

Exercice 1 : Déterminer les limites suivantes (si elles existent) :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \right);$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} + 2x + 7}{e^x + e^{-x}};$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{2x+7} - 3};$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor;$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{2}{x}} - 2 \right);$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{\sin 2x};$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2};$

8. $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sin^2 x - \sin^2 \alpha}{x^2 - \alpha^2};$

9. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x^2) \tan \left(\frac{\pi}{2} x \right);$

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3};$

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \sin \frac{1}{x};$

12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x + \lfloor x \rfloor};$

13. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3} \cos(x) - \sin(x)}{x - \frac{\pi}{3}};$

14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}.$

Exercice 2 : Déterminer les limites suivantes, si elles existent (et montrer qu'elles n'existent pas le cas échéant) :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x \cos \frac{1}{x};$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin x;$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^x}{[x]^{[x]}};$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}}{x}.$

Exercice 3 : Étudier la limite (éventuellement les limites à gauche et à droite) de chacune des expressions suivantes au point considéré :

1. $\frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3}$ en a ;

2. $\frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x}}{x-1}$ en 1 ;

3. $\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ en 0.

Exercice 4 : Les fonctions suivantes sont-elles continues ou prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

1. $x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\right) \sin \frac{1}{x};$

2. $x \mapsto x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor;$

3. $x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor};$

4. $x \mapsto \sin(1+x) \ln |1+x|.$

Exercice 5 : Déterminer si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité en 0 :

1. $f(x) = (1+x)^{1/x},$

2. $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right),$

3. $f(x) = x \cos\left(\frac{1}{x}\right).$

Exercice 6 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que:

- il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{ax} f(x) = 0$;
- il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $x \mapsto e^{bx} f(x)$ ne tende pas vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$.

1. Justifier l'existence de

$$\lambda = \sup \left\{ c \in \mathbb{R} \mid \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{cx} f(x) = 0 \right\}.$$

2. Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(\lambda - \varepsilon)x} f(x) = 0.$

3. Montrer que $\forall \varepsilon > 0, x \mapsto e^{(\lambda + \varepsilon)x} f(x)$ n'est bornée sur aucun voisinage de $+\infty$.

Exercice 7 : Soient f et g deux fonctions de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction

$$M(x) = \sup_{t \in [-1, 1]} (f(t) + xg(t))$$

1. Expliciter $M(x)$ lorsque $f(t) = \sqrt{1-t^2}$ et $g(t) = t.$

2. Montrer que $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bien définie.

3. Montrer que :

$$\forall h > 0, \forall x \in \mathbb{R}, M(x+h) \leq M(x) + h \sup_{t \in [-1, 1]} g$$

et

$$M(x+h) \geq M(x) + h \inf_{t \in [-1, 1]} g.$$

4. En déduire que $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

Exercice 8 : Soit l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x+1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que f est bijective et discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 9 :

- Montrer que si f et g sont continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et coïncident sur $\mathbb{Q}$, alors $f = g$ sur $\mathbb{R}$.
- Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) < g(x)$.
 - Montrer que $f \leq g$.
 - Montrer qu'on n'a pas nécessairement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < g(x).$$

- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue dont la restriction à $\mathbb{Q}$ est strictement croissante. Montrer que f est strictement croissante.

Exercice 10 : On considère la fonction

$$f : \begin{matrix}]0, 1[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}. \end{matrix}$$

- Montrer que f est bijective.
- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}(2^{-n})$.

Exercice 11 : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I vérifiant $\forall x \in I, |f(x)| = |g(x)|$ et $f(x) \neq 0$. Montrer que $f = g$ ou $f = -g$. Que dire si les fonctions ne sont pas continues?

Exercice 12 : Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que si f prend un nombre fini de valeurs, alors f est constante.

Exercice 13 : Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

- On suppose que $f([a, b]) \subset [a, b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.
- Même question lorsqu'on suppose que $[a, b] \subset f([a, b])$.

Exercice 14 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $x_1, x_2 \in [0, 1]$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$ et $x_1 - x_2 = \frac{1}{2}$.

Exercice 15 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue et injective. On se propose de montrer que f est strictement monotone.

- Première méthode : On considère $a, b, x, y \in I$ avec $a < b$ et $x < y$. On pose pour $t \in [0, 1]$,
 $u(t) = tx + (1-t)a$ et $v(t) = ty + (1-t)b$. On pose

$$G(t) = f(u(t)) - f(v(t)).$$

- Calculer $u(0), u(1), v(0), v(1)$. Tracer u et v .
- Montrer que $\forall t \in [0, 1], u(t) < v(t)$.

- En déduire que G ne s'annule pas sur $[0, 1]$ puis que $G(0)$ et $G(1)$ ont le même signe.
- En déduire que f est monotone sur I .

2. Deuxième méthode : On suppose que f n'est pas monotone.

- Expliquer pourquoi on peut supposer qu'il existe $a < b < c$ tels que $f(a) < f(b)$ et $f(b) > f(c)$. Faire un dessin.
- Conclure.

Exercice 16 : Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ vérifiant $f(0) = 0, f(1) = 1$, et pour tout $x \in [0, 1], f \circ f(x) = x$. Déterminer f .

Exercice 17 : Soit f une fonction périodique sur $\mathbb{R}$.

- Montrer que f ne peut pas tendre vers $\pm\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$.
- Montrer que si f admet une limite en $+\infty$, alors f est constante.
- On suppose f continue. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$ et atteint ses bornes.

Exercice 18 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, bornée sur $\mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19 : Soient $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $\forall x \in [0, 1], f(x) < g(x)$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall x \in [0, 1], f(x) + m \leq g(x)$.

Exercice 20 : Soit f définie sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[0, +\infty[$, continue sur $[0, +\infty[$ telle que $\frac{f(x)}{x}$ a une limite réelle $\ell \in [0, 1[$ quand x tend vers $+\infty$. Montrer que f a un point fixe.

Exercice 21 :

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

- Supposons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$ soient finies. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$. La fonction f atteint-elle ses bornes?
- Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admet pour limite $+\infty$ en $\pm\infty$, montrer que f admet un minimum absolu.

Exercice 22 : Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que :

$$\sup_{x \in [a, b]} f(x) = \sup_{x \in [a, b]} f(x) \text{ et } \inf_{x \in [a, b]} f(x) = \inf_{x \in [a, b]} f(x).$$

Exercice 23 : Déterminer toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant les équations fonctionnelles suivantes :

- $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y);$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x)f(y).$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}.$