

Contents

3	Complements de calcul algébrique	2
1	Sommes et Produits	2
1.1	Sommes	2
1.2	Produits	6
2	Les coefficients binomiaux	7
3	Calcul de déterminants	10
3.1	Expression d'un déterminant 2x2	10
3.2	Expression d'un déterminant 3x3	10
4	Systèmes linéaires	11
4.1	Pivot de Gauss	12
4.2	Règles à respecter dans l'application de la méthode de GAUSS	13
4.3	Cas où il y a "trop" d'inconnues	13
4.4	Cas d'un système sans solution	14

Chapter 3

Complements de calcul algébrique

Si le cours de maths de CPGE insiste beaucoup sur la pratique du raisonnement mathématique, celui-ci ne peut se faire sans passer par des étapes de calcul algébrique. Il est donc impératif de maîtriser les techniques usuelles de calcul avec les fractions, les puissances, les factorisations et développements, les fonctions logarithme et exponentielle...

Pour compléter les techniques précédentes, nous allons apprendre dans ce chapitre :

- à maîtriser l'utilisation de la notation usuelle des ensembles,
- à maîtriser l'utilisation du symbole Σ pour la manipulation des sommes simples et doubles,
- quelques formules utilisées tout au long de l'année,
- à maîtriser les propriétés et l'utilisation des coefficients binomiaux,
- à maîtriser la technique de Gauss pour la résolution des systèmes linéaires.

1 Sommes et Produits

1.1 Sommes

Sommes simples

Définition 1. Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille finie de complexes (ou d'entiers, de rationnels ou de réels).
On notera :

$$\sum_{i \in I} a_i \quad \text{la somme des nombres } a_i$$

- Lorsque $I = \llbracket m, n \rrbracket$ avec $m \leq n \in \mathbb{Z}$, cette quantité sera notée : $\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$
- La variable ' i ' est dite muette.
Cela signifie qu'on peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre.
- ' i ' est aussi appelé l'indice courant.

Remarque 1. $\sum_{k=m}^n u_k$ est une somme de " $n - m + 1$ " termes!

Exemple 1. Pour $p, q \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{i=q}^p 3 = (p - q + 1)3$

Proposition 1. (Sommes classiques) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{C}$.

$$1. \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2. \sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$3. \sum_{i=0}^n a^i = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \quad (\text{si } a \neq 1)$$

$$4. \sum_{i=0}^n a^i = n+1 \quad (\text{si } a = 1)$$

Preuve 1. Facile par récurrence!

Proposition 2. (Linéarité de la somme)

Soit I un ensemble fini non vide, $(a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}$ deux familles de nombres complexes et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. On a alors :

$$\sum_{i \in I} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i \in I} a_i + \mu \sum_{i \in I} b_i$$

Preuve 2. Il suffit de l'écrire...

Remarque 2. On ne peut mettre en facteur de la somme que les coefficients qui ne dépendent pas de l'indice courant.

Exemple 2. Calculer : $S = \sum_{k=2}^{10} (2 + 3k - 5k^2)$

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme : $S_n = n + 2(n-1) + 3(n-2) + \cdots + (n-1)2 + n$.

Définition 2. (Sommes télescopiques) Une somme télescopique est une somme de la forme :

$$\sum_{k=m}^n (a_{k+1} - a_k) \quad \text{ou} \quad \sum_{k=m}^n (a_k - a_{k+1}).$$

Ces sommes se simplifient facilement : $\sum_{k=m}^n a_{k+1} - a_k = a_{n+1} - a_m$

Exemple 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$1. S_1 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

$$2. S_2 = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$$

$$3. S_3 = \sum_{k=0}^n k \times k !$$

Proposition 3. (Chasles) Lorsque $p \leq q < n \in \mathbb{N}$, nous avons la propriété suivante :

$$\sum_{k=p}^n a_k = \sum_{k=p}^q a_k + \sum_{k=q+1}^n a_k$$

Preuve 3. A titre d'exercice

Exemple 4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes suivantes :

$$1. S_1 = \sum_{k=1}^{2n} \min(k, n)$$

$$2. S_2 = \sum_{k=1}^{2n} \max(k, n)$$

Remarque 3. Il est aussi possible de regrouper les termes d'indices pairs et les termes d'indices impairs :

$$\sum_{k=p}^n a_k = \sum_{k=p \text{ (pairs)}}^n a_k + \sum_{k=p \text{ (impairs)}}^n a_k$$

Exemple 5. Calculer $S = \sum_{k=1}^{100} \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$ où $\lfloor x \rfloor$ représente la partie entière d'un réel x .

Proposition 4. (Décalage d'indices) Soit $p, q \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$ et $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de nombres complexes.

On a alors :

$$\sum_{i=p}^q a_i = \sum_{i=p+n}^{q+n} a_{i-n}$$

Preuve 4. Il suffit de l'écrire... en posant éventuellement $j = i + n$.

Exemple 6. Calculer les sommes suivantes à l'aide de changements d'indice et d'une décomposition en éléments simples pour S_1 et S_2 :

$$1. S_1 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \quad 2. S_2 = \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)(k+2)} \quad 3. S_3 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right)$$

Remarque 4. On ne peut faire que des décalages d'indice ou éventuellement des "inversions" d'indice ($i = n - j$). Impossible par contre de poser $j = 2i$ ou $j = \frac{i}{3}$.

Proposition 5. (Formule de factorisation) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{C}$.

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{(n-1)-k} b^k \quad \text{ou} \quad a^n - b^n = (a - b) (a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Que donne cette formule lorsque $b = 1$?

Preuve 5. Il suffit de développer en effectuant un changement d'indice.

Exemple 7. Factoriser $a^5 + b^5$ lorsque $a, b \in \mathbb{C}$.

Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, prouver que $N = 5^{n+1} - 3^{n+1}$ n'est pas un nombre premier.

Sommes doubles

Définition 3. (Sommes doubles rectangulaires) Soit I et J des ensembles finis et $(a_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille finie de nombres complexes. On remarque que l'on peut noter :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} a_{i,j} \right) \quad \text{qui est aussi égale à} \quad = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} a_{i,j} \right)$$

Dans le cas où $I = \llbracket p, n \rrbracket$ et $J = \llbracket q, m \rrbracket$, on peut aussi noter :

$$\sum_{(i,j) \in \llbracket p, n \rrbracket \times \llbracket q, m \rrbracket} a_{i,j} = \sum_{i=p}^n \left(\sum_{j=q}^m a_{i,j} \right) \quad (\text{par ligne}) = \sum_{j=q}^m \left(\sum_{i=p}^n a_{i,j} \right) \quad (\text{par colonne})$$

Remarque 5. Lorsque $I = J = \llbracket p, q \rrbracket$, la somme rectangulaire est souvent notée : $\sum_{p \leq i, j \leq q} a_{i,j}$

Exemple 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$1. S_1 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} ij \quad \left| \quad 2. S_2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2 \quad \right| \quad 3. S_3 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \min(i, j)$$

Proposition 6. (Produit de deux sommes rectangulaires finies) Soit I et J deux ensembles finis non vides et $(a_i)_{i \in I}, (b_j)_{j \in J}$ deux familles de nombres complexes. On a alors :

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right)$$

Preuve 6. A titre d'exercice.

Remarque 6. En général on a : $\sum_{i \in I} a_i \sum_{i \in I} b_i \neq \sum_{i \in I} a_i b_i$. Donner un contre-exemple ?

Exemple 9. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $(a_i)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket}, (b_i)_{i \in \llbracket 1, q \rrbracket}$ deux familles finies de complexes. Exprimer sous la forme d'une somme, le produit des deux expressions polynômiales suivantes :

$$\begin{cases} A(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p \\ B(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_q x^q \end{cases}$$

Proposition 7. (Sommes triangulaires) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket p, q \rrbracket^2}$ une famille de nombres complexes. On distingue 2 types de sommes triangulaires :

$$1. \text{ En incluant la diagonale : } \sum_{p \leq j \leq i \leq q} a_{i,j} = \sum_{i=p}^q \left(\sum_{j=p}^i a_{i,j} \right) \text{ (par ligne)} = \sum_{j=p}^q \left(\sum_{i=j}^q a_{i,j} \right) \text{ (par colonne).}$$

$$2. \text{ En excluant la diagonale : } \sum_{p \leq j < i \leq q} a_{i,j} = \sum_{i=p+1}^q \left(\sum_{j=p}^{i-1} a_{i,j} \right) \text{ (par ligne)} = \sum_{j=p}^{q-1} \left(\sum_{i=j+1}^q a_{i,j} \right) \text{ (par colonne)}$$

Tableau des termes généraux d'une somme triangulaire

$i \backslash j$	p	$p+1$	$\dots$	i	$\dots$	q
p	$a_{p,p}$					
$p+1$	$a_{p+1,p}$	$a_{p+1,p+1}$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$			
i	$a_{i,p}$	$\dots$	$\dots$	$a_{i,i}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
q	$a_{q,p}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$a_{q,q}$

Preuve 7. Dans un cas, on additionne par colonne et dans l'autre cas par ligne.

Exemple 10. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$1. S_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij. \quad \left| \quad 2. S_n = \sum_{k=1}^n k 2^k \quad \right| \quad 3. S_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$$

Exercice 3

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $C_n = \sum_{1 \leq p < q \leq n} (p+q)$.

1. Prouver par un calcul direct que : $C_n = \frac{1}{2}(n-1)n(n+1)$.

2. Retrouver le résultat précédent en remarquant que : $\sum_{1 \leq p, q \leq n} (p + q) = 2C_n + 2 \sum_{p=1}^n p$.

1.2 Produits

Définition 4. (Produit) Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille finie de nombres complexes (ces nombres peuvent aussi être entiers, rationnels ou réels). On notera :

$$\prod_{i \in I} a_i \text{ le produit des nombres } a_i \text{ de la famille } (a_i)_{i \in I}$$

Lorsque $I = \llbracket m, n \rrbracket$ avec $m \leq n \in \mathbb{Z}$, cette quantité sera notée : $\prod_{i=m}^n a_i = a_m \times a_{m+1} \times \cdots \times a_n$

Ce produit comporte $n - m + 1$ facteurs.

Exemple 11. Pour $p, q, n \in \mathbb{N}^*$: avec $n \geq 4$, calculer :

$$1. \prod_{i=q}^p 2 \quad \left| \quad 2. \prod_{k=-1000}^{1000} k \ln(1 + |k|) \quad \right| \quad 3. \prod_{k=4}^n \left(1 - \frac{1}{4}\right).$$

Remarque 7. Un produit est nul dès lors qu'un de ses facteurs est nul.

Définition 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note "factorielle n " la quantité suivante :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times n = \prod_{k=1}^n k \text{ et on admettra que } 0! = 1$$

Exemple 12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Ecrire les produits suivants à l'aide de factorielles :

$$1. P_1 = \prod_{k=1}^p (n - k + 1) \quad \left| \quad 2. P_2 = \prod_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} k \quad \right| \quad 3. P_3 = \prod_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} k$$

Définition 6. (Produits télescopiques) Un produit télescopique est un produit de la forme : $\prod_{k=m}^n \frac{a_{k+1}}{a_k}$.

Ces sommes se simplifient facilement : $\prod_{k=m}^n \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_m}$

Exemple 13. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer les produits suivantes :

$$1. \prod_{i=1}^n \frac{i}{i+1} \quad \left| \quad 2. \prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k-1} \quad \right| \quad 3. P_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

Proposition 8. Soient $m, n \in \mathbb{Z}$. Si tous les a_k sont strictement positifs et $m \leq n$ alors :

$$\ln \left(\prod_{k=m}^n a_k \right) = \sum_{k=m}^n \ln(a_k)$$

Exemple 14. Calculer : $\prod_{k=1}^n 2^{\frac{1}{k(k+1)}}$

Proposition 9. (Règles de calcul) Lorsque tous les a_k et les b_k sont des complexes, $n \in \mathbb{N}$ et I un ensemble fini non nul : $\prod_{k \in I} a_k b_k = \left(\prod_{k \in I} a_k \right) \left(\prod_{k \in I} b_k \right)$ et $\prod_{k \in I} a_k^n = \left(\prod_{k \in I} a_k \right)^n$

Preuve 8. Il suffit de l'écrire.

Remarque 8. Contrairement au cas des sommes, on a : $\prod_{k=m}^n \lambda a_k = \lambda^{n-m+1} \prod_{k=m}^n a_k$

2 Les coefficients binomiaux

Définition 7. (Coefficients binomiaux) Soient $n, p \in \mathbb{N}$.

Le "coefficient binomial (n, p) " ou " p parmi n " est noté $\binom{n}{p}$.

Il est défini par :

1. Lorsque $p \leq n$: $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
2. Lorsque $p > n$: $\binom{n}{p} = 0$

Remarque 9. $\binom{n}{p}$ représente le nombre de façons de choisir p éléments parmi n sans ordre ni remise. Il s'agit donc en particulier d'un entier naturel (cf la démonstration utilisant la formule d'additivité).

Théorème 1. (Propriétés des coefficients binomiaux) Soient $0 \leq p \leq n$ deux entiers. Les coefficients binomiaux vérifient les propriétés suivantes :

• Premiers termes :

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
2. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
3. $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$

— Symétrie : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

• Evolution : $\left(\binom{n}{k} \right)_{k \in [1, n]}$ est $\begin{cases} \text{strict}^t \text{ croissante jusqu'à } k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ \text{strict}^t \text{ décroissante de } k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \text{ à } k = n \end{cases}$

Preuve 9. Simples calculs ...

Pour l'évolution, on s'intéresse au rapport $\binom{n}{k} / \binom{n}{k-1}$ dans les cas où n est pair et où n est impair.

Proposition 10. (Formules) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$:

$$1. \binom{n}{p} = \binom{n}{p-1} \binom{n-1}{p-1} \text{ si } (p \geq 1)$$

$$2. \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Preuve 10. *Simple calculs ...*

Exemple 15. *Montrer que : $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$*

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

A l'aide de la formule d'additivité, trouver une suite (a_n) telle que $\binom{k}{p} = a_{k+1} - a_k$.

En déduire la formule de Pascal :

$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

Interpréter cette formule en utilisant le triangle de Pascal.

2. En déduire la somme des n premiers entiers.

3. En recherchant a et b tels que $k^2 = a \binom{k}{2} + b \binom{k}{1}$, déterminer la somme des carrés des n premiers entiers.

Théorème 2. (Formule du binôme de Newton) Soient deux réels $a, b \in \mathbb{R}$ et un entier $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Preuve 11. 1. *Méthode 1 : Par récurrence (Bon entraînement au calcul sur des sommes).*

2. *Méthode 2 : Par dénombrement (Facile).*

Théorème 3. (Nombre de parties d'un ensemble) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est donné par la formule : $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$

C'est à dire $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$ avec $\text{Card}(E) = n$

Preuve 12. *Application simple de la formule du binôme.*

Exemple 16. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer : $S_1 = \sum_{p=0}^n p \binom{n}{p} = n \cdot 2^{n-1}$ et $S_2 = \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k} \binom{n}{k}$

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=0}^n k^3$ en utilisant la quantité $u_k = (k+1)^4 - k^4$. En déduire une méthode

générale pour déterminer $\sum_{k=0}^n k^p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6

Calculer les sommes :

$$1. S_1 = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$$

$$2. S_2 = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} \quad (\text{Ind: } S_1 + S_2; S_1 - S_2)$$

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$1. \sum_{0 \leq k, p \leq n} \binom{n}{p} \binom{n}{k}$$

$$2. \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^p i \binom{n}{j} (\sqrt{2})^j$$

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\sum_{A \subset \llbracket 1, n \rrbracket} \left(\sum_{i \in A} i \right) = 2^{n-2} n(n+1)$

3 Calcul de déterminants

3.1 Expression d'un déterminant 2x2

Proposition 11. Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$ est : $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x \cdot y' - y \cdot x'$

Exemple 17. Vérifiez que : $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 13$

3.2 Expression d'un déterminant 3x3

Proposition 12. Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix}$ est :

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - zy'x'' - xz'y'' - yx'z''$$

Exemple 18. Prouver que :

$$1. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -18 \quad \quad 2. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \quad \quad 3. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Applications usuelles du déterminant : Le déterminant sert en particulier :

1. A vérifier si une matrice est inversible et éventuellement, à calculer l'inverse de cette matrice

2. A vérifier si un système linéaire carré admet une unique solution
3. A vérifier si n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n sont linéairement indépendants
 - colinéaires en dimension 2
 - coplanaires en dimension 3

Exemple 19. Pour quelle(s) valeur(s) de λ le système suivant admet une unique solution?

$$\begin{cases} x - \lambda z = 0 \\ y + \lambda z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

Remarque 10. Nous verrons en cours d'année comment calculer des déterminants de taille supérieure.

4 Systèmes linéaires

On considère le système linéaire de n équations à p inconnues :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

On appelle alors

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K}), \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K}) \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K}).$$

Ainsi, on pourra plus simplement noter le système $(S) : AX = B$ (cf le cours sur la multiplication des matrices).

Définition 8. (Vocabulaire lié aux systèmes)

1. Résoudre (S) consiste à trouver l'ensemble $\mathbb{S}$ de tous les p -uplets $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant (S) .
2. Le vecteur $B \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$ s'appelle le vecteur second membre du système.
3. Le vecteur $X \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$ s'appelle le vecteur inconnu du système.
4. On appelle système homogène (S_0) associé à (S) , le système obtenu en prenant $B = 0$.

On note $\mathbb{S}_0$ l'ensemble des solutions du système homogène.

5. La matrice A s'appelle la matrice du système.
6. Le déterminant de A s'appelle le déterminant du système.
7. On dit que le système est compatible si l'ensemble des solutions est non-vidé.

Remarque 11. 1. Dans $\mathbb{R}^2$:

les solutions du système $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ sont les points d'intersection des deux droites

$$\begin{cases} \mathcal{D}_1 : ax + by = c \\ \mathcal{D}_2 : dx + ey = f \end{cases}$$

2. Dans $\mathbb{R}^3$:

les solutions du système $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ ex + fy + gz = h \end{cases}$ sont les points d'intersection des deux plans

$$\begin{cases} \mathcal{P}_1 : ax + by + cz = d \\ \mathcal{P}_2 : ex + fy + gz = h \end{cases}$$

Que pouvez-vous dire des différents ensembles de solutions possibles?

Proposition 13. (Structure de l'ensemble des solutions) Soit $AX = B$ un système compatible de solution particulière X_0 .

L'ensemble des solutions est alors :

$$\mathcal{S} = X_0 + \mathcal{S}_0 = \{X_0 + X \mid X \text{ est solution du système homogène associé}\}$$

Preuve 13. Par équivalences successives en admettant la factorisation des matrices.

Remarque 12. Nous venons en fin d'année que cet ensemble a une structure de sous-espace affine.

Proposition 14. (Unicité de la solution) Un système carré $AX = B$ admet une unique solution ssi $\det A \neq 0$.

Preuve 14. Admis pour l'instant.

Remarque 13. 1. Un système carré qui n'admet qu'une solution est appelé un système de Cramer.

2. Ce théorème est très souvent utilisé lorsqu'on veut prouver l'existence d'une unique solution sans avoir besoin de la chercher.

Remarque 14. Lorsqu'un système n'admet qu'une unique solution $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, l'ensemble des solutions s'écrit de la façon suivante :

$$\mathcal{S} = \{(a_1, a_2, \dots, a_n)\}$$

4.1 Pivot de Gauss

Un système linéaire se résout à l'aide de la méthode du "Pivot de Gauss".

Définition 9. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{C}^*$.

On appelle "opération élémentaire sur les lignes" d'un système l'une des 3 opérations suivantes :

1. Echanger deux lignes: $L_i \leftrightarrow L_j$
2. Remplacer une ligne L_i par $\lambda \cdot L_i$ $L_i \leftarrow \lambda \cdot L_i$
3. Remplacer une ligne L_i par $L_i + \lambda \cdot L_j$ $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

Théorème 4. (Théorème fondamentale) On ne change pas l'ensemble des solutions d'un système en effectuant une opération élémentaire sur les lignes

Preuve 15. 1. Les solutions d'un système sont indépendantes de l'ordre des équations.

2. X vérifie $L_i \iff X$ vérifie $\lambda \cdot L_i$.
3. X vérifie L_i et $L_j \iff X$ vérifie $L_i + \lambda \cdot L_j$ et L_j .

Remarque 15. 1. Pour effectuer sans se tromper les opérations précédentes, on veillera à ordonner les inconnues et à les placer les unes au dessous des autres.

2. On utilisera le théorème précédent pour transformer le système $AX = B$ en un système simple à résoudre. Le plus souvent, on transformera (S) en un système triangulaire. Cette technique s'appelle la méthode de GAUSS.

4.2 Règles à respecter dans l'application de la méthode de GAUSS

1. Ordonner et aligner les inconnues
2. Si possible, choisir pour première équation celle dont le coefficient de la première inconnue est "1"
3. Utiliser l'inconnue de la première équation pour éliminer cette inconnue dans les autres équations à l'aide des OEL
4. Ré-appliquer la technique précédente au sous-système obtenu et ainsi de suite...
5. Une fois le système triangularisé, déterminer les valeurs des inconnues en partant de la dernière.

Exemple 20. Résoudre le système suivant : (S)
$$\begin{cases} -2x + y + z - t &= 1 \\ z - 2y + x &= 0 \\ x - 2z + t &= -1 \\ y + 2t - z &= 1 \end{cases}$$

Remarque 16. Dans le cas d'un système de cramer, on aboutit à un système triangulaire à coefficients diagonaux non nuls de la forme :

$$(S) \left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ 0 & 0 & a'_{33} & \cdots & & b'_3 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a'_{nn} & b'_n \end{array} \right)$$

4.3 Cas où il y a "trop" d'inconnues

Si, après avoir triangularisé le système, le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations, on trouve les solutions du système en attribuant aux inconnues supplémentaires le statut de paramètre.

On recherche alors les autres inconnues en fonction de ces paramètres.

Exemple 21. Résoudre les systèmes suivants :

$$1. (S1) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = m \\ x + y + mz + t = m + 1 \end{cases}$$

Remarque 17. Ensemble des solutions:

Lorsque le système admet une infinité de solutions (dépendant par exemple de deux paramètres λ et μ), on pourra écrire son ensemble de solutions sous la forme :

$$\mathcal{S} = \{(f_1(\lambda, \mu), f_2(\lambda, \mu), \dots, f_n(\lambda, \mu)) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

4.4 Cas d'un système sans solution

Dans certains cas, la triangularisation aboutit à une équation impossible.

Dans ce cas le système n'admet pas de solutions.

Exemple 22. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - z &= -4 \\ 2x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= 4 \\ 2x - 2y + 7z &= 3 \end{cases}$$

Remarque 18. Ensemble des solutions:

Lorsque le système n'admet pas de solution, l'ensemble des solutions s'écrit :

$$S = \emptyset$$

Remarque 19. Un système peut aussi se résoudre "par substitution".

Cependant, cette méthode n'est employée en pratique que pour des systèmes très simples ou très petits.

Exercice 9

Résoudre les systèmes suivants :

$$S_1 \begin{cases} x + z &= 2 \\ x + 3y - 2z &= 0 \\ x + y - z &= 1 \end{cases} \quad S_2 \begin{cases} y - z &= 1 \\ x + y + z &= 0 \\ x + 2y &= -1 \end{cases}$$

$$S_3 \begin{cases} x + z &= 1 \\ x - y + z &= 3 \end{cases} \quad S_4 \begin{cases} -x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= 0 \\ x + y - z &= 2 \end{cases}$$

Exercice 10

Résoudre les systèmes suivants en discutant selon les valeurs des paramètres réels a, b, c :

$$S_1 \begin{cases} x + y + z = a \\ x + y - 2z = b \\ x + y - 3z = c \end{cases} \quad S_2 \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 0 \\ x + y + az = -1 \end{cases} \quad S_3 \begin{cases} x + ay + a^2z = 1 \\ x + by + b^2z = 0 \\ x + cy + c^2z = 1 \end{cases} \quad S_4 \begin{cases} -x + y + z = 1 \\ x - y + z = b \\ x + y - z = b^2 \end{cases}$$

Exercice 11

- Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite de l'espace d'équations cartésiennes : $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$
- Soit $m \in \mathbb{R}$. Dans l'espace muni d'un repère :
Déterminer l'intersection de la droite : $D : \begin{cases} mx + 2y + 3z = 3 \\ (m-1)x + my + z = 1 \end{cases}$ et du plan $P : (m+1)x + my + (m-1)z = m-1$