

Exercice 1 : Déterminer les limites des suites suivantes, $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}, x \in \mathbb{R}$:

1. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
2. $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx]$
3. $u_n = \frac{n^3 + 5n}{5n^3 + \cos(n) + \frac{1}{n^2}}$
4. $u_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$
5. $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}, (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$
6. $u_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$
7. $u_n = \sqrt[n]{2 + (-1)^n}$
8. $u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$
9. $u_n = (\ln n)^{1/n}$
10. $u_n = \left(\sin \frac{1}{n}\right)^{1/\ln n}$

Exercice 2 : Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x) - x| \leq \frac{x^2}{2}$.

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 3 :

Soit (u_n) une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Z}$. Montrer que (u_n) converge si et seulement si (u_n) est stationnaire.

Exercice 4 : (Règle de D'Alembert) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite l .

1. Si $l < 1$, montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Si $l > 1$, montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
3. Que dire quand $l = 1$?

Exercice 5 : Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, et soit $M \in \mathbb{R}$ un majorant de A . Montrer l'équivalence :

$$M = \sup(A) \Leftrightarrow \exists (a_n) \in A^{\mathbb{N}}, M = \lim a_n$$

Exercice 6 : Soit (u_n) une suite bornée.

1. Montrer que l'on peut poser pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \sup \{u_k \mid k \geq n\}$ et $w_n = \inf \{u_k \mid k \geq n\}$.
2. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes.

3. Montrer que la suite (u_n) est convergente si et seulement si $\lim v_n = \lim w_n$.

Exercice 7 : Soient $n \in \mathbb{N}, I_n =]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$ et (E) l'équation $\tan x = x$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation (E) admet une unique solution x_n dans I_n .
2. Déterminer la limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et montrer que

$$\frac{1}{n\pi} x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

3. Montrer qu'il existe $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers 0 telle que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 :

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution réelle. On note u_n cette solution.
2. Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.
3. En déduire qu'elle converge et calculer sa limite.

Exercice 9 :

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + x^2 + \dots + x^n = 1$ admet une unique solution réelle dans l'intervalle $[0, +\infty[$. On note x_n cette solution.
2. Montrer que la suite (x_n) est monotone, puis convergente, et calculer sa limite.

Exercice 10 :

1. Soit $u_n = \sin(n\pi/4) + \cos(n\pi/2)$. Est-elle convergente ?
2. Même question pour la suite $v_n = \sin(n\pi/3) + \frac{1}{n}$.

Exercice 11 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}, (u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Exercice 12 : On dit qu'une suite est périodique si $\exists p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n$. Montrer que toute suite réelle périodique et convergente est constante.

Exercice 13 :

1. Soit (u_n) une suite réelle monotone admettant une sous-suite convergente. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
2. Soit (u_n) une suite non bornée. Montrer qu'il existe une sous-suite de (u_n) qui tend vers l'infini.

Exercice 14 : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 < a < b$. On pose $u_0 = a, v_0 = b$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < v_n$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n} (v_0 - u_0)$
3. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 15 : Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, u_n = H_n - \ln n \text{ et } v_n = H_n - \ln(n+1).$$

On se propose de montrer de calculer de deux façons la limite de H_n en $+\infty$.

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) \leq \frac{1}{n}.$$

- (b) Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
- (c) En déduire l'existence de $\gamma \in \mathbb{R}$ et d'une suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge vers 0 tels que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + w_n$ (γ est appelée constante d'Euler).
- (d) Quelle est la limite de H_n en $+\infty$?
- (e) Déterminer la limite de $\left(\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

2. (a) Montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$$

- (b) En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty.$$

Exercice 16 : Donner le terme général des suites définies par :

1. $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$.
2. $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -u_n + 4$.

Exercice 17 : Donner le terme général et étudier la convergence des suites définies par $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$
2. $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$
3. $u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$.

Exercice 18 : Étudier les suites définies par:

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$

2. $u_0 = 1/2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n)$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$ et $u_0 = 1$;
4. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n)$ et $u_0 \in \mathbb{R}$.

Exercice 19 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$.

1. Montrer que u_n existe et $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{|u_n - \sqrt{2}|^2}{2}$.
3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2^{2^{n-1}}}$ et donner la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. Combien de termes de la suite faut-il calculer pour avoir une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près ?

Exercice 20 : Soient $x > 1$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par récurrence par $u_0 = x, v_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + v_n), v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bien définies et à termes > 0 .
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq v_n$.
3. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.
4. Montrer que la suite $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. En déduire la valeur de la limite commune à $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 21 : Étudier la convergence des suites complexes (z_n) définies par :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}, z_n = x_n + iy_n$ avec $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n - y_n)$ et $y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$.
2. pour tout $n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{i}{2}z_n + 1$.

Exercice 22 : On considère la suite complexe (z_n) définie par $z_0 = re^{i\theta}$ ($-\pi \leq \theta \leq \pi$) et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$$

On désigne par r_n le module de z_n et par θ_n l'argument de z_n tel que $-\pi \leq \theta_n \leq \pi$.

1. Effectuer la construction géométrique de z_{n+1} à partir de z_n .
2. Exprimer r_{n+1} et θ_{n+1} en fonction de r_n et de θ_n , et en déduire $\lim \theta_n$.
3. Étudier la suite $u_n = r_n \sin \left(\frac{\theta}{2^n} \right)$, et en déduire r_n et $\lim r_n$, puis $\lim z_n$.