ALGEBRA y ALGEBRA II
EXAMEN 10/12/05

PARTE PRÁCTICA Para aprobar hay que sumar por lo menos 5 puntos en esta parte.

(1) 3pts. En el siguiente ejercicio marcar claramente las respuestas en esta hoja. No es necesario justificar lo marcado.

(a) Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^5$ generado por $\alpha_1 = (1,2,0,1,1)$ y $\alpha_2 = (2,2,1,0,1)$. ¿Cuáles de los siguientes tres vectores forman una base de $W^{\perp}$?

i) $(2,-2,0,2,0)$, $(-1,0,1,0,1)$, $(0,1,3,0,-2)$.

ii) $(-1,\frac{1}{2},1,0,0)$, $(2,-2,0,2,0)$, $(-2,\frac{3}{2},1,-1,0)$.

iii) $(-1,\frac{1}{2},1,0,0)$, $(1,-1,0,1,0)$, $(0,-\frac{1}{2},0,0,1)$.

iv) $(2,-2,0,1,0)$, $(0,-\frac{1}{2},0,0,1)$, $(1,-2,0,1,2)$.

(b) Sea $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal definida por

$$T(x_1,x_2,x_3) = (5x_1 - 6x_2 - 6x_3, -x_1 + 4x_2 + 2x_3, 3x_1 - 6x_2 - 4x_3).$$

Entonces, existe una base ordenada $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ es

$$i)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad ii)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$iii)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad iv)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 3,5pts. Sea $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal definida por

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) = (3x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 3x_4, -6x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 6x_4, 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4, 3x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4).$$

(a) Dar una base de Nu (T).

(b) Describir implícitamente y dar una base de Im (T).

(c) Dar la matriz $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ de T con respecto a la base de $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{B} = \{(1,1,0,0),\ (0,0,1,1),\ (1,0,0,4),\ (0,0,0,2)\}.$$

(d) Dar una base de Nu (T) $\cap$ Im (T) y de Nu (T) + Im (T).

(3) 3,5 pts. Sean π_1 y π_2 planos en $\mathbb{R}^3$ y R_1 una recta en $\mathbb{R}^3$ definidos como:

$\pi_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -5x + 2y + z = 3\}$,

$\pi_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = t(-2,-2,-6) + s(2,3,4) + (5,-1,0),\ s,\ t \in \mathbb{R}\}$,

$R_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = t(1,-1,-2) + (3,1,1),\ t \in \mathbb{R}\}$.

(a) Mostrar que π_1 y π_2 son paralelos y encontrar los puntos de intersección $P_1 = R_1 \cap \pi_1$ y $P_2 = R_1 \cap \pi_2$.

(b) Encontrar la recta R_2 normal a π_1 que pasa por P_1 y determinar el punto de intersección $P_3 = R_2 \cap \pi_2$.

(c) Calcular el área del triángulo de vértices P_1, P_2 y P_3.

(d) Calcular la distancia entre π_1 y π_2.

PARTE TEÓRICA Para aprobar hay que sumar por lo menos 5 puntos en esta parte.

(1) 2 pts. Probar que si W_1 y W_2 son subespacios de dimensión finita de un espacio vectorial V, entonces
$$\dim(W_1) + \dim(W_2) = \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2).$$

(2) 3 pts. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal.
   (a) Defina Nu (T) e Im (T).
   (b) Probar que Nu (T) es un subespacio vectorial de V y que Im (T) es un subespacio vectorial de W.
   (c) Probar que T es inyectiva si y sólo si Nu (T) $= \{0\}$.

(3) 3 pts. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando sus respuestas.

   (a) Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un cuerpo F, con V de dimensión finita. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal inyectiva. Entonces T es sobre.
   (b) Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ con n autovalores distintos, no nulos. Entonces A es inversible.
   (c) Un conjunto ortogonal de vectores es linealmente independiente.

(4) 2 pts. Sea V un espacio vectorial.
   (a) Probar que si $S = \{\alpha_1, \cdots \alpha_k\}$ es l.i. y β es un vector de V que no pertenece al subespacio generado por S, entonces $\{\alpha_1, \cdots \alpha_k, \beta\}$ es l.i.
   (b) Probar que todo subconjunto de V que contiene al vector 0 es l.d.

Ejercicio para Libres

(1) Exhibir una base y calcular la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por las filas de la matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$