4

PARTE TEÓRICA Para aprobar hay que sumar por lo menos 5 puntos en esta parte.

(1) **2 pts.** Sea Π un plano en $\mathbb{R}^3$ descripto implícitamente por la ecuación $ax + by + cz = d$ y sea P un punto de $\mathbb{R}^3$. Dar y demostrar una fórmula para calcular la distancia de P a Π.

(2) **3 pts.** Sea V un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita.
   (a) Defina $W^{\perp}$.
   (b) Probar que $W^{\perp}$ es un subespacio vectorial de V.
   (c) Probar que $V = W \oplus W^{\perp}$.

(3) **3 pts.** Decir si las siguientes afirmaciones son **verdaderas** o **falsas**, justificando sus respuestas.

   (a) Sea V un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita. Sea $T : V \to V$ autoadjunta y $\mathcal{B}$ base ortonormal de V, entonces $[T]_{\mathcal{B}} = [T]^{*}_{\mathcal{B}}$.
   (b) Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal, entonces $V = \mathrm{Im}\,\mathrm{T} \oplus \mathrm{Nu}\,\mathrm{T}$. Falso
   (c) Sean T_1 y T_2 transformaciones lineales e inyectivas de $V \to V$. Enonces $T_1 + T_2$ es lineal e inyectiva. Falso

(4) **2 pts.** Sea $T : V \to W$ lineal.
   (a) Probar que si $\{\alpha_1, \cdots \alpha_k\}$ generan V entonces $\{T(\alpha_1), \cdots T(\alpha_k)\}$ generan $\mathrm{Im}\,(\mathrm{T})$.
   (b) Probar que si $\{T(\alpha_1), \cdots T(\alpha_k)\}$ es l.i. entonces $\{\alpha_1, \cdots \alpha_k\}$ es l.i..

Ejercicio para Libres

(1) Exhibir una base y calcular la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores

$$\{(1,2,0,-3),\quad (0,-1,2,0),\quad (1,0,4,-3),\quad (2,5,-2,-6)\}.$$

6

Apellido y Nombre: Carrera:

P1	P2	P3	TOTAL	T1	T2	T3	T4	TOTAL	NOTA

ALGEBRA y ALGEBRA II
EXAMEN 20/12/05

PARTE PRÁCTICA Para aprobar hay que sumar por lo menos 5 puntos en esta parte.

(1) 3pts. En el siguiente ejercicio marcar claramente las respuestas en esta hoja. No es necesario justificar lo marcado.

(a) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y V el espacio vectorial definido de la siguiente manera.

$$V = \{X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : AX = XA\}.$$

Uno de los siguientes conjuntos es base de V. Decidir cual es.

(i) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ (ii) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ (iii) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

(iv) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ (v) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$ (vi) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}$

(b) Sea $C = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 & 0 \\ 1 & c & 0 & b \\ 0 & 0 & c+1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Solo una de las siguientes elecciones de a, b, c hacen de C inversible. ¿Cuál es?

(i) $a = 2, b = -1, c = -1$, (ii) $a = 2, b = 0, c = 1$, (iii) $a = 0, b = -1, c = 11$, (iv) $a = 3, b = 0, c = 1$.

(c) ¿Cuál es la inversa de la matriz C del apartado anterior?

(i) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (ii) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, (iii) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(2) 3,5pts. Sea R y L las rectas determinadas por:

$$R = \{t(1,0,-1) + (q,0,1) : t \in \mathbb{R}\}, \quad L = \{s(2,1,1) : s \in \mathbb{R}\}.$$

Donde $q \in \mathbb{R}$.

(a) Demuestre que existe un único q tal que $L \bigcap R \neq \emptyset$. ¿Cuál es?

(b) Para el q encontrado en el punto anterior indique la ecuación implícita del plano Π que contiene a las rectas L y R.

(c) Para $q = 0$ calcule la distancia entre las rectas R y L.

pregunta (d) Para $q = 0$ encuentre los puntos de R y L que realizan la distancia entre ellas.

(3) 3,5pts. Sea $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y sea $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$, definida por $T(X) = Xv_0$.

(a) Demostrar que T es lineal.

(b) Dar la matriz de T con respecto a las respectivas bases canónicas.

(c) Encontrar una base del núcleo de T, y describir la imagen de T.

(d) Sean $B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ y $B' = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$. Encontrar $[T]_{BB'}$.