

♠ N'oubliez pas :

- de numéroter vos copies, et d'encadrer ou de souligner les résultats à la fin de chaque question ;
- qu'en cas de besoin, vous avez le droit d'admettre le résultat d'une question pour passer à la suivante ;
- d'accorder du soin à la présentation et à votre rédaction (faites des phrases, n'oubliez pas les quantificateurs, soyez précis dans votre argumentation).

♠ Enfin, ce sujet peut se révéler trop long : traitez en priorité les questions qui vous semblent les plus simples.

Exercice 1:

Les questions 1 à 6 de cet exercice sont indépendantes. Quand il s'agit d'énoncer une formule du cours, il est important d'introduire les variables.

- Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.
 - Soit $X \subseteq F$. Définir l'ensemble $f^{-1}(X)$.
 - Donner la définition de " f est surjective de E sur F ".
- Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
 - Donner la définition de " A est majorée ".
 - Soit $m \in \mathbb{R}$. Donner la définition de " m est le plus petit élément de A ".
 - Donner la caractérisation de la borne supérieure de A .
- Soit $B \subseteq \mathbb{R}$. À quelle condition suffisante l'ensemble B possède-t-il une borne inférieure ?
- Donner l'ensemble S des solutions de l'inéquation $|2x + 1| > 3$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
- Soient (u_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$, donner la définition de $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$.
- En utilisant la définition de la limite, prouver les propositions suivantes :
 - Soient deux suites (u_n) et (v_n) convergentes : $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ et $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l'$. Alors : $u_n + v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l + l'$.
 - Soient deux suites (u_n) et (v_n) convergentes : $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ et $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l'$. Alors pour tous réels $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha u_n + \beta v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \alpha l + \beta l'$.
 - On considère deux suites (u_n) et (v_n) convergentes : $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ et $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l'$. Alors : $u_n v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} ll'$. (On pourra remarquer que la suite (v_n) est bornée car convergente.)
 - La suite $\left(\frac{1}{(\sqrt{5})^{n^3}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 2:

On considère les suites réelles $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(H_n)_{n \geq 1}$ définies par :

$$\forall n \geq 1, \quad H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad u_n = H_n - \ln(n+1).$$

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n$.
2. Montrer que la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ est strictement croissante et qu'elle tend vers $+\infty$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est croissante.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers un réel noté γ et que $\gamma > 0$.
5. Montrer qu'il existe une suite réelle $(v_n)_{n \geq 1}$ de limite nulle telle que $\forall n \geq 1, H_n = \ln n + \gamma + v_n$.

Exercice 3:

Soient A, B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et bornées.

1. On suppose $A \subset B$, montrer que : $\sup(A) \leq \sup(B)$ et $\inf(A) \geq \inf(B)$.
2. On suppose $A \cap B \neq \emptyset$, montrer que : $\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf(A), \inf(B)\}$.
3. On note par $A + B$ l'ensemble des réels de la forme $a + b$ tels que $a \in A, b \in B$. Montrer que : $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.
4. On note par $-A$ l'ensemble des réels de la forme $-a$ tels que $a \in A$. Montrer que : $\sup(-A) = -\inf(A)$.
5. On note par $A - B$ l'ensemble des réels de la forme $a - b$ tels que $a \in A, b \in B$. Montrer que : $\sup(A - B) = \sup(A) - \inf(B)$.

Exercice 4:

Pour toute partie $A \subset \mathbb{R}$ non vide et tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $d(x, A) = \inf\{|x - a| : a \in A\}$ qui représente la distance de x à A .

1. Donner une interprétation géométrique de $d(x, A)$ sur la droite réelle.
2. Examiner les cas où $A = [0, 1]$ et $x = 1, 2, \frac{1}{2}$ ou -3 .
3. Justifier l'existence de $d(x, A)$ dans le cas général.
4. La borne inférieure $d(x, A)$ est-elle un plus petit élément ?
5. Calculer $d(x, \mathbb{Q})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Même question avec $d(x, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.
6. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $|d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|$.
7. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $s \in \mathbb{Z}$ tel que $d(x, \mathbb{Z}) = |x - s|$ et que $d(x, \mathbb{Z}) \leq \frac{1}{2}$.
(b) Déterminer les réels x tels que $d(x, \mathbb{Z}) = 0$ (resp. $d(x, \mathbb{Z}) = \frac{1}{2}$).
(c) Calculer $d(x, \mathbb{Z})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
(d) Montrer que l'application $x \mapsto d(x, \mathbb{Z})$ est paire et 1-périodique.

Problème : Calcul des sommes classiques

(Les parties II et III utilisent des résultats de la partie I, la partie IV est indépendante des autres parties.)

Partie I

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

1. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = e^{in\theta/2} \times \frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.$$

2. En déduire la valeur de :

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \text{ et } \sum_{k=0}^n \sin(k\theta).$$

3. Calculer les sommes suivantes : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^n \cos^2(kx)$. (On rappelle que : $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$.)

Partie II

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On pose : $A_n = \sum_{k=0}^n \cos^2(kx)$ et $B_n = \sum_{k=0}^n \sin^2(kx)$.

1. Calculer $A_n + B_n$.

2. Montrer que

$$A_n - B_n = \sum_{k=0}^n \cos(2kx).$$

3. En déduire une expression simplifiée de $A_n - B_n$ (on distinguera plusieurs cas selon les valeurs de $x \in \mathbb{R}$).
4. En déduire des expressions simplifiées de A_n et B_n (on distinguera plusieurs cas selon les valeurs de $x \in \mathbb{R}$).

Partie III

Soit $q \in \mathbb{R}$. On pose : $C = \sum_{k=1}^n q^k \cos(kx)$ et $D = \sum_{k=1}^n q^k \sin(kx)$.

1. Calculer $1 + C + iD$.

2. Déduire des expressions simplifiées de C et D .

Partie IV

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on définit $S_p(n) = \sum_{k=1}^n k^p$. Le but est de présenter une méthode pour calculer $S_p(n)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Rappeler les expressions de $S_0(n)$, $S_1(n)$ et $S_2(n)$.

2. Montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

3. On fixe $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ pour cette question.

(a) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^n (k+1)^{p+1} = S_{p+1}(n) + (n+1)^{p+1} - 1.$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Développer l'expression $(k+1)^{p+1}$ en utilisant le symbole de Newton.

(c) En déduire que :

$$\sum_{k=1}^n (k+1)^{p+1} = S_{p+1}(n) + \sum_{\ell=0}^p \binom{p+1}{\ell} S_{\ell}(n).$$

(d) À l'aide des questions précédentes, montrer que :

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1} \left((n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{\ell=0}^{p-1} \binom{p+1}{\ell} S_{\ell}(n) \right).$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Utiliser le résultat précédent pour retrouver l'expression de $S_3(n)$ donnée à la question 2 puis donner une expression simplifiée de $S_4(n)$.

*****Fin*****