

Exercice 1

Soient A et B les deux ensembles définis par

$$A = \left\{ 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$$

et

$$B = \left\{ 1 - \frac{1}{n(n+1)} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Prouver que $A \subset B$. Y-a-t-il égalité des deux ensembles?

Exercice 2

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{S} = \{g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : \forall n \in \mathbb{N} : g(g(n)) = n + p\}$.

- On suppose que $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Soit $g \in \mathcal{S}$.
 - Montrer que g est injective.
 - On pose $A = \{k \in \mathbb{N} : k < p \text{ et } g(k) < p\}$ et $B = \{k \in \mathbb{N} : k < p \text{ et } g(k) \geq p\}$.
 - Montrer que $g(A) \subset B$.
 - Soit $k \in B$. On pose $s = g(k) - p$. Montrer que $s \in A$ et $g(s) = k$.
 - En déduire que $g(A) = B$.
 - Montrer que p est pair.
- Montrer que $\mathcal{S} \neq \emptyset$ si et seulement si p est pair.

Exercice 3

Soit E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E . On appelle **différence symétrique** de A et B , notée $A \Delta B$, le sous-ensemble de E défini par :

$$A \Delta B = \{x \in A \cup B \mid x \notin A \cap B\}.$$

- Interpréter les éléments de $A \Delta B$.
- Montrer que

$$A \Delta B = (A \cap C_E B) \cup (B \cap C_E A)$$

où $C_E A$ désigne le complémentaire de A dans E .

- Calculer $A \Delta A$, $A \Delta \emptyset$, $A \Delta E$, $A \Delta C_E A$.
- Démontrer que pour tous A, B, C sous-ensembles de E , on a :

$$(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C).$$

Exercice 4

Soit E un ensemble non vide, A et B deux parties

de E , et f une application définie par :

$$\begin{aligned} f : P(E) &\longrightarrow P(E) \\ X &\longmapsto (X \cap A) \cup B \end{aligned}$$

$$f(X) = (X \cap A) \cup B$$

- Soient $(X, Y) \in P(E)^2$.
 - Montrer que : $X \subset Y \Leftrightarrow X \cap Y = X$
 - Montrer que : $X \subset Y \Leftrightarrow X \cup Y = Y$
 - Montrer que : $X \cap A \subset B \Leftrightarrow X \subset B \cup \bar{A}$
- Calculer : $f(\emptyset)$, $f(A)$, $f(B)$ et $f(E)$.
- Soit $Y \in P(E)$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
 - P_1 Y admet un antécédent par f dans $P(E)$
 - P_2 $B \subset Y \subset A \cup B$
 - P_3 $f(Y) = Y$
- Résoudre l'équation : $f(X) = B$ d'inconnue $X \in P(E)$.
- Soit $\mathcal{E}$ un ensemble non vide et $g : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}$ une application telle que : $g \circ g = \text{id}_{\mathcal{E}}$ (on dit que g est idempotente).
 - Montrer que si g est injective alors $g = \text{id}_{\mathcal{E}}$
 - Montrer que si g est surjective alors $g = \text{id}_{\mathcal{E}}$
 - En déduire que g est injective $\Leftrightarrow g = \text{id}_{\mathcal{E}} \Leftrightarrow g$ est surjective.
- Étude de f
 - Que peut-on dire de $f \circ f$?
 - Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit bijective.

*****Fin*****