b = \omega(1 - e^{i\theta})$
Homothétie (centre Ω , rapport k)	$z' = k(z - \omega) + \omega$	$a = k$	$b = \omega(1 - k)$
Similitude générale	$z' = ke^{i\theta}z + b$	$a = ke^{i\theta}$	Translation

Exemple 1. 1. Déterminer la nature géométrique des applications suivantes :

$$f_1(z) = 2z + 3 + 4i, \quad f_2(z) = e^{i\pi/3}z + 1, \quad f_3(z) = z + (2 - i).$$

Pour chacune :

- (a) Calculer $|a|$ et $\arg(a)$.
- (b) Déterminer si c'est une homothétie, une rotation, une translation ou une similitude générale.
- (c) Trouver le centre z_0 s'il existe.

2. Trouver a et b tels que $f(z) = az + b$ envoie :

$$M_1(0) \mapsto M'_1(2 + i), \quad M_2(1) \mapsto M'_2(3 + 2i).$$

Indication : résoudre le système $f(0) = b$ et $f(1) = a + b$.

3. On considère deux transformations $f(z) = az + b$ et $g(z) = cz + d$ avec $|a| = |c| \neq 1$.

- (a) Montrer que la composée $h = f \circ g$ est encore de la forme $h(z) = \alpha z + \beta$.
- (b) Déterminer α et β en fonction de a, b, c, d .
- (c) En déduire la nature géométrique de h .

4. **Démonstration :** Une application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est une similitude directe si et seulement si elle s'écrit $f(z) = az + b$ avec $a \neq 0$.

5 Annexe : CALCUL TRIGONOMETRIQUE

5.1 Formules de transformations

On rappelle que $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. En utilisant les formule d'Euler, répondre à ces myboxcices suivants:

(Transformations d'additions)

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ Montrer que :

1. $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$
2. $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$
3. $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$
4. $\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ Montrer que :

1. $\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1 = \cos(2x) = 1 - 2 \sin^2 x$
2. $\sin(2x) = 2 \sin x \cdot \cos x$
3. $\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$

$$4. \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Transformations sommes en produits

Soit $p, q \in \mathbb{R}$. Montrer que :

1. $\sin p + \sin q = 2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{p-q}{2} \right)$
2. $\sin p - \sin q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{p-q}{2} \right)$
3. $\cos p + \cos q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{p-q}{2} \right)$
4. $\cos p - \cos q = -2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{p-q}{2} \right)$

Transformations des produits en sommes

Soit $p, q \in \mathbb{R}$. Montrer que :

1. $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$
2. $\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x + y) - \cos(x - y)]$
3. $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$

5.2 Formules de la tangente

Soient x et y deux réels tels que : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ Montrer que :

1. Si $(x + y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, alors

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$$
2. Si $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, alors

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$
3. Si $(x - y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, alors

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$$

Les valeurs trigonométriques en fonction de : $t = \tan \left(\frac{x}{2} \right)$

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq \pi + 2k\pi$, on pose $t = \tan \left(\frac{x}{2} \right)$. Montrer que :

$$a) \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$b) \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$c) \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

5.3 LES ÉQUATIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Soit $k \in \mathbb{Z}$, alors

1. $\cos x = \cos x_0 \iff x = x_0 + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -x_0 + 2k\pi$
2. $\sin x = \sin x_0 \iff x = x_0 + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - x_0 + 2k\pi$
3. $\tan x = \tan x_0 \iff x = x_0 + k\pi$

5.4 L'équation : $a \cos x + b \sin x + c = 0$

Soient a et b deux réels non nuls. Pour tout réel x :

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right) \\ \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \varphi \cos x + \sin \varphi \sin x)$$

où l'angle φ est déterminé par : $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Donc

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi)$$

L'équation $a \cos x + b \sin x + c = 0$ se ramène à :

$$\cos(x - \varphi) = \frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

MPSI3