

N.B :

♣ Chaque tentative pour tricher vaut un zéro.

♣ Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

♣ Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, vous devez le signaler très lisiblement sur votre copie, en proposer la correction et poursuivre l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez la (ou les) mentionner explicitement.

♣ La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies.

Exercice 01: (19 points)

On considère une partie $A \subset \mathbb{R}$ non vide et bornée :

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \forall a \in A, |a| \leq M.$$

La partie A admet donc une borne supérieure $\sup A$ et une borne inférieure $\inf A$. On définit l'ensemble des distances entre éléments de A :

$$\mathcal{D}_A = \{|y - x| \mid (x, y) \in A^2\}.$$

1. Énoncer la caractérisation de la borne inférieure en utilisant les epsilons et donner la caractérisation séquentielle de la borne supérieure. [2 points]

2. Montrer l'équivalence: [2 points]

$$M = \sup(A) \Leftrightarrow \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}}, M = \lim a_n$$

3. Montrer que la partie $\mathcal{D}_A$ possède une borne supérieure. On notera $\delta(A) = \sup \mathcal{D}_A$ cette borne supérieure que l'on appelle diamètre de la partie A . [2 points]

4. Montrer que :

$$\delta(A) \leq \sup A - \inf A.$$

[2 points]

5. Montrer que:

$$\delta(A) = \sup A - \inf A.$$

[2 points]

6. On considère une nouvelle partie $B \subset \mathbb{R}$ non vide et bornée telle que $B \cap A \neq \emptyset$. Montrer que $\delta(A \cup B)$ existe, puis que: [3 points]

$$\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B).$$

7. On considère maintenant une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(y) - f(x)| \leq |y - x|.$$

(a) Définir les ensembles $f^{-1}(A)$ et $f(A)$. [2 points]

(b) Montrer que la partie $f(A)$ est non vide et bornée (elle admet donc un diamètre noté $\delta(f(A))$). [2 points]

(c) Montrer que:

$$\delta(f(A)) \leq \delta(A).$$

[2 points]

Exercice :02(3 points)

Résoudre le système d'équations linéaires suivant en utilisant le pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ 2x - y + 3z = 15, \\ 3x + y + 2z = 14. \end{cases}$$

Exercice :03(6 points)1. Soit a un nombre réel et n un entier naturel. Résoudre l'équation

$$(z + 1)^n = \cos 2na + i \sin 2na$$

d'inconnue z . En déduire une expression simple de

[3 points]

$$P_n(a) = \prod_{k=0}^{n-1} \sin \left(a + \frac{k\pi}{n} \right).$$

2. Calculer la somme :

[3 points]

$$\sum_{k=0}^n (k+2)2^k.$$

Problème : Calcul des sommes classiques(31 pts)

(Les parties II et III utilisent des résultats de la partie I, la partie IV est indépendante des autres parties.)

Partie ISoit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

1. Montrer que :

[2 points]

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = e^{in\theta/2} \times \frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.$$

2. En déduire la valeur de :

[2 points]

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \text{ et } \sum_{k=0}^n \sin(k\theta).$$

3. Calculer les sommes suivantes : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^n \cos^2(kx)$.

[2 points]

Partie II

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On pose : $A_n = \sum_{k=0}^n \cos^2(kx)$ et $B_n = \sum_{k=0}^n \sin^2(kx)$.

1. Calculer $A_n + B_n$. [1 point]

2. Montrer que : [2 points]

$$A_n - B_n = \sum_{k=0}^n \cos(2kx).$$

3. En déduire une expression simplifiée de $A_n - B_n$. [2 points]

4. En déduire des expressions simplifiées de A_n et B_n . [2 points]

Partie III

Soit $q \in \mathbb{R}$. On pose : $C = \sum_{k=1}^n q^k \cos(kx)$ et $D = \sum_{k=1}^n q^k \sin(kx)$.

1. Calculer $1 + C + iD$. [2 points]

2. Déduire des expressions simplifiées de C et D . [2 points]

Partie IV

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on définit $S_p(n) = \sum_{k=1}^n k^p$. Le but est de présenter une méthode pour calculer $S_p(n)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Rappeler les expressions de $S_0(n)$, $S_1(n)$ et $S_2(n)$. [3 points]

2. Montrer que: [2 points]

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

3. On fixe $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ pour cette question.

(a) Montrer que : [2 points]

$$\sum_{k=1}^n (k+1)^{p+1} = S_{p+1}(n) + (n+1)^{p+1} - 1.$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Développer l'expression $(k+1)^{p+1}$ en utilisant le symbole de Newton. [1 point]

(c) En déduire que : [2 points]

$$\sum_{k=1}^n (k+1)^{p+1} = S_{p+1}(n) + \sum_{\ell=0}^p \binom{p+1}{\ell} S_{\ell}(n).$$

(d) À l'aide des questions précédentes, montrer que :

[2 points]

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1} \left((n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{\ell=0}^{p-1} \binom{p+1}{\ell} S_\ell(n) \right).$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Utiliser le résultat précédent pour retrouver l'expression de $S_3(n)$ donnée à la question 2 puis donner une expression simplifiée de $S_4(n)$. [2 points]

Fin De l'épreuve

*******Bonne chance*******

MPSI3