

Exercice: 1

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = (2 + 2i)^6$
2. $z_2 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$
3. $z_3 = \frac{(1+i)^{2000}}{(i-\sqrt{3})^{1000}}$

Exercice: 2

Trouver les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $(1+i\sqrt{3})^n$ soit un réel positif.

Exercice: 3

Soient $a, b \in]0, \pi[$. Écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

- | | |
|-----------------------|--------------------------------------|
| 1. $z_1 = 1 + e^{ia}$ | 3. $z_3 = e^{ia} + e^{ib}$ |
| 2. $z_2 = 1 - e^{ia}$ | 4. $z_4 = \frac{1+e^{ia}}{1+e^{ib}}$ |

Exercice: 4

Déterminer les nombres complexes non nuls z tels que z , $\frac{1}{z}$ et $1-z$ aient le même module.

Exercice: 5

Soit z un nombre complexe, $z \neq 1$. Démontrer que : $|z| = 1 \iff \frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}$.

Exercice: 6

Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants : $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 8 - 6i$.

Exercice: 7

Déterminer les racines carrées de $Z = \sqrt{3} + i$ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice: 8

Résoudre les équations suivantes :

1. $z^3 = 1 + i\sqrt{3}$
2. $z^6 = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$
3. $z^5 = \frac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2}$

Exercice: 9

Résoudre les équations suivantes :

1. $(z-1)^5 = (z+1)^5$
2. $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 = 0$
3. $(z+i)^n = (z-i)^n$

4. $4iz^3 + 2(1+3i)z^2 - (5+4i)z + 3(1-7i) = 0$, sachant qu'elle admet une racine réelle.

Exercice: 10

Déterminer l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la relation demandée :

1. $\arg(z-2) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$
2. $\arg(z-2) = \frac{\pi}{2} [\pi]$
3. $\arg(iz) = \frac{\pi}{4} [\pi]$
4. $\arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$
5. $\arg\left(\frac{z-2i}{z-1+i}\right) = \frac{\pi}{2} [\pi]$

Exercice: 11

Déterminer le lieu géométrique des points M dont l'affixe z vérifie

1. $|z-i| = |z+i|$
2. $\frac{|z-3+i|}{|z+5-2i|} = 1$
3. $|(1+i)z-2i| = 2$
4. $|3+iz| = |3-iz|$

Exercice: 12

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations géométriques données par l'écriture complexe suivante :

1. $z \mapsto \frac{1}{i}z$
2. $z \mapsto z + (2+i)$
3. $z \mapsto (1+i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1-i)$
4. $z \mapsto (1+i \tan \alpha)z - i \tan \alpha$, $\alpha \in [0, \pi/2[$.

Exercice: 13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$
2. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$
3. $\cos(3x) = \sin(x)$
4. $\tan x = 2 \sin x$

Exercice: 14

Soit $(S_n)_{n \geq 2}$ définie par: $S_n = \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

1. On pose pour $n \geq 2$, $z = \exp\left(\frac{i\pi}{n}\right)$

Calculer la somme: $\sum_{k=0}^{n-1} z^k$

2. Montrer que pour tout $n \geq 2$: $\frac{2}{1-z} = 1 + i \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$
3. Déduire que pour $n \geq 2$ $S_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$
4. Étudier la limite de la suite $(U_n)_{n \geq 2}$ définie par $U_n = \frac{S_n}{n}$

Exercice: 15

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$\begin{cases} A = \sum_{0 \leq 3k \leq n} C_n^{3k} \\ B = \sum_{0 \leq 3k+1 \leq n} C_n^{3k+1} \\ C = \sum_{0 \leq 3k+2 \leq n} C_n^{3k+2} \end{cases}$$

1. Exprimer 2^n , $(1+j)^n$ puis $(1+j^2)^n$ en fonction de A, B et C .

On rappelle que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

2. En déduire les valeurs de A, B et C .

Exercice: 16

1. Simplifier $(p-1)(p-j)(p-j^2)$

2. En déduire la valeur de $\prod_{p=2}^{p=n} \frac{p^3-1}{p^3+1}$

Exercice: 17

1. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les sommes

$$\sum_{k=0}^{k=n} \cos(a+kb), \quad \sum_{k=0}^{k=n} \sin(a+kb)$$

2. En déduire la valeur de :

$$\cos\left(\frac{\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{11}\right) + \cos\left(\frac{9\pi}{11}\right)$$

Exercice: 18

Simplifier :

$$\begin{array}{ll} 1. \sum_{k=0}^n C_n^k \cos(k\theta). & 3. \sum_{k=0}^{k=n} k \cos(k\theta). \\ 2. \sum_{k=0}^n C_n^k \sin((k+1)\theta). & 4. \sum_{k=0}^{k=n} \sin^3(k\theta). \end{array}$$

Exercice: 19

Résoudre le système d'équations, d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{C}^2$:

$$(S) \quad \begin{cases} x^2 y + x y^2 = 6 \\ x^3 + y^3 = 9. \end{cases}$$

Exercice: 20

Calculer $\sum_{k=0}^{k=n} \cos kx / \cos^k x$ et résoudre l'équation

$$\sum_{k=0}^{k=n} \cos kx / \cos^k x = 0$$

Exercice: 21

Soit a un nombre complexe de module 1, $z_1, \dots, z_n$ les racines de l'équation $z^n = a$.

Montrer que les points du plan complexe dont les affixes sont $(1+z_1)^n, \dots, (1+z_n)^n$ sont alignés.

Exercice: 22

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n -èmes de l'unité. Calculer $\sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z-1|$.

Exercice: 23

Soit $n \geq 1$ et $\omega = e^{2i\pi/n}$.

1. Calculer le produit des racines n -ièmes de l'unité.

2. Soit $p \geq 0$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$.

3. En déduire que $\sum_{k=0}^{n-1} (1+\omega^k)^n = 2n$.

Exercice: 24

1. Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Vérifier que $(|u|^2 - |v|^2)^2 = \left(\frac{|u+v|^2 + |u-v|^2}{2}\right)^2 - 4|uv|^2$

2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. CNS pour que les racines de $z^2 + \alpha z + \beta = 0$ aient même module (resp: même argument) ?

Exercice: 25

Soient $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et $\omega = \exp(2i\pi/n)$

1. Établir que pour tout $z \in \mathbb{C}, z \neq 1$,

$$\prod_{k=1}^{n-1} (z - \omega^k) = \sum_{\ell=0}^{n-1} z^\ell$$

2. Justifier que l'égalité reste valable pour $z = 1$.

3. En déduire l'égalité $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}$

Exercice: 26

Étudier la similitude s qui envoie le point A d'affixe i sur le point A' d'affixe $1 + \sqrt{3}/2 + i/2$ et le point B d'affixe $1 + i$ sur le point B' d'affixe $1 + 3\sqrt{3} + 2i$.