

Exercice 1 : Soit E un ensemble. Montrer par un raisonnement direct et par contraposée l'assertion suivante :

$\forall (A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3 \quad (A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Leftrightarrow B = C.$

Exercice 2 : Montrer que $\{z \in \mathbb{C}, |z + i| = |z - i|\} = \mathbb{R}.$

Exercice 3 : Soit l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}, f : x \mapsto x^2.$

1. Déterminer les ensembles suivants :

$$f([-3, -1]), f([-2, 1]), f([-3, -1] \cup [-2, 1]) \text{ et } f([-3, -1] \cap [-2, 1])$$

2. Déterminer les ensembles suivants :

$$f^{-1}(]-\infty, 2]), f^{-1}([1, +\infty[), f^{-1}(]-\infty, 2] \cap [1, +\infty[), \\ f^{-1}(]-\infty, 1]) \cup [2, +\infty[)$$

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x^2 + 3.$ Déterminer $f^{-1}([0, +\infty[), f^{-1}(]-\infty, -3])$ et $f([-2, 4]).$

Exercice 5 : Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$

Déterminer $f([0, 1]), f([-3, 1])$ et $f^{-1}([\frac{1}{4}, 1]).$

Exercice 6 : Soient E et F des ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application. Soit $B \subset F.$ Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$ et qu'en général, il n'y a pas égalité (donner un contre-exemple).

Exercice 7 : Soient E et F des ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application. Soit $A \subset E,$ montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$ et qu'en général, il n'y a pas égalité (donner un contre-exemple).

Exercice 8 : Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application. Soient A et B deux sous-ensembles de $E.$

1. Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et donner un exemple où il n'y a pas égalité.
2. Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$

Exercice 9 : Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application. Soient A et B deux sous-ensembles de $F.$

1. Montrer que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$
2. Montrer que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$
3. Détermination des propriétés d'une fonction

Exercice 10 : f est-elle bijective?

$$f : \begin{cases} [1, +\infty[& \rightarrow [0, +\infty[\\ x & \mapsto x^2 - 1 \end{cases}$$

Exercice 11 : Soit $n \in \mathbb{N}^*.$ Déterminer l'image de

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R}^{+*} & \rightarrow \mathbb{R}^{+*} \\ x & \mapsto x^n \ln(x) \end{cases}.$$

Exercice 12 : Soit $f : \begin{cases}]-1, 1[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln \frac{1-x}{1+x} \end{cases}.$ Est-elle injective? surjective?

Exercice 13 : Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto (x - 2y, 2x + 3y) \end{cases}.$

1. Montrer que f est bijective.
2. Soit $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 2x + y = 1\}.$ Déterminer $f(\Delta)$ et $f^{-1}(\Delta).$

Exercice 14 : Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow \mathbb{N} \\ x & \mapsto x + 1 \end{cases} \text{ et } g : \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow \mathbb{N} \\ x & \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \end{cases}$$

1. Ces fonctions sont-elles injectives? surjectives?

2. Préciser $g \circ f$ et $f \circ g.$

Exercice 15 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 - x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer que $f \circ f = id.$ Que peut-on en déduire sur f ?

Exercice 16 : L'application

$$f : \begin{matrix} \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 \\ (n, m) & \longmapsto & (n + m, n - m) \end{matrix}.$$

est-elle injective? surjective?

Exercice 17 : On considère l'application

$$f : \begin{matrix} [2, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 8} \end{matrix}$$

Montrer que f est injective. En déduire que f induit une bijection $\tilde{f}$ sur un intervalle qu'on précisera et préciser la bijection réciproque de $\tilde{f}.$

Exercice 18 : Soit

$$f : \begin{matrix} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \\ (u, v) & \longmapsto & (uv, \frac{u}{v}) \end{matrix}$$

Montrer que f est bijective et déterminer $f^{-1}.$

Exercice 19 : Soit

$$f : \begin{matrix} \mathbb{C}^2 & \rightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (z, z') & \mapsto & (2z + z', 3z - z') \end{matrix}$$

Vérifier que f est bijective et donner l'expression de $f^{-1}.$

Exercice 20 : Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ surjective telle que $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \geq n,$ montrer que $f(0) = 0.$

Exercice 21 : On considère quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D.$

1. Montrer que $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective,
2. Montrer que $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.

Exercice 22 : Soient E et F deux ensembles et $h : E \rightarrow E$ une application. Montrer que h^2 bijective implique h bijective puis montrer que s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que h^n est bijective, alors h est bijective.

Exercice 23 : On considère quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D.$

Montrer que:

$$(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives}) \Leftrightarrow (f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives})$$

Exercice 24 : Soient $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A.$ Montrer que si $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ sont injectives et $f \circ h \circ g$ surjective alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 25 : Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux applications et

$$h : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto (f(x), g(x)) \end{matrix}$$

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors h est injective.
2. On suppose f et g surjectives. h est-elle surjective?

Exercice 26 : Soit E un ensemble.

1. Montrer qu'il existe une injection $E \rightarrow \mathcal{P}(E)$.
2. Soient $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ et $A := \{x \in E, x \notin f(x)\}$. Montrer que $A \notin \text{Im}(f)$. En déduire qu'il n'existe pas de bijection $E \rightarrow \mathcal{P}(E)$.

Exercice 27 : Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow E$ une application telle que $f = f \circ f \circ f$. Montrer que

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective}.$$

Exercice 28 : Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow E$ une application telle que $f \circ f \circ f = \text{Id}_E$, montrer que f est bijective et donner une expression de f^{-1} .

Exercice 29 : Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application, montrer que

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow (\forall (A, A') \in \mathcal{P}(E)^2, f(A \cap A') = f(A) \cap f(A'))$$

Exercice 30 : Soient A, B deux parties non-vides de E , on définit la fonction suivante:

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}$$

Montrer que :

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow A \cup B = E.$$

Exercice 31 : Soit E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application, on dit que f admet un inverse à gauche s'il existe $f : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{id}_E$.

1. Montrer que si f admet un inverse à gauche alors elle est injective.
2. Montrer la réciproque.

Exercice 32 : Soit $f : X \rightarrow Y$. Montrer que pour tout $B \in \mathcal{P}(Y)$, $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$.

Exercice 33 : Soient X et Y deux ensembles et $f : X \rightarrow Y$ une application. Montrer l'équivalence :
 f surjective $\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{P}(Y), f(f^{-1}(B)) = B$.

Exercice 34 : Soient X et Y deux ensembles et $f : X \rightarrow Y$ une application. Montrer l'équivalence :
 f injective $\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(X)^2, f^{-1}(f(A)) = A$.

Exercice 35 : Soient X et Y deux ensembles et $f : X \rightarrow Y$ une application. Montrer l'équivalence :
 f est bijective $\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(X), f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$.

Exercice 36 : Soient X et Y deux ensembles et $f : X \rightarrow Y$ une application. On note

$$\Phi_f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) & \longrightarrow & \mathcal{P}(Y) \\ A & \longmapsto & f(A) \end{array}$$

. Montrer que :

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow \Phi_f \text{ est injective.}$$

Exercice 37 : Soit $f : X \rightarrow Y$. On note

$$\Psi_f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(Y) & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) \\ B & \longmapsto & f^{-1}(B) \end{array}$$

montrer que :

$$f \text{ est surjective} \Leftrightarrow \Psi_f \text{ est injective.}$$

Memo

- Comment montrer une inclusion $E \subset F$? Prendre un élément de E et montrer qu'il appartient à F .
- Comment montrer que deux ensembles sont égaux?
 - Procéder par double inclusion
 - Raisonner par équivalence.
- Comment déterminer l'image réciproque d'un ensemble ? Appliquer la définition: déterminer les antécédents des éléments de l'ensemble.
- Comment déterminer l'image d'une fonction/ d'un ensemble?
 - Chercher pour quel(s) Y l'équation $f(X) = Y$ admet des solutions
 - Dresser son tableau de variations (dans le cas d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)
- Comment déterminer si une fonction est surjective?
 - Déterminer si l'équation $f(X) = Y$ admet des solutions
 - Exhiber un élément qui ne possède pas d'antécédent
 - Dresser le tableau de variations
- Comment déterminer si une fonction est injective?
 - Prendre deux éléments ayant même image et déterminer s'ils sont nécessairement égaux.
 - Trouver deux éléments distincts ayant même image
 - Déterminer ses variations (si c'est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)
- Comment savoir si une fonction est bijective?
 - Étudier l'équation $f(X) = Y$
 - Exhiber l'inverse de la fonction
 - Étudier l'injectivité et la surjectivité
- Comment déterminer la bijection réciproque d'une fonction ? Résoudre $f(X) = Y$ c'est-à-dire exprimer Y en fonction de X .
- Comment montrer qu'une fonction induit une bijection?
 - Étudier l'équation $f(X) = Y$
 - Dresser le tableau de variations