

Exercice 1 : On considère la relation R définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x R y \iff x^2 - y^2 = x - y.$$

1. Montrer que R est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence de x pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 :

On considère la relation R définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x R y \iff x e^y = y e^x.$$

1. Montrer que R est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2. Discuter selon x le nombre d'éléments de la classe d'équivalence de x .

Exercice 3 :

Congruence modulo n .

Soit n un entier naturel non nul. On définit la congruence modulo n par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, \quad x \equiv y \pmod{n} \quad \text{si} \quad \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x - y = nk.$$

1. Montrer que la congruence modulo n est une relation d'équivalence dans $\mathbb{Z}$.
2. Déterminer :
 - a) $\bar{0}$
 - b) $\bar{x}$ où $x \in \mathbb{Z}$
 - c) $\bar{n}$

3. On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalences. Montrer que :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}.$$

4. Montrer que : pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{Z}^4$,

$$\begin{cases} x \equiv y \pmod{n} \\ z \equiv t \pmod{n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z \equiv y + t \pmod{n} \\ xz \equiv yt \pmod{n} \end{cases}$$

Exercice 4 :

Soient $E = \{a, b, c, d\}$ et A une partie de E . R la relation sur $\mathcal{P}(E)$ définie par :

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2, \quad X R Y \quad \text{si} \quad X \cap A = Y \cap A.$$

1. Montrer que R est une relation d'équivalence.
2. Déterminer les classes d'équivalences dans le cas où $A = \{a, b\}$.

Exercice 5 :

Parties saturées pour une relation d'équivalence.

Soit R une relation d'équivalence sur un ensemble non vide E . Pour toute partie non vide A de E , on note $s(A) = \bigcup_{x \in A} [x]$.

1. Comparer A et $s(A)$.
2. Simplifier $s(s(A))$.
3. Montrer que pour tout $x \in E$, $x \in s(A) \iff [x] \cap A \neq \emptyset$.
4. En déduire $s(E) \setminus s(A)$.

5. Montrer que pour toute famille de parties non vides $(A_i)_{i \in I}$,

$$s\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} s(A_i) \quad \text{et} \quad s\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} s(A_i).$$

Exercice 6 :

Parties saturées pour une relation d'équivalence.

Soit R une relation d'équivalence sur un ensemble non vide E . Pour toute partie non vide A de E , on note $s(A) = \bigcup_{x \in A} [x]$.

1. Comparer A et $s(A)$.
2. Simplifier $s(s(A))$.
3. Montrer que pour tout $x \in E$, $x \in s(A) \iff [x] \cap A \neq \emptyset$.
4. En déduire $s(E) \setminus s(A)$.
5. Montrer que pour toute famille de parties non vides $(A_i)_{i \in I}$,

$$s\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} s(A_i) \quad \text{et} \quad s\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} s(A_i).$$

Exercice 7 :

On définit dans $\mathbb{R}^2$ la relation $\leq$ par :

$$(x, y) \leq (x', y') \quad \text{si} \quad (x \leq x' \text{ et } y \leq y').$$

1. Montrer que $\leq$ est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?
2. On pose : $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
 - a) A admet-il un plus grand (resp. un plus petit) élément ?
 - b) Montrer que : $\sup A = (1, 1)$ et $\inf A = (-1, -1)$.
 - c) A est-il le produit cartésien de deux intervalles ?

Exercice 8 :

Ordre lexicographique.

On définit dans $\mathbb{R}^2$ la relation $\prec$ par : $(x, y) \prec (x', y')$ si $(x < x')$ ou $(x = x' \text{ et } y \leq y')$.

1. Montrer que $\prec$ est une relation d'ordre total.

Exercice 9 :

Un Théorème du point fixe.

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné tel que :

- i) E admet un plus petit élément.
- ii) Toute partie non vide de E admet une borne supérieure.

Soit $f : E \rightarrow E$ une application croissante. On pose $A = \{x \in E \mid x \leq f(x)\}$.

1. Montrer que A admet une borne supérieure. On note : $a = \sup(A)$.
2. Montrer que $f(a) = a$ (On dit que a est un point fixe de f).

Exercice 10 :

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné tel que toute partie non vide de E admet un plus grand et un plus petit élément.

1. Montrer que l'ordre $\leq$ est total.

2. Montrer que E est fini.

Exercice 11 :

Décomposition canonique d'une application.

Soient $f : E \rightarrow F$ une application et R la relation définie dans E par :

$$xRy \text{ si } f(x) = f(y)$$

1. Montrer que R est une relation d'équivalence sur E .

2. On considère les applications :

$$E \rightarrow E/R \rightarrow f(E) \rightarrow F$$

$$x \rightarrow \bar{x} \rightarrow f(x) \rightarrow f(x)$$

a) Montrer qu'elles sont bien définies.

b) Montrer que :

i) s est surjective (la surjection canonique)

ii) b est bijective (la bijection canonique)

iii) i est injective (l'injection canonique)

c) Établir que :

$$f = i \circ b \circ s \quad (\text{c'est la décomposition canonique de } f)$$

Exercice 12 :

On définit dans $\mathbb{R}^2$ la relation $\preceq$ par :

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \preceq (x', y') \text{ si } |x' - x| \leq y' - y$$

1. Vérifier que c'est une relation d'ordre.

2. Cet ordre est-il total ?

3. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y^2 \leq 1\}$. Justifier qu'il admet une borne supérieure et déterminer $\sup(A)$.

Exercice 13 :

Soit E un ensemble non vide, on note

$$\Omega = \{(A, f) \mid A \text{ partie non vide de } E \text{ et } f \in E^A\}.$$

On considère la relation définie sur Ω par :

$$(A, f) \preceq (B, g) \text{ si } f = g|_A$$

où $g|_A$ est la restriction de g sur A .

1. Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre sur Ω .

2. L'ordre $\preceq$ est-il total ?

3. Donner une condition pour que $\{(A, f), (B, g)\}$ soit majorée et donner la borne supérieure dans ce cas.

4. Même chose avec minorée.

Exercice 14 :

On considère la relation définie sur $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ par :

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad (x, y) R (x', y') \text{ si } x - y = x' - y'$$

1. Montrer que R est une relation d'équivalence.

2. Pour $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on note $\overline{(x, y)}$ sa classe d'équivalence modulo R . Montrer que l'application $\varphi : (\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*)/R \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par

$$\overline{(x, y)} \rightarrow x - y$$

est bien définie et bijective.

3. Pour $\overline{(x, y)}, \overline{(x', y')} \in (\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*)/R$, on note

$$\overline{(x, y)} + \overline{(x', y')} = \overline{(x + x', y + y')}$$

Justifier que :

a) $+$ est bien définie sur $(\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*)/R$

b) $((\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*)/R, +)$ est un groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$

Exercice 15 :

La conjugaison.

- $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

- $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ désigne l'ensemble des bijections de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

On définit la relation $\sim$ (la conjugaison) dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2, f \sim g \text{ si } \exists h \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f = h \circ g \circ h^{-1}$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. Donner la classe d'équivalence de f dans les cas suivants :

a) $f = \text{id}_{\mathbb{R}}$

b) $f = 0$

3. Montrer que si f et g sont conjuguées, alors elles ont même comportement asymptotique.

4. Montrer que les fonctions : $u : x \rightarrow 2x$ et $v : x \rightarrow 2x\sqrt{1+x^2}$ sont conjuguées.

Exercice 16 :

Relation de Pré-ordre.

Soient E un ensemble non vide et R une relation sur E réflexive et transitive (on dit que c'est une relation de pré-ordre). On définit la relation S dans E par :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad xSy \text{ si } xRy \text{ et } yRx$$

1. Montrer que S est une relation d'équivalence.

2. Pour tout $(\bar{x}, \bar{y}) \in (E/S)^2$, on note $\bar{x} \preceq \bar{y}$ si xRy .

a) Montrer que la relation $\preceq$ est bien définie sur E/S .

b) Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre dans E/S .