Apellido y Nombre: Carrera:

P1	P2	P3	P4	TOTAL	T1	T2	T3	TOTAL	NOTA

ALGEBRA y ALGEBRA II
Examen Final: 7/12/2006

PARTE PRÁCTICA: Para aprobar hay que sumar por lo menos 5 puntos en esta parte.

(1) 3pts. Sean en $\mathbb{R}^3$ los puntos $P = (2,2,1)$, $Q = (-1,1,3)$ y $R = (-1,-1,2)$.
   (a) Calcular el área del triángulo de vértices P, Q y R.
   (b) Dar la ecuación implícita del plano Π que contiene a P, Q y R.
   (c) Determinar el conjunto W de puntos en $\mathbb{R}^3$ que equidistan de P y Q.
   (d) Describir paramétricamente la intersección $W \cap \Pi$.

(2) (3 pts.) Sea : $\mathbb{P}^4$ el espacio vectorial compuesto por los polinomios de grado menor o igual que 3 y sea $T : \mathbb{P}^4 \to \mathbb{P}^4$ una transformación lineal definida por

$$T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (3a+6b-3d-3d)x^3 + (-6a-2b-4c+6d)x^2 + (3a-2b+5c-3d)x + (3a+4b-c-3d).$$

   (a) Dar una base de Nu (T).
   (b) Describir implícitamente y dar una base de Im (T).
   (c) Dar la matriz $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ de T con respecto a la base de $\mathbb{P}^4$

$$\mathcal{B} = \{ x^3 + x^2 \ , \ x+1 \ , \ x^3+4 \ , \ 2 \}.$$

   (d) Dar una base de Nu (T) $\cap$ Im (T) y de Nu (T) + Im (T).

(3) (1.5 pts.)
   (a) Hallar todos los $t \in \mathbb{R}$ para los cuales la siguiente matriz no es inversible:

$$\begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 2 & 2 & (t-1)^2 \\ t+4 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

   (b) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una tranfornación lineal definida por

$$T(x,y,z) = (2x-y, x, -x+2z).$$

   Probar que no existe una base $\mathcal{B}$ tal que $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ sea diagonal.

(4) (2,5 pts.) Para vectores de $\mathbb{R}^3$ definimos

$$((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)) = x_1x_2 + 2y_1y_2 + 4z_1z_2$$

   (a) Probar que (,) es producto interno.
   (b) Sean $\alpha_1 = (0,0,\frac{1}{2})$ y $\alpha_2 = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$. Completar $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ a una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Sea W el subespacio generado por $(1,0,0)$ y $(1,1,1)$. Encontrar una base de $W^{\perp}$.

PARTE TEÓRICA: Para aprobar hay que sumar por lo menos 5 puntos en esta parte.

(1) (4 pts.) Sean V y W espacios vectoriales y sea $T : V \to W$ una transformación lineal.
   (a) Definir Nu (T), Im (T) y probar que son subespacios de V y W, respectivamente.
   (b) Probar que si el conjunto $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ genera V, entonces el conjunto $\{T(\alpha_1), \dots, T(\alpha_n)\}$ genera Im (T).
   (c) Si $\dim(V)$ es finita, probar que $\dim(V) = \dim(\mathrm{Nu}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T))$.
   (d) Si $\dim(V) = \dim(W)$, deducir que T es inyectiva si y sólo si T es sobre.

(2) (3 pts.) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
   (a) Todo subconjunto de un conjunto linealmente dependiente es también linealmente dependiente.
   (b) Existen transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ y $U : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ tales que la composición $UT : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ es inversible.
   (c) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$ con producto interno $(\, , \,)$. Sea $T : V \to V$ una transformación lineal tal $(T(\alpha), \beta) = (\alpha, T(\beta))$, $\forall\, \alpha, \beta \in V$. Entonces los autovalores de T son reales.
   (d) Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $T : \mathbb{R} \mapsto V$ una función tal que $T(ca) = cT(a)$ para todo $c, a \in \mathbb{R}$. Entonces T es lineal.

(3) (3 pts.) Sea $(V, (\, , \,))$ un espacio producto interno (real).
   (a) Definir $||\alpha||$ para $\alpha \in V$.
   (b) Demostrar que $||\alpha|| > 0$, $\alpha \neq 0$; $||c\alpha|| = |c|||\alpha||$.
   (c) Demostrar que $|(\alpha, \beta)| \leq ||\alpha||.||\beta||$, $\alpha, \beta \in V$.
   (d) Demostrar que $||\alpha + \beta|| \leq ||\alpha|| + ||\beta||$, $\alpha, \beta \in V$.

Ejercicio para Libres

Dar una base y calcular la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores

$$\{(1,2,0,-3), \quad (0,-1,2,0), \quad (1,0,4,-3), \quad (2,5,-2,-6)\}.$$