

Contents

4	Suites numériques	2
1	Introduction : Du discret au continu, des ponts vers l'infini	2
1.1	Le Paradoxe d'Achille et de la Tortue	
	Un problème vieux de 2500 ans	2
1.2	Au cœur de l'informatique et de la modélisation	2
1.3	Le pont vers l'analyse "continue"	3
2	Premières définitions	3
3	Convergence d'une suite - propriétés	4
3.1	Définitions - exemples	4
3.2	Propriétés des suites convergentes	5
4	Les théorèmes de convergence	6
4.1	Le théorème de majoration	6
4.2	Le théorème des gendarmes	6
4.3	Les théorèmes généraux	7
4.4	Le théorème de la limite monotone	8
4.5	Caractérisations séquentielles	8
4.6	Le théorème sur les suites adjacentes	9
5	Les suites extraites	9
6	Quelques relations de récurrence classiques	10
6.1	Suites arithmétiques	10
6.2	Suites géométriques	11
6.3	Suites arithmético-géométriques	11
6.4	Cas des suites récurrentes linéaires d'ordre 2	12
7	Les suites complexes	13

Chapter 4

Suites numériques

1 Introduction : Du discret au continu, des ponts vers l'infini

Aujourd'hui, nous commençons un chapitre qui est à la fois l'un des plus fondamentaux et des plus fascinants de l'analyse : **les suites**.

Vous pourriez penser : « Les suites ? J'ai déjà fait ça en Terminale. C'est juste $u_{n+1} = \dots$ et on calcule des limites. » Je vous propose de voir les choses différemment. Les suites sont bien plus que cela ; elles sont le premier outil qui va nous permettre de **dompter l'infini** et de **passer du monde discret au monde continu**.

1.1 Le Paradoxe d'Achille et de la Tortue Un problème vieux de 2500 ans

Imaginons une course entre le héros Achille, qui court 10 fois plus vite qu'une tortue, et cette dernière. Par équité, on donne 100 mètres d'avance à la tortue.

- Achille parcourt les 100 mètres qui le séparent du point de départ de la tortue. Pendant ce temps, la tortue a avancé de 10 mètres.
- Achille parcourt alors ces 10 mètres. La tortue, elle, a encore avancé de 1 mètre.
- Achille parcourt ce 1 mètre. La tortue a avancé de 0,1 mètre.
- Et ainsi de suite... **À chaque étape, Achille réduit la distance, mais il semble ne jamais pouvoir rattraper la tortue !**

Zénon d'Élée, avec ce paradoxe, pensait avoir prouvé que le mouvement était impossible. Nous, avec les suites, nous allons **résoudre ce paradoxe**.

La distance totale qu'Achille doit parcourir pour (éventuellement) rattraper la tortue est :

$$S = 100 + 10 + 1 + 0,1 + 0,01 + \dots$$

C'est la **somme des termes d'une suite géométrique**. Nous verrons qu'une telle somme, même avec une infinité de termes, peut être un nombre fini ! En l'occurrence, ici, avec une raison $q = 0,1$ et un premier terme 100 :

$$S = \frac{100}{1 - 0,1} = \frac{1000}{9} \approx 111,11 \text{ mètres.}$$

Achille rattrape bien la tortue en un temps fini. **Les suites nous donnent les clés pour sommer l'infini.**

1.2 Au cœur de l'informatique et de la modélisation

Les suites ne sont pas qu'un jeu de l'esprit. Elles sont l'**épine dorsale de l'algorithmique**.

- **Un algorithme est une suite d'instructions**. Mais son **coût** (son temps de calcul, sa consommation mémoire) est très souvent modélisé par une suite. Si je double la taille des données, est-ce que le temps de calcul double ? Est-ce qu'il est multiplié par 4 ? Par 10 ? La **croissance** de cette suite détermine si mon algorithme est efficace ou inutilisable pour de grandes données.
- La fameuse **suite de Fibonacci** ($F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$) apparaît partout : dans la croissance des populations (modèles proie-prédateur), dans la structure des coquillages, en finance, et même dans des algorithmes de recherche avancés.

1.3 Le pont vers l'analyse "continue"

C'est peut-être le point le plus important pour la suite de votre cursus. Comment définir rigoureusement des concepts comme la **continuité**, la **dérivée**, l'**intégrale** ?

La réponse repose presque entièrement sur les suites.

Comment définir la valeur de π ? On ne peut pas l'écrire exactement. Mais on peut construire des **suites de nombres rationnels** qui se rapprochent de π aussi près que l'on veut.

$$\pi = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

La limite d'une suite est la formalisation parfaite de l'idée d'**approximation**. Toute l'analyse que vous ferez par la suite (les fonctions, les équations différentielles) est bâtie sur cette idée fondamentale : on comprend le continu en l'approchant par une infinité de points discrets. **Les suites sont les briques élémentaires qui construisent le continu.**

En résumé, les suites sont bien plus qu'un objet mathématique de plus. Elles sont un langage pour parler de l'infini, un outil pour modéliser le monde réel, et la fondation sur laquelle toute l'analyse moderne est construite. C'est cette aventure, du discret vers le continu, que je vous propose de commencer aujourd'hui.

2 Premières définitions

Définition 1. (Suite) Une suite réelle est une application $u : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$.

Au lieu de noter cette application sous la forme standard, on la note plutôt sous une forme indicielle :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{ou encore} \quad (u_n) \quad \text{où} \quad u_n \text{ représente l'image de } n$$

On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

Remarques 1. 1. On dira qu'une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ définie à partir d'un certain rang n_0 est aussi une suite. Cependant, pour simplifier les notations, on considérera par la suite que les suites sont définies à partir de $n_0 = 0$.

2. (U_n) désigne une suite (c'est donc une application),

3. U_n désigne un terme de la suite (c'est donc un réel).

Définition 2. (Opérations sur les suites) On définit les lois suivantes sur l'ensemble des suites :

1. Addition de 2 suites : $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$.

2. Multiplication d'une suite par un réel : $\lambda(u_n) = (\lambda u_n)$

3. Multiplication de deux suites : $(u_n) \cdot (v_n) = (u_n \cdot v_n)$.

Définition 3. (Suites bornées) Soit (u_n) une suite, on dit que :

- (u_n) est majorée ssi $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
- (u_n) est minorée ssi $\exists m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n$.
- (u_n) est bornée ssi elle est majorée et minorée.
- (u_n) est bornée ssi $(|u_n|)$ est majorée.

Remarque 1. Bien faire attention à l'ordre des quantificateurs dans les définitions précédentes.

Définition 4. (Suites monotones) Soit (u_n) une suite. On dit que la suite :

- (u_n) est croissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.
- (u_n) est décroissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$.
- (u_n) est monotone ssi elle est croissante ou décroissante.
- (u_n) est stationnaire ssi elle est constante à partir d'un certain rang.

Méthode 1 : Pour déterminer le sens de variation d'une suite, on pourra donc étudier le signe de

$$u_{n+1} - u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Exemple 1. Déterminer le sens de variation de la suite de terme général : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$

Exercice 1

Montrer que si (u_n) est une suite monotone, alors $(v_n) : v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$ est aussi monotone.

Méthode 2 : Lorsque (u_n) est strictement positive, on pourra étudier son sens de variation en comparant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \text{et} \quad 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

La méthode précédente n'est valable que si l'on est sûr que la suite (u_n) a tous ses termes strictement positifs !!

Exemple 2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{n!}{n^n}$

Définition 5. (Propriété définie à partir d'un certain rang) On dit qu'une propriété $p(n)$ est vérifiée à partir d'un certain rang si et seulement si :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \geq n_0, \text{ la propriété } p(n) \text{ est vraie.}$$

Exemple 3. Traduire mathématiquement les propositions :

1. "La suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang"
2. "La suite (u_n) est bornée à partir d'un certain rang"
3. la suite $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-100}}$ est bien définie à partir d'un certain rang.

3 Convergence d'une suite - propriétés

3.1 Définitions - exemples

Définition 6. (Limite finie d'une suite) On dit que la suite (u_n) converge vers un réel $l \in \mathbb{R}$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq \varepsilon$$

On note alors : $u_n \rightarrow l$

Remarque 2. La limite d'une suite (u_n) est un nombre réel indépendant de l'indice n !!

Définition 7. On peut étendre la notion de limite d'une suite à $\overline{\mathbb{R}}$:

1. $u_n \rightarrow +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, u_n \geq A$
2. $u_n \rightarrow -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, u_n \leq A$

Dans ces deux cas, on dit que (u_n) diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Méthodes :

1. Pour montrer que $u_n \rightarrow l$ à l'aide de la définition :
On commence par poser $\varepsilon > 0$ et on cherche un rang n_0 à partir duquel : $|u_n - l| \leq \varepsilon$.
2. Pour montrer que $u_n \rightarrow +\infty$ à l'aide de la définition :
On commence par poser $A > 0$ et on cherche un rang n_0 à partir duquel : $A \leq u_n$.

Exemple 4. Juste pour le plaisir...

1. Montrer en utilisant la méthode précédente que la suite $(1/n)$ converge vers 0 .
2. Montrer en utilisant la méthode précédente que la suite $(\sqrt{n})$ diverge vers $+\infty$.

Remarque 3. 1. S'il existe un réel l tel que la suite converge vers l , on dit que la suite est convergente.

2. S'il n'existe pas de réel l vérifiant la propriété ci-dessus, on dit que la suite diverge.

Attention : Ainsi, une suite divergente soit n'admet pas de limite, soit tend vers l'infini.

3. Démontrer que $u_n \rightarrow l$ revient à démontrer que $u_n - l \rightarrow 0$.

Exemple 5. 1. Trouver une suite convergente qui n'est pas monotone.

2. Trouver une suite divergente qui ne tend pas vers $\pm\infty$.
3. Trouver une suite bornée divergente.
4. Trouver une suite non bornée qui ne diverge pas vers $\pm\infty$.

Remarque 4. Rappelons que les suites sont en particulier utilisées lors de :

1. La caractérisation séquentielle de la borne sup
2. La caractérisation séquentielle de la densité
3. La caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction (vue plus tard...)

Remarque 5. Plus tard, pour étudier la limite d'une suite, nous utiliserons plutôt les théorèmes généraux de convergence ainsi que la convergence ou la divergence des suites élémentaires. Cependant, comme le montre l'exercice suivant, il sera parfois utile de revenir à la méthode issue de la définition.

Exercice 2

Moyenne de Cesàro

Soit (u_n) une suite convergente vers une limite $L \in \mathbb{R}$.

Soit la suite (v_n) définie pour $n > 0$ par : $v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$.

1. Montrer que (v_n) converge vers L (commencer par le cas où $L = 0$).
2. Montrer que la réciproque est fausse
3. Démontrer un résultat analogue lorsque (u_n) diverge vers $+\infty$. En déduire la limite de la suite de terme général $u_n = \sqrt[n]{n!}$.

Exercice 3

Écrire à l'aide de quantificateurs les propriétés :

1. (u_n) ne converge pas vers $l \in \mathbb{R}$.
2. (u_n) ne diverge pas vers $+\infty$.
3. (u_n) diverge.

3.2 Propriétés des suites convergentes

Théorème 1. (Unicité de la limite) Si la limite d'une suite (u_n) existe alors elle est unique.

On peut alors la noter : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Preuve 1. On peut procéder par l'absurde ... en s'aidant d'un dessin !

Théorème 2. Toute suite réelle convergente est bornée.

Preuve 2. 1. Prenons $\varepsilon = 1$. On sait qu'à partir d'un certain rang n_0 , $|u_n - l| \leq 1$. Donc (u_n) est bornée à partir de n_0 .

2. D'autre part, $\{u_n; n \in \llbracket 0, n_0 \rrbracket\}$ est fini. Cet ensemble est donc borné.
item Globalement, (u_n) est donc bornée.

Théorème 3. (Encadrement des termes d'une suite convergente) Soit (u_n) convergeant vers un réel $l \in \mathbb{R}$.

Alors pour tous $k, k' \in \mathbb{R}$ tels que $k < l < k'$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \Rightarrow k < u_n < k'$$

Preuve 3. C'est l'application de la définition de la convergence vers l en prenant $\varepsilon = \min(|l - k'|, |l - k|)$.

Remarque 6. On en déduit que si une suite (u_n) converge vers une limite $l > 0$, alors cette suite est à termes strictement positifs à partir d'un certain rang.

Théorème 4. (Suites qui convergent vers 0)

1. L'ensemble des suites réelles convergeant vers 0 est stable par l'addition et par multiplication par un réel.

2. Le produit d'une suite qui tend vers 0 par une suite bornée est une suite qui tend vers 0

Preuve 4. Méthode classique vue précédemment pour prouver la convergence d'une suite.

Théorème 5. (Passage à la limite dans les inégalités) Soit deux suites réelles (u_n) et (v_n) :

$$\text{Si } u_n \leq v_n \text{ à partir d'un certain rang et } \begin{cases} u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \\ v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l' \end{cases} \text{ alors : } l \leq l'.$$

Preuve 5. On procède par l'absurde en s'aidant d'un dessin.

Remarque 7. Même si pour tout entier n on a $u_n < v_n$, on obtient une inégalité large après passage à la limite. Prenez par exemple les suites définies par $u_n = 1/n$ et $v_n = 2/n$

Exemple 6. Prouver qu'une suite décroissante qui tend vers 0 est positive.

4 Les théorèmes de convergence

4.1 Le théorème de majoration

Théorème 6. Théorème de majoration (Étude de convergence 1)

Soit une suite (u_n) et un réel $l \in \mathbb{R}$.

S'il existe une suite (α_n) et un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que : $\begin{cases} \forall n \geq n_0, |u_n - l| \leq \alpha_n \\ \alpha_n \rightarrow 0 \end{cases}$ alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l$.

Preuve 6. Facile : il suffit de traduire la convergence de (α_n) vers 0.

Remarque 8. Que dire alors d'une suite majorée par une suite convergente?

Remarque 9. Ce théorème est très utilisé en pratique pour montrer la convergence d'une suite lorsqu'on est capable de deviner sa limite.

Exemple 7. Montrer que la suite de terme général $u_n = 2^n/n!$ converge vers 0.

Exercice 4

Étudier les limites des suites de termes généraux suivants :

1. $u_n = \frac{\sin n}{n+(-1)^n}$

2. $v_n = \frac{n!}{n^n}$

3. $w_n = \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$

4.2 Le théorème des gendarmes

Théorème 7. Théorème des gendarmes (Étude de convergence 2) On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) .

1. Si : $\begin{cases} v_n \leq u_n \leq w_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ (v_n) \text{ et } (w_n) \text{ convergent vers la même limite } l \end{cases}$ alors la suite (u_n) converge vers l .

2. Si : $\begin{cases} v_n \leq u_n \text{ (à partir d'un certain rang)} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \end{cases}$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Preuve 7. 1. On traduit le fait que (u_n) et (v_n) convergent vers l . L'encadrement permet alors de conclure ...

2. On utilise la définition de la divergence vers $+\infty$.

Remarque 10. Ce théorème présente l'avantage de pouvoir étudier la convergence d'une suite lorsqu'on n'a aucune idée de sa limite éventuelle.

Exemple 8. Étudier la convergence de la suite de terme général : $u_n = \sqrt[n]{2+(-1)^n}$

Exercice 5

Étudier la convergence des suites de terme général :

$$1. S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{n^3 + k^2}$$

$$2. S_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n k!$$

Exercice 6

On considère la suite de terme général : $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$

$$1. \text{ Pour } k \in \mathbb{N}^*, \text{ comparer } \frac{1}{k} \text{ avec } \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \text{ et } \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}.$$

$$2. \text{ Montrer que } \frac{S_n}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1. \text{ (on dira que } S_n \text{ est équivalent à } \ln n \text{ en } +\infty)$$

4.3 Les théorèmes généraux

Théorème 8. (Théorèmes généraux) Soit (u_n) une suite convergeant vers $l \in \mathbb{R}$ et (v_n) une suite convergeant vers $l' \in \mathbb{R}$. Alors

1. la suite $(|u_n|)$ converge vers $|l|$
2. la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $l + l'$
3. la suite $(u_n v_n)$ converge vers ll'
4. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite (λu_n) converge vers λl
5. Si $l' \neq 0$, la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers $\frac{l}{l'}$.

Preuve 8. 1. On utilise l'inégalité triangulaire pour majorer $||u_n| - |l||$ par ε .

2. Pour les autres limites, on peut alors utiliser le théorème de majoration.

(a) P2 : On utilise l'inégalité triangulaire pour majorer $|(u_n + v_n) - (l + l')|$.

(b) P3 : On remarque que $u_n v_n - ll' = u_n (v_n - l') + l' (u_n - l)$ puis on applique l'inégalité triangulaire.

(c) P5 : On commence par prouver que $1/v_n \rightarrow 1/l'$. Pour cela, on montre que $|v_n| \geq |l'|/2$ à partir d'un certain rang.

Remarque 11. On peut généraliser le théorème précédent au cas où $l, l' \in \overline{\mathbb{R}}$.

Théorème 9. Cas des suites fonctionnelles (Étude de convergence 3)

Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = f(n)$ où $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

$$\text{Si } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l \in \overline{\mathbb{R}} \text{ alors } u_n \rightarrow l$$

Preuve 9. On traduit simplement la limite de f en $+\infty$. (cf le cours sur les fonctions!)

Exemple 9. Étudier les suites de termes généraux :

$$1. u_n = \frac{2n^2 + n - 1}{3n^2 + 1}.$$

$$2. u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$3. u_n = \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n}$$

$$4. u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$$

$$5. u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k$$

$$6. u_n = \sqrt[n]{n^2}$$

Exercice 7

1. Si (u_n) est bornée et (v_n) diverge vers $+\infty$, montrer que : $u_n + v_n \rightarrow +\infty$
2. Si (u_n) converge et (v_n) diverge, montrer que : $(u_n + v_n)$ diverge.

Exercice 8

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $(u_n + v_n)$ et $(u_n - v_n)$ convergent.
Montrer que (u_n) et (v_n) convergent.

4.4 Le théorème de la limite monotone

Théorème 10. Théorème de la limite monotone (Étude de convergence 4) Soit (u_n) une suite réelle.

- Si (u_n) est croissante et majorée, alors elle converge vers une limite finie égale à sa borne supérieure :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

- Si (u_n) est décroissante et minorée, alors elle converge vers une limite finie égale à sa borne inférieure :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \inf\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Preuve 10. À titre d'exercice.

Remarque 12. Contrairement aux théorèmes de convergence précédents, celui-ci ne donne pas la limite de la suite. On pensera donc à l'utiliser en exercice lorsque la limite n'est pas demandée !

Exemple 10. On suppose que (u_n) est une suite réelle croissante telle que (u_{2n}) converge.
Montrer que (u_n) converge.

Exemple 11. Soit la suite (S_n) de terme général : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$.
2. En déduire que (S_n) diverge vers $+\infty$

Exercice 9

Soit (u_n) la suite de terme général : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$ tel que $k \geq 2$, on a : $\frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
2. En déduire que la suite (u_n) converge.

Exercice 10

Étudier la convergence des suites de terme général : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot 2^k}$ et $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$

4.5 Caractérisations séquentielles

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$

Théorème 11. (caractérisation séquentielle de la borne supérieure) Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit $M \in \mathbb{R}$, on a : M est la borne supérieure (inférieure) de A si et seulement si M majore (minore) A et il existe une suite d'éléments de A qui converge vers M .

Preuve 11. Si $M = \sup A$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exists a_n \in A$ tel que $M - \frac{1}{n+1} < a_n$ car $M - \frac{1}{n+1}$ ne majore pas A , la suite (a_n) ainsi construite converge vers M car $M - \frac{1}{n+1} < a_n \leq M$.

Si M majore A et qu'il existe une suite (a_n) de A qui converge vers M , alors pour tout $\varepsilon > 0$, à partir d'un certain rang N on a $M - \varepsilon < a_n$, donc $M - \varepsilon$ ne majore pas A , M est donc le plus petit majorant de A .

Théorème 12. (caractérisation séquentielle de la densité) Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout réel x il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x .

Preuve 12. Celle-ci est simple et laissée en exercice.

Théorème 13. (Suite de rationnels convergeant vers un réel) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Alors il existe une suite (a_n) d'éléments de $\mathbb{Q}$ telle que : $(a_n) \rightarrow x$ avec éventuellement $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_n \leq x \\ \text{ou} \\ x \leq a_n \end{cases}$ On peut également imposer (a_n) croissante ou (a_n) décroissante.

Preuve 13. On construit la suite (a_n) en utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque 13. De même tout réel x est limite d'une suite de nombres irrationnels.

4.6 Le théorème sur les suites adjacentes

Définition 8. (Suites adjacentes) Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit qu'elles sont adjacentes lorsque :

1. les deux suites sont monotones de sens contraire.
2. La suite $(d_n) = (v_n - u_n)$ converge vers 0.

Théorème 14. Convergence des suites adjacentes (Étude de convergence 5) Deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) convergent et ont la même limite.

Preuve 14. On peut utiliser le théorème de la limite monotone.

Les suites (u_n) et (v_n) étant monotones, elles admettent une limite.

On montre que ces limites sont finies en montrant que les 3 autres cas sont en contradiction avec $u_n - v_n \rightarrow 0$.

On montre enfin que ces deux limites sont égales.

Remarque 14. Si $\begin{cases} (u_n) \text{ (croissante)} \\ (v_n) \text{ (décroissante)} \end{cases}$ sont adjacentes, alors leur limite commune l vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l \leq v_n$.
On dit alors que u_n et v_n sont des approximations de l à $|u_n - v_n|$ près

Exercice 11

Soit les suites de terme général : $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. Montrer que leur limite commune est un nombre irrationnel (c'est le nombre de Neper $e = \exp(1)$).

5 Les suites extraites

Définition 9. (Suite extraite) On dit qu'une suite (v_n) est une suite extraite d'une suite (u_n) s'il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$.

Exemple 12. les suites $\begin{cases} (v_n) \text{ telle que } v_n = u_{2n} \\ (w_n) \text{ telle que } w_n = u_{2n+1} \end{cases}$ sont extraites de la suite (u_n) .

Théorème 15. Suite extraite d'une suite ayant une limite (Étude de convergence 6) Si une suite (u_n) admet une limite $l \in \mathbb{R}$ alors toute suite extraite de (u_n) a aussi pour limite l .

Preuve 15. 1. On peut commencer par remarquer que si $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(n) \geq n$.
2. La démonstration est alors immédiate.

Remarque 15. 1. On peut ainsi prouver qu'une suite converge en montrant qu'il s'agit d'une suite extraite d'une suite convergente.

2. Cette propriété est surtout très utile pour démontrer qu'une suite diverge.

Utilisation des suites extraites : Pour prouver la divergence d'une suite :

- cas 1 : Si $(u_{\varphi_1(n)})$ et $(u_{\varphi_2(n)})$ convergent vers des limites différentes, alors (u_n) est divergente.
- cas 2 : Si $(u_{\varphi(n)})$ divergente, alors (u_n) est divergente.

Pour déterminer la limite d'une suite convergente : Si $\begin{cases} (u_n) \text{ converge} \\ (u_{\varphi(n)}) \rightarrow l \end{cases}$ alors (u_n) converge vers l .

Exemple 13. Montrer que la suite de terme général $u_n = \cos\left(\frac{n^2-1}{n}\pi\right)$, est une suite divergente.

Exercice 12

Soit la suite de terme général $u_n = \cos n$. Prouver la divergence de (u_n) en calculant $\cos(n+2) + \cos n$ et $\cos 2n$.

Théorème 16. Application pour prouver la convergence (Étude de convergence 7) Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$ alors $(u_n) \rightarrow l$.

Preuve 16. On fixe $\varepsilon > 0$ et on exprime la convergence de (u_{2n}) et (u_{2n+1}) à l'aide de la définition. On détermine alors facilement un $N \geq 0$ à partir duquel on a $|u_n - l| \leq \varepsilon$.

Exercice 13

On définit la série alternée (S_n) par :
$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{1+k}$$

1. Calculer S_0, S_1, S_2, S_3 .
2. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et en déduire que (S_n) converge.
3. Si l est la limite de (S_n) , majorer l'erreur $e_n = |S_n - l|$ en fonction de n .
4. Comment choisir la valeur de n pour que S_n soit une valeur approchée de 1 à 10^{-2} près?

Théorème 17. Théorème de Bolzano-Weierstrass De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.

Preuve 17. Il faut connaître le principe général de la démonstration. L'idée consiste à isoler par dichotomie une infinité de termes de la suite appartenant à une suite d'intervalles dont le diamètre tend vers 0.

Corollaire 1. Soit un segment $[a, b]$ et une suite (x_n) de points de ce segment. Il existe alors une suite extraite de la suite (x_n) qui converge vers un point $l \in [a, b]$.

Preuve 18. Conséquence immédiate du théorème de Bolzano-Weierstrass.

Remarque 16. Le théorème de Bolzano-Weierstrass s'étend à la notion plus générale de partie compacte de $\mathbb{R}^n$ (vue en MP). Les segments de $\mathbb{R}$ sont des parties compactes car fermées et bornées.

Exemple 14. D'après Bolzano-Weierstrass, la suite $(u_n) : u_n = \cos n$ admet des points d'adhérence dans $[-1, 1]$.

En utilisant la densité de $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ et la continuité de la fonction $\cos$, on démontre même que $\{\cos n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

6 Quelques relations de récurrence classiques

Dans certains cas très particuliers, il est possible de déterminer la forme fonctionnelle d'une suite récurrente. C'est le cas des suites suivantes...

6.1 Suites arithmétiques

Définition 10. (Suite arithmétique) Une suite (u_n) est dite **arithmétique** s'il existe un réel r , appelé **raison** de la suite, tel que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

La relation de récurrence peut s'écrire plus généralement :

$$u_{n+1} - u_n = r$$

Le terme général d'une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r est donné par :

$$u_n = u_0 + n \cdot r$$

Théorème 18. (Suites arithmétiques)

On considère une suite de réels (u_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + a$ où $a \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + a \cdot n$$

a est appelée la raison de la suite arithmétique (u_n) .

Preuve 19. Récurrence évidente.

Exemple 15. Étudier la convergence de (u_n) arithmétique selon les valeurs de a .

6.2 Suites géométriques

Définition 11. (Suite géométrique) Une suite (u_n) est dite **géométrique** s'il existe un réel q , appelé **raison** de la suite, tel que pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = q \cdot u_n$$

La relation de récurrence peut s'écrire plus généralement :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q \quad (\text{pour } u_n \neq 0)$$

Le terme général d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q est donné par :

$$u_n = u_0 \cdot q^n$$

Théorème 19. (Suites géométriques) On considère une suite de réels (u_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = k \cdot u_n$ où $k \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 \cdot k^n$$

k est appelée la raison de la suite géométrique (u_n) .

Preuve 20. Récurrence évidente.

Exemple 16. Étudier la convergence de (u_n) géométrique selon les valeurs de k .

Définition 12. (Série géométrique) Soit un réel $k \in \mathbb{R}$.

On définit la progression géométrique (ou série géométrique) de raison k par :

$$1 + k + \dots + k^n = \sum_{i=0}^n k^i \quad \text{et on a :} \quad \sum_{i=0}^n k^i = \begin{cases} \frac{1-k^{n+1}}{1-k} & \text{si } k \neq 1 \\ n+1 & \text{si } k = 1 \end{cases}$$

Exercice 14

Soit (u_n) une suite de termes non nuls telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow 0$. Montrer que $(u_n) \rightarrow 0$.

6.3 Suites arithmético-géométriques

On considère une suite de réels (u_n) vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b$ où $\begin{cases} (a, b) \in \mathbb{R}^2 \\ a \neq 1 \\ a \neq 0 \end{cases}$

Pour trouver la forme fonctionnelle d'une suite arithmético-géométrique, on peut utiliser la méthode suivante :

1. On introduit ℓ le point fixe de la suite : $\ell = a\ell + b$ (*) ou encore $\ell = \frac{b}{1-a}$
2. On soustrait alors la relation (*) à $u_{n+1} = au_n + b$ pour obtenir : $u_{n+1} - \ell = a(u_n - \ell)$
3. La suite $(u_n - \ell)$ est alors une suite géométrique et on obtient : $u_n - \ell = (u_0 - \ell) a^n$ et donc $u_n = (u_0 - \ell) a^n + \ell$

Exemple 17. On considère une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 3$. Déterminez l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 15

On considère une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 2^n$.
Déterminez l'expression de u_n en fonction de n . Aide : on pourra diviser la relation de récurrence par 2^{n+1} .

Exercice 16

Soit $k \in \mathbb{R}$.
On considère une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = k \cdot u_n^2$.
Déterminez l'expression de u_n en fonction de n .
Aide : Par changement de variables, vous vous ramènerez à l'étude d'une suite arithmético-géométrique.

6.4 Cas des suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_0 \\ u_1 \\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases} \quad \text{avec } (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*.$$

On appelle équation caractéristique de (u_n) l'équation : $(C) : x^2 = ax + b$.
Plusieurs cas se produisent alors :

- Théorème 20.**
1. Si $\Delta > 0$: on note r_1 et r_2 les deux racines réelles distinctes de (C) . Il existe alors deux constantes réelles A et B telles que : $u_n = A \cdot r_1^n + B \cdot r_2^n$; $\forall n \in \mathbb{N}$
 2. Si $\Delta = 0$: on note r la racine réelle de (C) . Il existe alors deux constantes réelles A et B telles que : $u_n = (A \cdot n + B)r^n$; $\forall n \in \mathbb{N}$
 3. Si $\Delta < 0$: soit $z = \rho e^{i\theta}$ une des deux racines complexes de (C) . Il existe alors deux constantes réelles A et B telles que : $u_n = \rho^n (A \cos n\theta + B \sin n\theta)$; $\forall n \in \mathbb{N}$

Preuve 21. Voir le cours sur les espaces vectoriels de dimension finie.

Remarque 17. Si les deux premiers cas sont analogues aux cas rencontrés dans la résolution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$, en revanche on remarquera que lorsque $\Delta < 0$ on a :

Pour $y'' + ay' + by = 0$ les solutions sont : $y(x) = e^{\alpha x} (A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x))$ où $r = \alpha + i\beta$ est racine.

Pour $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ les solutions sont : $u_n = \rho^n (A \cos n\theta + B \sin n\theta)$ où $r = \rho e^{i\theta}$ est racine

Exercice 17

Démonstration du cas 2 :

Soient a et b deux réels tels que $a^2 + 4b = 0$.

On considère l'ensemble E des suites complexes qui satisfont la relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ (avec $b \neq 0$) pour tout entier n .

1. Quelles sont les suites géométriques de E ?
2. Soit r la solution de $x^2 - ax - b = 0$. Montrer que la suite (nr^n) est dans E .
3. Décrire l'ensemble E .

Aide : Vous pourrez rechercher les suites de E sous la forme $u_n = a_n \cdot r^n$

Exemple 18. Déterminer les expressions fonctionnelles des 3 suites suivantes :

$$\begin{array}{l} 1. (u_n) : \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{1}{3}u_n \end{cases} \quad \left| \quad 3. (w_n) : \begin{cases} w_0 = 1 \\ w_1 = 1 \\ w_{n+1} = w_{n+1} - w_n \end{cases} \quad \left| \quad 5. \begin{cases} u_0 > 0 \\ u_1 > 0 \\ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n} \end{cases} \right. \\ 2. (v_n) : \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_1 = 1 \\ v_{n+1} = 4v_{n+1} - 4v_n \end{cases} \quad \left| \quad 4. \begin{cases} u_0 > 0 \\ u_1 > 0 \\ u_{n+2} = u_{n+1}u_n \end{cases} \right. \end{array}$$

7 Les suites complexes

Une suite à valeurs complexes est une application $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$.

C'est aussi une suite (u_n) avec $u_n = x_n + iy_n$ où (x_n) et (y_n) sont deux suites réelles.

On dira que $\begin{cases} (x_n) \text{ est la partie réelle de } (u_n) \\ (y_n) \text{ est la partie imaginaire de } (u_n) \end{cases}$.

Remarque 18. Nous verrons qu'à l'exception des théorèmes et définitions faisant intervenir la relation d'ordre $\leq$ (contrairement à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ n'est pas ordonné), les suites complexes vérifient les mêmes propriétés que les suites réelles.

Définition 13. On dira qu'une suite complexe (z_n) est bornée si et seulement si la suite $(|z_n|)$ est bornée.

Proposition 1. Une suite complexe est bornée si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont bornées.

Preuve 22. On utilisera le fait que si $z = x + iy$ alors $\begin{cases} |x| \leq |z| \\ |y| \leq |z| \end{cases}$ et que $|z| \leq |x| + |y|$

Définition 14. (Convergence d'une suite de complexes)

1. On dit qu'une suite de nombres complexes (z_n) converge vers un nombre complexe $a \in \mathbb{C}$ si et seulement si la suite réelle de terme général $|z_n - a|$ converge vers 0.
2. Si un tel complexe a n'existe pas, on dit que la suite (z_n) diverge.
3. On dit que la suite (z_n) diverge vers l'infini lorsque la suite réelle de terme général $|z_n|$ diverge vers $+\infty$.

Exemple 19. La suite complexe $z_n = 1 - \frac{i}{n}$ converge vers 1.

Remarque 19. Voici une autre façon plus formelle de dire que $z_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a : \forall r > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, z_n \in D(a, r)$

	Suites réelles	Suites complexes
Suite bornée	Oui	Oui mais la définition est différente
Majorant / Minorant	Oui	Non
Sens de variation	Oui	Non
Suite convergente / divergente	Oui	Oui
Suites géométriques / arithmétiques	Oui	Oui
Suites récurrentes	Oui	Oui

Théorème 21. (Théorème de majoration)

Soit (z_n) une suite de complexes et $a \in \mathbb{C}$.

Si (α_n) est une suite de réels vérifiant : $\begin{cases} |z_n - a| \leq \alpha_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ \alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \end{cases}$, alors $z_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$.

Preuve 23. Immédiat.

Une autre façon d'étudier une suite complexe consiste à étudier deux suites réelles :

Théorème 22. Une suite complexe converge si et seulement si les parties réelles et imaginaires convergent

$$z_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(z_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \operatorname{Re}(a) \\ \operatorname{Im}(z_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \operatorname{Im}(a) \end{cases}$$

Preuve 24. Aucune difficulté.

Remarque 20. Ce théorème implique en particulier :

1. L'unicité de la limite d'une suite complexe (lorsqu'elle existe)
2. Le fait qu'une suite complexe convergente est bornée

Exercice 18

Soit (z_n) une suite complexe telle que $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{3}(z_n + 2\bar{z}_n)$.
Montrer que (z_n) converge et exprimer sa limite en fonction de z_0 .

Théorème 23. (Suites géométriques complexes) Soit un nombre complexe $k \in \mathbb{C}$.

On appelle suite géométrique de raison k , la suite définie par $\begin{cases} \text{la donnée de } z_0 \in \mathbb{C} \\ \text{la relation de récurrence } z_{n+1} = kz_n \end{cases}$
Elle vérifie alors la relation : $z_n = z_0 \cdot k^n$ et on a alors :

$$\begin{cases} |k| < 1 & \Rightarrow (z_n) \text{ converge vers } 0 \\ |k| \geq 1 \text{ et } k \neq 1 & \Rightarrow (z_n) \text{ diverge} \\ k = 1 & \Rightarrow (z_n) \text{ est constante et vaut } z_0 \end{cases}$$

Preuve 25. La seule petite difficulté porte sur le cas $|k| = 1$.

Dans ce cas, on suppose que $k^n \rightarrow \ell \in \mathbb{C}$ et on utilise le fait que $k^{n+1} = k^n \cdot k$.

Remarque 21. Lorsque $|k| = 1$ (avec $k \neq 1$), il y a deux modes de divergence possibles :

1. Si $k = e^{i\frac{p}{q}\pi}$ avec $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$, alors la suite (k^n) est périodique de période $T = 2q$
2. Si $k = e^{i\alpha\pi}$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors la suite (k^n) est dense dans le cercle $\mathcal{C}(O, 1)$

Exemple 20. À l'aide de la suite (e^{in}) , prouver que les suites $(\cos n)$ et $(\sin n)$ ne peuvent converger simultanément.

Exercice 19

Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2}$ et $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$.

En introduisant la suite complexe de terme général $z_n = x_n + iy_n$, montrer que les suites (x_n) et (y_n) convergent et déterminer leurs limites.

	Suites réelles	Suites complexes
Théorèmes généraux sur la limite d'une combinaison linéaire / produit / rapport	Oui	Oui
Théorème de majoration	Oui	Oui
Théorème de la limite monotone	Oui	Non
Théorème des gendarmes	Oui	Non
Convergence des suites géométriques	Oui	Oui sous conditions
Convergence des suites extraites	Oui	Oui

	Suites réelles	Suites complexes
Unicité de la limite	Oui	Oui
Une suite convergente est bornée	Oui	Oui
Passage à la limite dans une inégalité	Oui	Non

Exercice 20

Soit a un complexe de module ρ et d'argument $\theta \neq 0[\pi]$.

On définit la suite complexe (z_n) par $z_0 = a$ et $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$.

Montrer que (z_n) converge vers un réel que l'on exprimera en fonction de ρ et θ .

Aide : Vous pourrez prouver que : $\sin \frac{\theta}{2^n} \prod_{k=1}^n \cos \frac{\theta}{2^k} = \frac{1}{2^n} \sin \theta$.

Méthodes d'étude de convergence d'une suite complexe (u_n) :

M1 : On majore $|u_n - \ell|$ par une suite qui tend vers 0 (théorème de majoration)

M2 : On étudie la convergence des parties réelles et imaginaires (caractérisation)

M3 : On exprime u_n en fonction de n (conjecture / validation / théorèmes généraux)