

Contents

4	Nombres réels	2
1	Propriété du corps des nombres réels $\mathbb{R}$	2
1.1	Introduction : Pourquoi les nombres réels ?	2
1.2	Propriétés de l'ensemble $\mathbb{Q}$	3
1.3	Insuffisance de l'ensemble $\mathbb{Q}$	3
1.4	Propriétés algébriques de $\mathbb{R}$	4
1.5	Valeur absolue et inégalité triangulaire	5
1.6	Borne supérieure, borne inférieure	5
1.7	Propriété d'Archimède et partie entière	7
1.8	Approximation décimale d'un réel	7
2	Les intervalles de $\mathbb{R}$	7
3	Parties denses dans $\mathbb{R}$	9
4	Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$	10

Chapter 4

Nombres réels

1 Propriété du corps des nombres réels $\mathbb{R}$

1.1 Introduction : Pourquoi les nombres réels ?

Au cours de votre parcours mathématique, vous avez successivement découvert différents ensembles de nombres :

- $\mathbb{N}$: les nombres naturels (0, 1, 2, 3...)
- $\mathbb{Z}$: les nombres entiers relatifs (... -2, -1, 0, 1, 2...)
- $\mathbb{Q}$: les nombres rationnels (fractions $\frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$)

Mais ces ensembles sont-ils suffisants pour répondre à tous les problèmes mathématiques ?

Un problème historique fondamental :

Dès l'Antiquité, les mathématiciens grecs ont découvert qu'il existe des longueurs qui ne peuvent pas s'exprimer comme des fractions. Par exemple, la diagonale d'un carré de côté 1 vaut $\sqrt{2}$, et on peut démontrer que ce nombre n'est pas rationnel.

Des limitations importantes de $\mathbb{Q}$:

1. **Incomplétude** : Il existe des suites de nombres rationnels qui convergent vers des nombres qui ne sont pas rationnels.
2. **"Trous" dans la droite numérique** : Si on place tous les rationnels sur une droite, il reste des "trous" (comme $\sqrt{2}$, π , e ...).
3. **Limites en analyse** : De nombreux concepts fondamentaux en analyse (limites, continuité, dérivées, intégrales) nécessitent un ensemble complet de nombres.

La solution : $\mathbb{R}$

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ comble ces lacunes en remplissant complètement la droite numérique. Dans ce chapitre, nous allons :

- Caractériser précisément l'ensemble $\mathbb{R}$
- Étudier ses propriétés fondamentales
- Comprendre la notion de densité
- Maîtriser les outils de l'analyse réelle

Ce chapitre constitue le fondement de toute l'analyse mathématique que vous étudierez en classes préparatoires et au-delà.

1.2 Propriétés de l'ensemble $\mathbb{Q}$

Propriétés et définitions : Soient $p, q, r \in \mathbb{Q}$.

a) Propriétés de la somme sur $\mathbb{Q}$

1. $p + q \in \mathbb{Q}$.
2. Il existe $0 \in \mathbb{Q}$ tel que $p + 0 = p$.
3. $p + q = q + p$.
4. $(p + q) + r = p + (q + r)$.
5. $\forall p \in \mathbb{Q}$, il existe $-p \in \mathbb{Q}$ tel que $p + (-p) = 0$.

b) Propriétés du produit sur $\mathbb{Q}$

1. $p \times q \in \mathbb{Q}$.
2. Il existe $1 \in \mathbb{Q}$ tel que $1 \times p = p$.
3. $p \times q = q \times p$.
4. $(p \times q) \times r = p \times (q \times r)$.
5. $\forall p \in \mathbb{Q}^*$, il existe $\frac{1}{p} \in \mathbb{Q}$ tel que $p \times \frac{1}{p} = 1$.

Dans ce cas, $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un **corps commutatif**.

Propriété 1. $(\mathbb{Q}, \leq)$ est totalement ordonné.

1.3 Insuffisance de l'ensemble $\mathbb{Q}$

Exemple 1. Résoudre l'équation $x^2 - 2 = 0$ dans $\mathbb{Q}$.

Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{Q}$ vérifiant l'équation. Alors il existe $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{a}{b}$ avec $\gcd(a, b) = 1$.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 2b^2.$$

Ainsi a^2 est pair, donc a est pair. On peut écrire $a = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$$(2k)^2 = 2b^2 \quad \Rightarrow \quad 4k^2 = 2b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 2k^2.$$

Donc b est pair, ce qui contredit $\gcd(a, b) = 1$.

Ainsi, l'équation $x^2 - 2 = 0$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Q}$.

Théorème fondamental 1. Il existe un corps commutatif noté $\mathbb{R}$ tel que $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$.

1.4 Propriétés algébriques de $\mathbb{R}$

Proposition 1. $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif

L'addition dans $\mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes :

1. Elle est associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x + y) + z = x + (y + z)$
2. Elle possède un élément neutre 0 : $\forall x \in \mathbb{R}, x + 0 = 0 + x = x$
3. Chaque réel possède un opposé : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y = y + x = 0$. Le nombre y opposé à x est noté $-x$
4. Elle est commutative : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x + y = y + x$

Pour résumer ces 4 propriétés, on dit que $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif.

Proposition 2. $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe commutatif

La multiplication dans $\mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes :

1. Elle est associative : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^*, (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$
2. Elle possède un élément neutre 1 : $\forall x \in \mathbb{R}^*, x \times 1 = 1 \times x = x$
3. Chaque réel possède un inverse : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}^* : x \times y = y \times x = 1$. Le nombre y , inverse de x est noté x^{-1} ou encore $1/x$
4. Elle est commutative : $\forall x, y \in \mathbb{R}^*, x \times y = y \times x$

Pour résumer ces quatre propriétés, on dit que $(\mathbb{R}^*, \times)$ est un groupe commutatif.

Proposition 3. $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps

La multiplication dans $\mathbb{R}$ est distributive relativement à l'addition :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \times (y + z) = x \times y + x \times z$$

Pour résumer toutes ces propriétés, on dit que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps.

Dans la suite, nous noterons xy à la place de $x \times y$. Considérons sur $\mathbb{R}$ la relation d'ordre usuelle $\leq$.

Proposition 4. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un corps totalement ordonné.

1. La relation d'ordre $\leq$ est totale : $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \leq y$ ou $y \leq x$
2. La relation d'ordre $\leq$ est compatible avec l'addition : $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \leq y \implies x + z \leq y + z$
3. La relation d'ordre $\leq$ est compatible avec la multiplication : $\forall x, y \in \mathbb{R}, (0 \leq x \text{ et } 0 \leq y) \implies 0 \leq xy$

Pour résumer toutes ces propriétés, on dit que $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ est un corps totalement ordonné.

Remarque 1. $(\mathbb{Q}, +, \times, \leq)$ est aussi un corps totalement ordonné.

Exercice 1

Encadrer

$x + y, x - y, xy$ et x/y sachant que $x \in [3, 6]$ et $y \in [-4, -2]$.

Exercice 2

Soit a, b, c trois nombres réels.

1. Démontrer que $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$.
2. Démontrer que $ab + bc + ac \leq a^2 + b^2 + c^2$.
3. Démontrer que $3ab + 3bc + 3ac \leq (a + b + c)^2$.

1.5 Valeur absolue et inégalité triangulaire

Définition 1. La valeur absolue d'un réel x est:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Proposition 5. Soit $x, y \in \mathbb{R}$

Soient $x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$.

- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $0 \leq x$ 2. $x + y \leq x + y$ 3. $x - y \leq x + y$ 4. $x - y \leq x - y$ | <ol style="list-style-type: none"> 5. $x \geq 0$ et $x = 0 \iff x = 0$. 6. $xy = x \cdot y$. 7. $x^n = x ^n$. 8. $\left \frac{x}{y}\right = \frac{ x }{ y }$ si $y \neq 0$. |
|--|---|

Preuve 1. exercice

Proposition 6. Soit $x, y \in \mathbb{R}$

$$\bullet \max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} \quad \bullet \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$$

Preuve 2. Voir Td logique

Exercice 3

Soient x et y des réels. Démontrer les inégalités suivantes :

1. $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$
2. $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$
3. $\frac{|x + y|}{1 + |x + y|} \leq \frac{|x|}{1 + |x|} + \frac{|y|}{1 + |y|}$

1.6 Borne supérieure, borne inférieure

Définition 2. Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre total notée $\leq$, et soit A une partie **non vide** de E .

- Un élément α de E est appelé une **borne supérieure** de A si α est un majorant de A et si c'est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A . Et on le note $\sup A$
- Un élément β de E sera appelé une **borne inférieure** de A si β est un minorant de A et si c'est le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A . Et on le note $\inf A$

Remarque 2. Si A possède une borne supérieure (resp. inférieure), alors elle est unique.

Exercice 4

Soit $A = \{x \in \mathbb{Q}, x^2 \leq 2\}$ une partie de l'ensemble totalement ordonné $(\mathbb{Q}, \leq)$. Montrer que A n'admet pas de borne supérieure.

Théorème 1 (admis). 1. Toute partie non vide de $\mathbb{R}$ et majorée admet une borne supérieure.

2. Toute partie non vide de $\mathbb{R}$ et minorée admet une borne inférieure.

Proposition 7 (caractérisation de la borne supérieure).

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, et $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \alpha = \sup(A) &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \leq \alpha \text{ « } \alpha \text{ est un majorant »} \\ \forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in A; \alpha - \epsilon < x_\epsilon \leq \alpha \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \leq \alpha \text{ « } \alpha \text{ est un majorant »} \\ \forall b < \alpha, \exists x_b \in A, b < x_b \leq \alpha \text{ «pour tout } b < \alpha, b \text{ n'est pas majorant de } A\text{»} \end{cases} \end{aligned}$$

Preuve 3. Exercice

Exemple 2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Vérifions la caractérisation de la borne sup et la déterminer dans les cas suivants.

a) $A =]-\infty, a]$

b) $A = \{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$

c) $A =]-\infty, a[$

d) $A =]-\infty, 1[\cup \{3\}$.

Proposition 8. Toute partie de $\mathbb{R}$, non vide et minorée admet une borne inférieure

Preuve 4. Exercice

Proposition 9 (caractérisation de la borne inférieure).

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée, et $\beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \beta = \inf(A) &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, \beta \leq x \text{ « } \beta \text{ est un minorant »} \\ \forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon \in A; \beta \leq x_\epsilon < \beta + \epsilon \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, \beta \leq x \text{ « } \beta \text{ est un minorant »} \\ \forall \beta < a, \exists x_a \in A, \beta \leq x_a < a \text{ «pour tout } \beta < a, a \text{ n'est pas minorant de } A\text{»} \end{cases} \end{aligned}$$

Preuve 5. Exercice

Exemple 3. Soit $a \in \mathbb{R}$. Vérifions la caractérisation de la borne inf et la déterminer dans les cas suivants.

a) $A = [a, +\infty[$

b) $A = \{1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$

c) $A =]a, +\infty[$

d) $A =]2, +\infty[\cup \{-3\}$.

“latex

Proposition 10 (Caractérisation de la borne supérieure/inférieure par les suites). Soient A une partie non vide de $\mathbb{R}$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 1. \text{ Si } A \text{ est majorée, alors } \alpha = \sup(A) &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, x \leq \alpha \\ \exists (x)_n \in A^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \alpha \end{cases} \\ 2. \text{ Si } A \text{ est minorée, alors } \beta = \inf(A) &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A, \beta \leq x \\ \exists (x)_n \in A^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \beta \end{cases} \end{aligned}$$

Preuve 6. Exercice

Exercice 5

1. Soit $E = \{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}/n, m \in \mathbb{N}^*\}$
 - (a) Montrer que E admet une borne supérieure et une borne inférieure.
 - (b) Déterminer $\sup(E)$ et $\inf(E)$
2. Soit $F = \{\sin(n) + \frac{1}{n} : 1 \leq n\}$. Montrer que F admet une borne inférieure et déterminer $\beta = \inf(F)$

1.7 Propriété d'Archimède et partie entière

Lemme 1. Toute partie de $\mathbb{Z}$, non vide et majorée (resp. minorée) admet un plus grand élément (resp. un plus petit élément)

Proposition 11 (Propriété d'Archimède).

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que : $x < n\epsilon$

Preuve 7. Exercice

Proposition 12. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$

Preuve 8. Exercice

Définition 3. Soit x un réel. Il existe un entier $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$, appelé **la partie entière** de x , qui est caractérisé par

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Le réel $x - \lfloor x \rfloor$ est dit **partie fractionnaire** de x .

Exercice 6

Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{Z}$. Montrer que

1. Si $x \leq y$ alors $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$
2. $\lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$
3. $\lfloor x + y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor \in \{0, 1\}$

1.8 Approximation décimale d'un réel

Proposition 13 (Valeur décimale approchée). Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists p_n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } : \frac{p_n}{10^n} \leq x < \frac{p_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}$$

- $\frac{p_n}{10^n}$ s'appelle **valeur décimale approchée par défaut** à la précision 10^{-n} .
- $\frac{p_n}{10^n} + \frac{1}{10^n}$ s'appelle **valeur décimale approchée par excès** à la précision 10^{-n} .

Remarque 3. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $0 \leq x - \frac{p_n}{10^n} < \frac{1}{10^n}$.

Exemple 4. • 3.14159 est une valeur décimale approchée par défaut de π à la précision 10^{-5}

- 3.14160 est une valeur décimale approchée par excès de π à la précision 10^{-5}

2 Les intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 4. Soient a et b deux réels vérifiant $a \leq b$. On pose

- | | |
|--|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ • $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ • $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ • $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ • $] - \infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ | <ul style="list-style-type: none"> • $] - \infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ • $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ • $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ • $\mathbb{R} =] - \infty, +\infty[$. |
|--|---|

Un **intervalle** de $\mathbb{R}$ est une partie de l'une des formes précédentes.

- On dit que $]a, b[$ est un **intervalle ouvert**,
- On dit que $[a, b]$ est un **intervalle fermé**,
- on dit que $[a, b[$ et $]a, b]$ sont des **intervalles semi-ouverts**.
- On dit que $] - \infty, a[$ et $]a, +\infty[$ sont des **intervalles ouverts**,
- On dit que $] - \infty, a]$ et $[a, +\infty[$ sont des **intervalles fermés**.

Remarque 4. Notons en particulier que $\emptyset =]a, a[$ est un intervalle, et que les singletons $\{a\} = [a, a]$ sont des intervalles.

Définition 5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On appelle **segment** $[a, b]$ l'ensemble $\{\lambda a + (1 - \lambda)b ; \lambda \in [0, 1]\}$ des barycentres à poids positif de a et b .

Proposition 14. Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous x, y dans I avec $x < y$, alors $[x, y] \subset I$.

Preuve 9. Exercice

Exercice 7

Montrer que $I = [1, 2] \cup [3, 4]$ n'est pas un intervalle

Corollaire 1. 1. Si I est un intervalle non vide, majoré et non minoré de $\mathbb{R}$, alors I est de la forme $] - \infty, \sup I[$ ou $] - \infty, \sup I]$.

2. Si I est un intervalle non vide, minoré et non majoré de $\mathbb{R}$, alors I est de la forme $] \inf I, +\infty[$ ou $] \inf I, +\infty]$.

3. Si I est un intervalle non vide, majoré et minoré de $\mathbb{R}$, alors I est de la forme $] \inf I, \sup I[$, $[\inf I, \sup I]$, $] \inf I, \sup I]$ ou $] \inf I, \sup I[$.

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ croissante et J un intervalle de $\mathbb{R}$

1. Montrer que $f^{-1}(\{0\})$ est un intervalle de $\mathbb{R}$
2. Montrer que $f^{-1}(J)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$
3. $f(J)$ est-il forcément un intervalle de $\mathbb{R}$?

3 Parties denses dans $\mathbb{R}$

Définition 6. Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite **dense** dans $\mathbb{R}$ (ou simplement dense) lorsque tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient un élément de A .

Autrement dit :

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \text{ tel que } |x - a| \leq \varepsilon$$

Exemples 1. 1. L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2. L'ensemble des nombres irrationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

3. L'ensemble des nombres dyadiques $\{\frac{m}{2^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

4. L'ensemble des nombres décimaux $\{\frac{m}{10^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

5. Pour tout nombre irrationnel α , l'ensemble $\{n\alpha - \lfloor n\alpha \rfloor \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[0, 1]$.

Proposition 15. Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y, \exists d \in A \text{ tel que } x < d < y$$

ou encore

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y,]x, y[\cap A \neq \emptyset$$

Preuve 10. Exercice

Proposition 16.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dense dans $\mathbb{R}$

Preuve 11. Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$. Considérons un entier $q > 0$ tel que $1/q \leq \varepsilon$. Posons $p = \lfloor qx \rfloor$, on a $p \leq qx < p + 1$ d'où

$$\frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}.$$

Posons $r = p/q$, le nombre r est bien rationnel et puisque $0 \leq x - r < 1/q \leq \varepsilon$, on a bien $|x - r| \leq \varepsilon$.

Corollaire 2. L'ensemble $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ des nombres irrationnels est dense dans $\mathbb{R}$

Preuve 12. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$.

- Si x est irrationnel, il suffit de poser $\theta = x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et on a bien $|x - \theta| = 0 \leq \varepsilon$.
- Si $x \in \mathbb{Q}$ est rationnel, on montre facilement par l'absurde que pour tout entier $q > 0$, le réel $\theta_q = x + \sqrt{2}/q$ est irrationnel. Puisque $|x - \theta_q| = \sqrt{2}/q$, il suffit de choisir un entier q suffisamment grand pour que $\sqrt{2}/q \leq \varepsilon$.

Exercice 9

1. Montrer que $A = \{\frac{m}{n^2}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $\mathbb{R}$
2. Soit $\varepsilon > 0$ donner un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \varepsilon$

Exercice 10

Montrer que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$

4 Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$

Définition 7. La droite numérique achevée est obtenue en adjoignant à $\mathbb{R}$ deux éléments que nous avons déjà rencontrés dans l'écriture des intervalles non bornés : $-\infty$ et $+\infty$. On a donc :

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

On définit sur $\overline{\mathbb{R}}$ une relation d'ordre, que nous noterons encore $\leq$, qui coïncide avec la relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{R}$ et qui se prolonge de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad -\infty \leq -\infty, \quad +\infty \leq +\infty.$$

Ainsi, $\leq$ est une relation d'ordre total sur $\overline{\mathbb{R}}$, et l'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ possède un plus grand élément $+\infty$ et un plus petit élément $-\infty$. On voit que, si l'on adopte les notations d'intervalles valables sur tout ensemble totalement ordonné, il y a exactement quatre types d'intervalles dans $\overline{\mathbb{R}}$:

$$[\alpha, \beta], \quad [\alpha, \beta[, \quad]\alpha, \beta], \quad]\alpha, \beta[,$$

où $(\alpha, \beta) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ avec $\alpha \leq \beta$.

Notons aussi qu'un intervalle de la forme $]a, +\infty]$ ou $] -\infty, b]$ existe désormais dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors qu'il n'existait pas dans $\mathbb{R}$. De plus, un intervalle de la forme $]a, +\infty[$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ coïncide avec la partie de $\mathbb{R}$ notée de la même manière. Il en va de même pour tous les intervalles non bornés de $\mathbb{R}$.

Il est également possible d'adopter des conventions permettant, dans une certaine mesure, de prolonger les lois $+$ et $\cdot$ de $\mathbb{R}$ à la droite numérique achevée. On pose les tables suivantes (les cas marqués « ND » signifient que l'opération n'est pas définie).

$+$	$-\infty$	$x \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$+\infty$	ND	$+\infty$	$+\infty$
$y \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$x + y$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	ND

$\times$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}_-^*$	0	$y \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	ND	$-\infty$	$-\infty$
$x \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	xy	0	xy	$-\infty$
0	ND	0	0	0	ND
$x \in \mathbb{R}_+^*$	$-\infty$	xy	0	xy	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	ND	$+\infty$	$+\infty$

Remarque 5. Le symbole « ND » signifie que l'opération n'est pas définie (par exemple $+\infty + (-\infty)$ ou $0 \times (+\infty)$).

Remarque 6. Soit I un ensemble non vide, en particulier un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application.

- Si f est majorée (resp. minorée), alors l'ensemble $A = \{f(x) \mid x \in I\}$ est majoré (resp. minoré). Il admet donc une borne supérieure (resp. une borne inférieure), notée $\sup_I f$ ou $\sup_{x \in I} f(x)$ (resp. $\inf_I f$ ou $\inf_{x \in I} f(x)$).
- Si $\forall x \in I, f(x) < c$, alors $\sup_{x \in I} f(x) \leq c$ (mais on n'a pas forcément $\sup_{x \in I} f(x) < c$). Exemple : $I = [0, 1[, f = \text{id}_I$ et $c = 1$.
- On a une remarque analogue pour la borne inférieure.