

Droite achevée

Définition 1. La droite numérique achevée est obtenue en adjoignant à $\mathbb{R}$ deux éléments, que nous avons déjà rencontrés dans l'écriture des intervalles non bornés, $-\infty$ et $+\infty$. On a donc $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

On définit sur $\overline{\mathbb{R}}$ une relation d'ordre, que nous noterons encore $\leq$, qui coïncide avec la relation d'ordre usuelle sur $\mathbb{R}$, et qui se prolonge de la manière suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\infty < x < +\infty; \quad -\infty \leq -\infty, \quad +\infty \leq +\infty$$

Ainsi, $\leq$ est une relation d'ordre total sur $\overline{\mathbb{R}}$, et l'ensemble $\overline{\mathbb{R}}$ possède un plus grand élément $+\infty$ et un plus petit élément $-\infty$. On voit que si l'on adopte les notations d'intervalles valables sur tout ensemble totalement ordonné, il y a exactement quatre types d'intervalles dans $\overline{\mathbb{R}}$

$$[\alpha, \beta], \quad [\alpha, \beta[, \quad]\alpha, \beta], \quad]\alpha, \beta[$$

où $(\alpha, \beta) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ avec $\alpha \leq \beta$. Notons aussi qu'un intervalle de la forme $]a, +\infty[$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ coïncide avec la partie de $\mathbb{R}$ que l'on note de la même manière. Il en va de même pour tous les types d'intervalles non bornés de $\mathbb{R}$.

Il est aussi possible de faire des conventions permettant dans une certaine mesure de prolonger les lois $+$ et $\cdot$ de $\mathbb{R}$ à la droite numérique achevée. On pose

$+$	$-\infty$	$x \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$+\infty$	ND	$+\infty$	$+\infty$
$y \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$x + y$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	ND

$\times$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}_-^*$	0	$y \in \mathbb{R}_+^*$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	ND	$-\infty$	$-\infty$
$x \in \mathbb{R}_-^*$	$+\infty$	xy	0	xy	$-\infty$
0	ND	0	0	0	ND
$x \in \mathbb{R}_+^*$	$-\infty$	xy	0	xy	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$

Remarque 1. Le symbole "ND" signifie que l'opération n'est pas définie.

Remarque 2. Soit I un ensemble non vide, en particulier un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application

- Si f est majorée (resp. minorée), alors l'ensemble $A = \{f(x), x \in I\}$ est majorée (resp. minorée). Donc admet une borne supérieure (resp. borne inférieure), noté $\sup_I f$ ou $\sup_{x \in I} f(x)$ (resp. $\inf_I f$ ou $\inf_{x \in I} f(x)$)
- Si $\forall x \in I, f(x) < c$, alors $\sup_{x \in I} f(x) \leq c$ (mais on a pas forcément $\sup_{x \in I} f(x) < c$). Prendre $I = [0, 1[, f = \text{id}_I$ et $c = 1$
- On a une remarque analogue pour la borne inférieure.

Exercice 1 : Soient $x, y \in \mathbb{R}$ montrer que :

1. $|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$
2. $\frac{|x + y|}{1 + |x + y|} \leq \frac{|x|}{1 + |x|} + \frac{|y|}{1 + |y|}$.

Exercice 2 : Soit x un réel. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(x) + E(2x) + \dots + E(nx)}{n^2}.$$

Exercice 3 :

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

2. Dédire la partie entière de

$$A = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10000}} \right).$$

Exercice 4 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\lfloor 2x - 1 \rfloor = \lfloor x - 4 \rfloor$. (indication : posons $k = \lfloor x \rfloor$, et discuter suivant le placement de x par rapport à $k + \frac{1}{2}$).

Exercice 5 : Montrer que :

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \leq 1$.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, -2 \leq 3\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor 3x \rfloor \leq 1$.

Exercice 6 : Soit x un nombre réel.

1. Démontrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor$.
2. Plus généralement, démontrer que pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

Exercice 7 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une application croissante. On note $E = \{x \in [0, 1]; f(x) \geq x\}$.

1. Montrer que E admet une borne supérieure b .
2. Prouver que $f(b) = b$.

Exercice 8 :

Déterminer les bornes inférieure et supérieure si elles existent pour les ensembles suivants :

1. $\left\{ \frac{1}{n} + \frac{(-1)^m}{m} : n, m \in \mathbb{N}^* \right\}$
2. $\left\{ \frac{3n-1}{2n+1} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$
3. $\left\{ \frac{x^2+2}{x^2+1} : x \in \mathbb{R} \right\}$
4. $\left\{ \frac{xy}{x^2+y^2} : x, y \in \mathbb{R}^{*+} \right\}$
5. $\left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}^* \right\}$
6. $\left\{ n^2 + \frac{1+(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$
7. $\left\{ \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor : x \in \mathbb{R}^{*+} \right\}$
8. $\left\{ \frac{p-q}{1+p+q} : (p, q) \in \mathbb{N}^2, p \geq q \right\}$
9. $\left\{ 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{m} : (n, m) \in \mathbb{N}^{*2} \right\}$

$$10. \left\{ 1 - \frac{1}{n-m} : (n, m) \in \mathbb{N}^2, n \neq m \right\}$$

Exercice 9 : On pose

$$A = \left\{ \sum_{k=1}^n x_k \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_*^{+n} \right\}.$$

1. Montrer que pour tout $x \in A, x \geq 2$.
2. Calculer $\inf A$.

Exercice 10 : On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que l'équation $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ admette au moins une solution.

1. Montrer que $(a, b) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow$

$$(a^2 + 8 \geq 4b \text{ et } |a| \geq 4) \text{ ou } \left(|a| \geq 1 + \frac{b}{2} \right).$$

2. En déduire que

$$\inf \{ a^2 + b^2 : (a, b) \in \mathcal{D} \} = \frac{4}{5}.$$

Exercice 11 :

1. Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$||a + b| - |a - b|| = 2 \min(|a|, |b|).$$

2. Résoudre l'inéquation

$$2 \cos(x) \leq |\sqrt{1 + \sin(2x)} - \sqrt{1 - \sin(2x)}| \leq \sqrt{2}.$$

Exercice 12 :

1. Démontrer les assertions suivantes :

$$(a) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \left\lfloor \frac{[nx]}{n} \right\rfloor = [x].$$

$$(b) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq [nx] - n[x] \leq n - 1.$$

$$(c) \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}, \left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor = n.$$

$$(d) \quad \forall x \in \mathbb{R}, [x] + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = [2x], \text{ et calculer}$$

$$\sum_{k=0}^n \left\lfloor \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

$$(e) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = [nx].$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $[x^2] = [x]^2$.

Exercice 13 :

1. Démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*, [\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] = [\sqrt{4n+2}]$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, [(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2] = 4n + 1$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+4}{4} \right\rfloor = n$.

Exercice 14 :

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On définit :

$$A + B = \{x \in \mathbb{R}; \exists a \in A, \exists b \in B, x = a + b\}.$$

1. A quoi est égal $A+B$ dans le cas où $A = [1, 3]$ et $B = [2, 4[$? dans le cas où $A =]-\infty, 0]$ et $B = [1, 2]$?

2. On suppose A et B majorés. Montrer que $A+B$ est majoré, et que :

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

Exercice 15 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une application croissante. On note $E = \{x \in [0, 1]; f(x) \geq x\}$.

1. Montrer que E admet une borne supérieure b .
2. Prouver que $f(b) = b$.

Exercice 16 : Soit $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ une fonction non-nulle vérifiant :

$$(\star) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$(\star\star) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(xy) = f(x)f(y)$$

1. Montrez que $f(1) = 1$ et $f(0) = 0$.
2. Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n$.
3. Montrez que $\forall r \in \mathbb{Q}^+, f(r) = r$.
4. Montrez que $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \geq 0$.
5. Montrez que f est une fonction croissante.
6. Montrez que $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = x$. (On raisonnera par l'absurde, en supposant par exemple que $x < f(x)$ et on introduira un rationnel r tel que $x < r < f(x)$).

Exercice 17 : Soit G une sous-partie de $\mathbb{R}$ stable par l'addition et soustraction.

1. Montrer que $0 \in G$. On suppose $G \neq \{0\}$.
2. Montrer que $G \cap \mathbb{R}^{++}$ admet une borne inférieure α dans $\mathbb{R}$, et que $\alpha \geq 0$.
3. (a) On suppose ici $\alpha > 0$. Démontrer que $G = \alpha\mathbb{Z}$.
(b) On suppose ici $\alpha = 0$. Démontrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.
4. Soient $\omega \in \mathbb{R}$ et $G_\omega = \{a + b\omega : a, b \in \mathbb{Z}\}$.
(a) Montrer que G_ω est stable par l'addition et soustraction.
(b) On suppose ici $\omega \in \mathbb{Q}$. On note (p, q) le couple de $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^*$ tel que $\omega = \frac{p}{q}$ où p et q sont premiers entre eux. Démontrer que $G_\omega = \frac{1}{q}\mathbb{Z}$.
(c) On suppose ici $\omega \notin \mathbb{Q}$. Démontrer que G_ω est dense dans $\mathbb{R}$.
5. Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$, tel que $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
6. Montrer que les ensembles $\{\cos(n) : n \in \mathbb{Z}\}$, $\{\sin(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ et $\{\sin(n) : n \in \mathbb{N}\}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.