

♠ N'oubliez pas :

- de numéroter vos copies, et d'encadrer ou de souligner les résultats à la fin de chaque question ;
- qu'en cas de besoin, vous avez le droit d'admettre le résultat d'une question pour passer à la suivante ;
- d'accorder du soin à la présentation et à votre rédaction (faites des phrases, n'oubliez pas les quantificateurs, soyez précis dans votre argumentation).

♠ Enfin, ce sujet peut se révéler trop long : traitez en priorité les questions qui vous semblent les plus simples.

Exercice 01: (18 points)

On considère une partie $A \subset \mathbb{R}$ non vide et bornée :

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \forall a \in A, |a| \leq M.$$

La partie A admet donc une borne supérieure $\sup A$ et une borne inférieure $\inf A$. On définit l'ensemble des distances entre éléments de A :

$$\mathcal{D}_A = \{|y - x| \mid (x, y) \in A^2\}.$$

1. Enoncer la caractérisation de la borne inférieure en utilisant les epsilons et donner la caractérisation séquentielle de la borne supérieure. [2 points]
2. Montrer l'équivalence: [2 points]

$$M = \sup(A) \Leftrightarrow \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}}, M = \lim a_n$$

3. Montrer que la partie $\mathcal{D}_A$ possède une borne supérieure. On notera $\delta(A) = \sup \mathcal{D}_A$ cette borne supérieure que l'on appelle diamètre de la partie A . [2 points]
4. Montrer que :

$$\delta(A) \leq \sup A - \inf A.$$

[2 points]

5. Montrer que:

$$\delta(A) = \sup A - \inf A.$$

[2 points]

6. On considère une nouvelle partie $B \subset \mathbb{R}$ non vide et bornée telle que $B \cap A \neq \emptyset$. Montrer que $\delta(A \cup B)$ existe, puis que $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B)$. [3 points]
7. On considère maintenant une application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(y) - f(x)| \leq |y - x|.$$

- (a) Définir les ensembles $f^{-1}(A)$ et $f(A)$. [2 points]
- (b) Montrer que la partie $f(A)$ est non vide et bornée (elle admet donc un diamètre noté $\delta(f(A))$). [2 points]

(c) Montrer que:

$$\delta(f(A)) \leq \delta(A).$$

[2 points]

Exercice: 02(26 points)

1. On considère la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

et, pour tout entier $n \geq 0$,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

(a) Calculer les premiers termes de la suite (F_n) pour $n = 2, 3, 4, 5, 6$. **[2 points]**(b) Montrer que la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante. **[2 points]**(c) Déterminer le terme F_n de la suite (F_n) en fonction de n pour tous $n \in \mathbb{N}$. **[5 points]**(d) En déduire la nature de la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$. **[1 point]**2. Soient α et β deux réels positifs tels que $\alpha + \beta \neq 0$ et $\alpha \leq \beta$; on note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par la donnée de $u_0 = \alpha, u_1 = \beta$ et la relation

$$u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}, n \in \mathbb{N}.$$

(a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, u_n > 0$. **[2 points]**(b) Quelles sont les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$? **[2 points]**(c) On suppose que $u_1 \leq u_2$, montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. **[2 points]**(d) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0. **[2 points]**(e) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geq 1$ et que, pour tout $n \geq N, u_n \geq 1$. **[1 point]**(f) On pose $a = \frac{1-\sqrt{13}}{6}$ et $z_n = |\sqrt{u_n} - 2|, n \in \mathbb{N}$.i. Montrer que, pour tout $n \geq N$,

$$z_{n+2} \leq \frac{1}{3}(z_{n+1} + z_n)$$

[2 points]ii. Soit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par:

$$x_n = z_{n+1} - az_n, n \in \mathbb{N},$$

montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$x_n \leq \left(\frac{1}{3} - a\right)^n x_0$$

[3 points]iii. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 4. **[2 points]**

Exercice :03(3 points)

Résoudre le système d'équations linéaires suivant en utilisant le pivot de Gauss :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3, \\ 2x - y + 3z = 15, \\ 3x + y + 2z = 14. \end{cases}$$

Exercice :04(4 points)

Soit a un nombre réel et n un entier naturel. Résoudre l'équation

$$(z + 1)^n = \cos 2na + i \sin 2na$$

d'inconnue z . En déduire une expression simple de

$$P_n(a) = \prod_{k=0}^{n-1} \sin \left(a + \frac{k\pi}{n} \right).$$

Problème : Calcul des sommes classiques

(Les parties II et III utilisent des résultats de la partie I, la partie IV est indépendante des autres parties.)

Partie I

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

1. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = e^{in\theta/2} \times \frac{\sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.$$

2. En déduire la valeur de :

$$\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \text{ et } \sum_{k=0}^n \sin(k\theta).$$

3. Calculer les sommes suivantes : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^n \cos^2(kx)$. (On rappelle que : $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$.)

Partie II

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On pose : $A_n = \sum_{k=0}^n \cos^2(kx)$ et $B_n = \sum_{k=0}^n \sin^2(kx)$.

1. Calculer $A_n + B_n$.

2. Montrer que

$$A_n - B_n = \sum_{k=0}^n \cos(2kx).$$

3. En déduire une expression simplifiée de $A_n - B_n$ (on distinguera plusieurs cas selon les valeurs de $x \in \mathbb{R}$).

4. En déduire des expressions simplifiées de A_n et B_n (on distinguera plusieurs cas selon les valeurs de $x \in \mathbb{R}$).

Partie III

Soit $q \in \mathbb{R}$. On pose : $C = \sum_{k=1}^n q^k \cos(kx)$ et $D = \sum_{k=1}^n q^k \sin(kx)$.

1. Calculer $1 + C + iD$.
2. Dédire des expressions simplifiées de C et D .

Partie IV

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, on définit $S_p(n) = \sum_{k=1}^n k^p$. Le but est de présenter une méthode pour calculer $S_p(n)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Rappeler les expressions de $S_0(n)$, $S_1(n)$ et $S_2(n)$.
2. Montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

3. On fixe $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ pour cette question.

(a) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^n (k+1)^{p+1} = S_{p+1}(n) + (n+1)^{p+1} - 1.$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Développer l'expression $(k+1)^{p+1}$ en utilisant le symbole de Newton.

(c) En déduire que :

$$\sum_{k=1}^n (k+1)^{p+1} = S_{p+1}(n) + \sum_{\ell=0}^p \binom{p+1}{\ell} S_{\ell}(n).$$

(d) À l'aide des questions précédentes, montrer que :

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1} \left((n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{\ell=0}^{p-1} \binom{p+1}{\ell} S_{\ell}(n) \right).$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Utiliser le résultat précédent pour retrouver l'expression de $S_3(n)$ donnée à la question 2 puis donner une expression simplifiée de $S_4(n)$.

Bonne chance