

N.B :

♣ Chaque tentative pour tricher vaut un zéro.

♣ Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

♣ Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

♣ La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies.

Exercice 01:Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$.

1. Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables sur I , à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ et telles que $\frac{f'}{f} = \frac{g'}{g}$. Montrer que f et g sont proportionnelles, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $g = \lambda f$.
2. Soit $h : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 sur I telle que, pour tout $t \in I$, $|h(t)| = 1$. Si $t_0 \in I$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$ sont tels que $h(t_0) = e^{i\theta_0}$, montrer que la fonction θ définie sur I par

$$\forall t \in I, \quad \theta(t) = \theta_0 - i \int_{t_0}^t \frac{h'(s)}{h(s)} ds$$

est à valeurs réelles, de classe C^1 sur I et vérifie $h(t) = e^{i\theta(t)}$, pour tout $t \in I$.

3. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}^*$.
 - (a) Montrer que la fonction $g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto |f(t)|$ est de classe C^1 sur I .
 - (b) Soient $t_0 \in I$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tels que $f(t_0) = |f(t_0)|e^{i\theta_0}$. Montrer qu'il existe une unique fonction $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 telle que

$$\theta(t_0) = \theta_0 \quad \text{et} \quad \forall t \in I, \quad f(t) = |f(t)|e^{i\theta(t)}.$$

Problème:**Inégalités de Kolmogorov: Majorations des dérivées successives****Notation, définitions et rappels**

- Une application $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite bornée sur $\mathbb{R}$ s'il existe $M > 0$ tel que $|\psi(x)| \leq M$.
- Une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (avec I un intervalle de $\mathbb{R}$) est dite de classe C^n sur I , où $n \geq 1$ est un entier, si toutes les dérivées de f jusqu'à l'ordre n existent sur I (c'est-à-dire pour tout $i = 0, 1, \dots, n$, $f^{(i)}$ existe et est continue sur I , et si $f^{(n)}$ est continue sur I).
- Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on désigne par $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^n telles que f et sa dérivée n -ième $f^{(n)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout élément f de $\mathcal{F}_n$, on pose $M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(n)}(x)|$.

Le but de ce problème est d'établir que $\mathcal{F}_n$ est inclus dans $\mathcal{F}_k$ pour tout entier $k \in \{1, \dots, n-1\}$, puis d'obtenir une majoration de $M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$ en fonction de M_0 et M_n .

1ère Partie Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit f une application de classe C^{n+1} sur un intervalle I , et $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$.

1. On considère $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : pour tout $x \in [a, b]$,

$$\phi(x) = f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^n \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} K$$

où

$$K = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} \left(f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right).$$

- (a) Justifier que ϕ est dérivable sur $[a, b]$ et calculer $\phi'(x)$ pour $x \in [a, b]$.
(b) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\phi'(c) = 0$ et

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

2. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in I, |f^{(n+1)}(x)| \leq M$. Montrer que : $\forall (a, b) \in I^2$,

$$\left| f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2ème Partie Étude des cas $n = 2$ et $n = 3$

3. Étude du cas $n = 2$

Soit f une application non constante de $\mathcal{F}_2$. On rappelle que f et sa dérivée seconde f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$ et on pose $M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_2 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)|$.

1. Montrer que $M_2 > 0$ et que $M_0 > 0$.
2. Soit x un réel et soit $h > 0$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, trouver un majorant de $|f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)|$ en fonction de M_2 et h , puis en déduire que

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}.$$

3. Montrer que l'application f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que $M_1 \leq \sqrt{2M_0 M_2}$. (On pourra étudier la fonction $t \mapsto \frac{M_0}{t} + \frac{M_2 t}{2}$ définie sur $]0, +\infty[$.)

4. Étude du cas $n = 3$

Soit f une application non constante de $\mathcal{F}_3$. On rappelle que f et sa dérivée troisième $f^{(3)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$ et on pose $M_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$ et $M_3 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(3)}(x)|$.

1. Montrer que $M_3 > 0$ et que $M_0 > 0$.

2. Soit x un réel et soit $h > 0$. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, trouver un majorant des quantités

$$\left| f(x+h) - f(x) - hf'(x) - \frac{h^2}{2}f''(x) \right| \quad \text{et} \quad \left| f(x-h) - f(x) + hf'(x) - \frac{h^2}{2}f''(x) \right|$$

en fonction de M_3 et h , puis en déduire que

$$|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_3 h^2}{6} \quad \text{et} \quad |f''(x)| \leq \frac{4M_0}{h^2} + \frac{M_3 h}{3}.$$

3. Montrer que l'application f' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que $M_1 \leq \sqrt[3]{9M_0^2 M_3}$. (On pourra étudier la fonction $t \mapsto \frac{M_0}{t} + \frac{M_3 t^2}{6}$ définie sur $]0, +\infty[$.)
4. Montrer de même que l'application f'' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que $M_2 \leq \sqrt[3]{3M_0 M_3^2}$. (On pourra étudier la fonction $t \mapsto \frac{4M_0}{t^2} + \frac{M_3 t}{3}$ définie sur $]0, +\infty[$.)

3ème Partie Optimalité de la majoration obtenue dans le cas $n = 2$

On se propose ici d'établir que la majoration obtenue dans le cas $n = 2$ est optimale. À cet effet, on considère pour tout entier $p \geq 1$, la fonction $\omega_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur le segment $[0, 1]$ par :

$$\omega_p(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 - \frac{1}{2p} \\ 2 \sin(p\pi(1-x)) & \text{si } 1 - \frac{1}{2p} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

et prolongée à $\mathbb{R}$ par $\omega_p(-x) = \omega_p(x)$ et $\omega_p(x+2) = -\omega_p(x)$.

5. Étudier la continuité et la périodicité de la fonction ω_p pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, puis représenter graphiquement la fonction ω_1 sur $\mathbb{R}$.
6. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, et v_p la primitive de ω_p s'annulant en 0.
- (a) Donner l'expression de $v_p(x)$ pour $x \in [0, 1]$.
 - (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $v_p(-x)$ et $v_p(2+x)$ en fonction de $v_p(x)$.
 - (c) Représenter graphiquement v_1 .
7. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, et u_p la primitive de v_p s'annulant en 1.
- (a) Donner l'expression de $u_p(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$.
 - (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $u_p(-x)$ et $u_p(2+x)$ en fonction de $u_p(x)$.
 - (c) Représenter graphiquement u_1 .
8. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_0(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u_p(x)|$, $M_1(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u'_p(x)|$ et $M_2(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |u''_p(x)|$. Déterminer les réels $M_0(p)$, $M_1(p)$ et $M_2(p)$.
9. Déterminer les limites des suites $(M_0(p))_{p \in \mathbb{N}^*}$, $(M_1(p))_{p \in \mathbb{N}^*}$ et $(M_2(p))_{p \in \mathbb{N}^*}$.
10. La majoration de la question 1.c de la 2ème partie est-elle optimale ?