

Problème: Similitudes et isométries

Soit $\lambda > 0$. On appelle similitude (plane) de rapport λ toute application f du plan dans lui-même telle que pour tous points M, N on ait :

$$f(M)f(N) = \lambda MN.$$

On appelle isométrie (plane) toute application f du plan dans lui-même telle que pour tous points M, N on ait :

$$f(M)f(N) = MN$$

Les isométries préservent les distances.

Les isométries sont les similitudes de rapport 1.

1. Montrer que la composée de deux isométries est une isométrie.
2. Montrer que la composée de deux similitudes est une similitude de rapport le produit des rapports de celles-ci.
3. Montrer que toute similitude est injective. Et en déduire que toute similitude est en fait bijective.
4. Montrer que les translations, les rotations et les symétries sont des similitudes.
5. Montrer que les applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto az + b$, où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a \neq 0$, sont des similitudes de rapport $|a|$. Une telle application préserve les angles orientés : on dit que c'est une similitude directe.
6. (**Caractérisation géométrique**). Soit $a, b \in \mathbb{C}$ tel que $a \neq 0$ et $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto az + b$.
 - (a) Montrer que si $a = 1$, f est la translation de vecteur b .
 - (b) $a \neq 1$
 - i. Montrer que l'équation $f(z) = z$ admet un unique solution ω .
 - ii. Notons $\theta = \arg(a)$ et $\omega = \frac{b}{1-a}$. Montrer alors f est la composée de l'homothétie de rapport $|a|$ et de la rotation d'angle θ , toutes deux de centre ω .
 - iii. Montrer que cette homothétie et cette rotation commutent. On dit que f est la similitude directe de centre ω , de rapport $|a|$ et d'angle θ .
7. Application: Montrer que l'application $f : z \mapsto (1 + i)z + 2$ est la similitude directe de centre $2i$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.

Problem:2

1. Partie A : Une première somme faisant apparaître un télescope

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geq p$. On se propose de calculer $S_{p,n} = \sum_{k=p}^n \binom{k}{p}$.

- (a) Montrer que :

$$S_{p,n} = 1 + \sum_{k=p+1}^n \left[\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right].$$

(b) En faisant apparaître un télescopage, en déduire la valeur de $S_{p,n}$.

2. Partie B : Une expression du coefficient binomial $\binom{2n}{n}$.

Dans cette partie, on se propose d'établir que pour tout entier naturel n :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

À cette fin, on considère les fonctions polynomiales $f_n : x \mapsto (1+x)^{2n}$ et $g_n : x \mapsto (1+x)^n$.

3. Remarques préliminaires.

(a) Justifier que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}.$$

(b) Développer les fonctions f_n et g_n . Quel est le coefficient de degré n de f_n ?

4. Développement de deux fonctions polynomiales de degré n .

Soient $x \mapsto a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ et $x \mapsto b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$ deux fonctions polynomiales de degré n .

(a) Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^n b_\ell x^\ell \right) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=k}^{n+k} a_i b_{i-k} x^i \right).$$

(b) En déduire que pour tout réel x :

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^n b_\ell x^\ell \right) = \sum_{i=0}^{2n} \left(\sum_{k=\max(i-n,0)}^{\min(n,i)} a_k b_{i-k} \right) x^i.$$

On pourra s'aider d'un tableau afin de disposer les éléments de la famille $(a_k b_{i-k})_{k,i}$ doublement indexée.

5. À l'aide de la question précédente, développer $g_n(x) \times g_n(x)$.

6. En déduire la formule :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

*****Fin*****