

N.B :

♣ Chaque tentative pour tricher vaut un zéro.

♣ Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

♣ Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

♣ La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies.

Exercice 01(07 points):1. Soit l'assertion : $\forall x > 0 \Rightarrow e^x \geq 1$. Est-elle vraie ou fausse? [1 point]2. Une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est **continue en un point** $a \in A$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Donner la négation de cette définition.

[1 point]

3. On note E l'ensemble des MPSI. On note G le sous-ensemble des élèves de CASABLANCA en MPSI. On va former des propositions logiques sur l'âge et l'amitié des éléments de E :

- si x et y sont deux élèves de E , on notera $x \leq y$ pour dire que x est plus jeune que y (ou y plus vieux que x).
- pour deux élèves x, y , on note $x \heartsuit y$ pour dire que x aime bien y . Et ce n'est pas forcément réciproque! Si y n'aime pas x , alors on note $y \not\heartsuit x$.

(a) Traduire sous forme de proposition mathématique les phrases suivantes :

- "Tous les élèves de CASABLANCA aiment quelqu'un." [1 point]
- "Le plus âgé des élèves n'est pas de CASABLANCA." [1 point]
- "Les amis de mes amis sont mes amis." [1 point]

(b) Traduire en français les propositions mathématiques suivantes.

- $\exists x \in E, \forall y \in G, x \heartsuit y$ [1 point]
- $\forall x, y \in E, (x \in G \text{ et } y \notin G) \Rightarrow (y \not\heartsuit x)$ [1 point]

Exercice 02(04 points):On considère quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D$.

- (a) Montrer que $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective, [2 points]
(b) Montrer que $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective. [2 points]

2. Dans cette question on va prendre $D = A$.Montrer que si $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ sont injectives et $f \circ h \circ g$ surjective alors f, g et h sont bijectives.3. Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Montrer que :

- f est injective $\Leftrightarrow \forall A$ partie de $E, A = f^{-1}(f(A))$. [2 points]

(b) f est surjective $\Leftrightarrow \forall B$ partie de $F, f(f^{-1}(B)) = B$.

[2 points]

Exercice 03(11 points):

On considère les applications suivantes :

1. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x - y, x + y)$.

(a) Déterminer $f^{-1}(\{(0, 1), (1, 0)\})$.

[2 points]

(b) f est-elle injective ? est-elle surjective ? est-elle bijective ?

[2 points]

2. $g : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y\sqrt{2}$.

(a) Déterminer $g^{-1}(\{\sqrt{3}\})$.

[1 point]

(b) g est-elle injective ? est-elle surjective ? est-elle bijective ?

[2 points]

3. On considère l'application $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}^+, (m, n) \mapsto \frac{m}{n}$.

(a) Déterminer $f^{-1}(\mathbb{N})$.

[2 points]

(b) f est-elle surjective ? est-elle bijective ?

[2 points]

Exercice 05(04 points):

On considère la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = \frac{z - 2}{z + i}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, z \neq -i.$$

1. Montrer que f est bijective en précisant l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée.

[1 point]

2. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$.

[1 point]

3. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.

[1 point]

4. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que $f(z) \in i\mathbb{R}$.

[1 point]

Fin De l'épreuve

*******Bonne chance*******