

Exercice: 1

Déterminer les réels x pour lesquels l'assertion suivante est vraie :

$$\forall y \in [0, 1], x \geq y \implies x \geq 2y.$$

Exercice: 2

On rappelle que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

1. Démontrer que si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a + b\sqrt{2} = 0$, alors $a = b = 0$.
2. En déduire que si m, n, p et q sont des entiers relatifs, alors

$$m + n\sqrt{2} = p + q\sqrt{2} \iff (m = p \text{ et } n = q).$$

Exercice: 3

Le but de cet exercice est de démontrer par contraposition la propriété suivante, pour $n \in \mathbb{N}^*$: "Si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair."

1. Écrire la contraposée de la proposition précédente.
2. En remarquant qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 3\}$ (à justifier), prouver la contraposée.
3. A-t-on démontré la propriété de l'énoncé?

Exercice: 4

Démontrer que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $n = 2^p(2q + 1)$ où $(p, q) \in \mathbb{N}$.

Exercice: 5

[Reste dans la division par quatre d'une somme de deux carrés]

Démontrer que si n est la somme de deux carrés, alors le reste de la division euclidienne de n par 4 est toujours différent de 3.

Exercice: 6

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles

que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \times f(y) - f(x \times y) = x + y.$$

Exercice: 7

Montrer par contraposée que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad x \neq 1 \implies \frac{4x^2 + 5}{2x^2 + 7} \neq 1$
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad x \neq y \implies (4x + 5)(2y + 7) \neq (4y + 5)(2x + 7).$
3. si a et b deux réels tels que $a + b = 2$ alors $a \geq 1$ ou $b \geq 1$.
4. Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$, montrer que $\sum_{k=1}^n x_k = n$ alors il existe $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $x_k \geq 1$.

Exercice: 8

En raisonnant par l'absurde, démontrer le résultats suivant :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $4n + 1$ objets sont rangés dans n tiroirs.

Montrer que l'un des tiroirs contient au moins 5 objets.

Exercice: 9

[Nombres dans un intervalle]

Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On se donne $n + 1$ réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ de $[0, 1]$ vérifiant $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1$. On veut démontrer par l'absurde la propriété suivante : Il y a deux de ces réels qui sont distants de moins de $1/n$.

1. Écrire à l'aide de quantificateurs et des valeurs $x_i - x_{i-1}$ une formule logique équivalente à la propriété.
2. Écrire la négation de cette formule logique.
3. Rédiger une démonstration par l'absurde de la propriété (on pourra montrer que $x_n - x_0 > 1$).
4. Donnez-en une preuve en utilisant le principe des tiroirs.

Exercice: 10

1. Soit $x \in [0, 1]$, montrer que $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.
2. Dédurre que pour tous $a, b, c \in [0, 1]$, le minimum de $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ est inférieur à $\frac{1}{4}$.

Exercice: 11

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que : $1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = (n+1)^2$.
2. Montrer que : $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = 2n^4 - n^2$.

Exercice: 12

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2, & u_1 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}; & u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}; u_n = 2^n + 3^n$.

Exercice: 13

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$
2. Déterminer un réel x non entier vérifiant la propriété $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.

Exercice: 14

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$2^{n-1} \leq n! \leq n^n.$$

Exercice: 15

On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$a_0 = a_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1}.$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq a_n \leq n^2$.

Exercice: 16

Soit $(u_n)_n$ la suite réelle définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k$$

Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 2^{n-1}$.

Exercice: 17

Démontrer que tout entier $n \geq 1$ peut s'écrire comme somme de puissances de 2 toutes distinctes.

Exercice: 18

Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ possédant les trois propriétés suivantes :

1. $1 \in A$;
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \in A \implies 2n \in A$;
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, n+1 \in A \implies n \in A$.

Démontrer que $A = \mathbb{N}^*$.

Exercice: 19

Prouver le résultat suivant par récurrence : si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des réels strictement positifs tels que $a_1 a_2 \dots a_n = 1$, alors $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$.

Exercice: 20

Prouver que si les $a_k > -1$ ($k = 1, \dots, n$) sont de même signe, on a alors

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$