

Exercice 1 :

1. Soit un entier $n \geq 1$, Calculer les sommes suivantes:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) & \text{(d)} \sum_{k=1}^n E(\sqrt[3]{k}) \\ \text{(b)} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) & \text{(e)} \sum_{k=1}^n k \times k! \\ \text{(c)} \sum_{k=1}^{n^2} E(\sqrt{k}) & \text{(f)} \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!} \end{array}$$

2. Calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1}$. (On pourra montrer que $\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$)

Exercice 2 : Déterminer trois réels a, b et c tels que

$$\forall k \geq 2, \frac{k-5}{k(k^2-1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}.$$

En déduire la valeur de

$$\sum_{k=2}^{k=n} \frac{k-5}{k(k^2-1)}$$

Exercice 3 : Montrer que

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

(ind:utiliser le polynôme $(1+x)^{2n}$).

Exercice 4 :

1. Calculer $S_p = \sum_{k=1}^n k^p$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \{1, 2, 3, 4\}$ (dans chaque cas, chercher un polynôme P_p de degré $p+1$ tel que $P_p(x+1) - P_p(x) = x^p$).

2. Calculer $\sum_{k=1}^n \arctan \frac{1}{k^2+k+1}$

3. Calculer $\sum_{k=1}^n \arctan \frac{2}{k^2}$.

Exercice 5 : Soit $n \geq 1$. Démontrer que

$$\sum_{k=n+1}^{2n-1} \ln \left(\sin \left(\frac{k\pi}{2n} \right) \right) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln \left(\sin \left(\frac{k\pi}{2n} \right) \right).$$

Exercice 6 :

1. Déterminer une suite (u_k) telle que, pour tout $k \geq 0$, on ait

$$u_{k+1} - u_k = (k+2)2^k.$$

2. En déduire $\sum_{k=0}^n (k+2)2^k$.

Exercice 7 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on note

$$P_n(x) = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right).$$

1. Que valent $P_n(0)$, $P_n(1)$, $P_n(-n)$?

2. Démontrer que pour tout réel non-nul x , on a

$$P_n(x) = \frac{x+n}{x} P_n(x-1).$$

3. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, écrire $P_n(p)$ comme coefficient du binôme.

Exercice 8 : Calculer le produit suivant

$$\prod_{k=1}^n \cos \frac{a}{2^k}$$

, $a \in]0, \pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. (indication : on sait que pour tout réel x , $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$.)

Exercice 9 : Soit $(a_k)_{k \in [0, n]}$ une famille de nombres réels. Justifier l'égalité suivante

$$\sum_{k=0}^{n-1} k(a_k - a_{k+1}) = \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) - na_n$$

Exercice 10 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{1}{n^5} \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^n (5h^4 - 18h^2k^2 + 5k^4).$$

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 11 : Pour un entier $n \geq 1$, calculer les sommes doubles suivantes.

$$\begin{array}{ll} 1. \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \ln(i^k) & 3. \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \frac{i^2}{j} \\ 2. \sum_{1 \leq i, j \leq n} 3^{i+j} & \end{array}$$

Exercice 12 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

1. Calculer les deux sommes doubles

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(i, j) \text{ et } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \max(i, j)$$

2. En déduire la valeur de $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |i - j|$.

Exercice 13 : Pour un entier $n \geq 1$, calculer les sommes suivantes.

$$\begin{array}{l} 1. \sum_{1 \leq i \leq j \leq k \leq n} \frac{ik}{j} \\ 2. \sum_{1 \leq i \leq j \leq k \leq n} \frac{ij}{k} \\ 3. \sum_{1 \leq i \leq j \leq k \leq l \leq n} \frac{i}{jkl} \end{array}$$

Exercice 14 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes linéaires suivants :

$$1. \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2. & \begin{cases} 2x - 3y + 6z + 2t = 5 \\ y - 2z + t = 1 \\ z - 3t = 2 \end{cases} \\ 3. & \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x + y + z = -1 \\ x + 11y - z = 5 \end{cases} \\ 4. & \begin{cases} x + y - z + t = 2 \\ 2x - 2y + z - 2t = 1 \\ -x + y + z - 2t = -2 \end{cases} \\ 5. & \begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 6t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 0 \end{cases} \\ 6. & \begin{cases} x - 2y + z + t = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ 3x - y + t = 3 \\ 4x - 3y + z + 2t = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 15 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants, en discutant suivant les valeurs des paramètres a et b ou m

$$\begin{aligned} 1. & \begin{cases} 2x + y - 3z = a \\ 3x + 2y + z = a + 3 \\ 7x + 4y - 5z = 2a + 5 \end{cases} \\ 2. & \begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = m \\ x + y + mz + t = m + 1 \end{cases} \\ 3. & \begin{cases} x - my + m^2z = m \\ mx - m^2y + mz = 1 \\ mx + y - m^3z = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

1 CALCUL TRIGONOMETRIQUE

1.1 Formules de transformations

On rappelle que $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. En utilisant les formule d'Euler, répondre à ces exercices suivants:

(Transformations d'additions)

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ Montrer que :

$$\begin{aligned} 1. & \cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y \\ 2. & \cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \\ 3. & \sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \\ 4. & \sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y \end{aligned}$$

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ Montrer que :

$$\begin{aligned} 1. & \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = \cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x \\ 2. & \sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x \\ 3. & \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \\ 4. & \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \end{aligned}$$

Transformations sommes en produits

Soit $p, q \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\begin{aligned} 1. & \sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ 2. & \sin p - \sin q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. & \cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ 4. & \cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{aligned}$$

Transformations des produits en sommes

Soit $p, q \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\begin{aligned} 1. & \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)] \\ 2. & \sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)] \\ 3. & \sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)] \end{aligned}$$

1.2 Formules de la tangente

Soient x et y deux réels tels que : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ Montrer que :

$$\begin{aligned} 1. & \text{Si } (x+y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ alors} \\ & \tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} \\ 2. & \text{Si } x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \text{ alors} \\ & \tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \\ 3. & \text{Si } (x-y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ alors} \\ & \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y} \end{aligned}$$

Les valeurs trigonométriques en fonction de : $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \neq \pi + 2k\pi$, on pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Montrer que :

$$a) \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad b) \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad c) \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

1.3 LES ÉQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

Soit $k \in \mathbb{Z}$, alors

$$\begin{aligned} 1. & \cos x = \cos x_0 \iff x = x_0 + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -x_0 + 2k\pi \\ 2. & \sin x = \sin x_0 \iff x = x_0 + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - x_0 + 2k\pi \\ 3. & \tan x = \tan x_0 \iff x = x_0 + k\pi \end{aligned}$$

1.4 L'équation : $a \cos x + b \sin x + c = 0$

Soient a et b deux réels non nuls. Pour tout réel x :

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$$

où l'angle φ est déterminé par : $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Donc

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi)$$

L'équation $a \cos x + b \sin x + c = 0$ se ramène à :

$$\cos(x - \varphi) = \frac{-c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$