Apellido y Nombre:

Carrera:

| P1 | P2 | P3 | P4 | TOTAL | T1 | T2 | T3 | TOTAL |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| c | 2 | 2,5 | c | 4,5 | 2 | 2,5 | 0 | 4,5 |

ÁLGEBRA LINEAL y ÁLGEBR...

Examen Fi...

PARTE ...



**PARTE TEÓRICA** Para aprobar hay que sumar por lo menos 5 puntos en esta parte.

(1) **3,5 pts.**
   (a) Definir transformación lineal entre dos espacios vectoriales.
   (b) Sean $U, V, W$ espacios vectoriales y $T : U \to V$ y $S : V \to W$ transformaciones lineales. Probar que $S \circ T : U \to W$ es lineal.
   (c) Sea $T : U \to V$ una transformación lineal inversible. Probar que la función inversa $T^{-1} : V \to U$ es lineal.
   (d) Sea $T : V \to W$ una transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita y sean $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$ bases de $V$ y $W$ respectivamente. Probar que existe una matriz $A$ tal que

$$[T(\alpha)]_{\mathcal{B}_W} = A[\alpha]_{\mathcal{B}_V}, \qquad \forall\, \alpha \in V.$$

(2) **3,5pts.** Sea $V$ un espacio producto interno.
   (a) Demostrar que si $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ es un conjunto ortonormal, entonces $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ es un conjunto linealmente independiente.
   (b) Dado un subespacio $W$ de $V$, definir $W^{\perp}$.
   (c) Demostrar que si $W$ tiene dimensión finita entonces $V = W \oplus W^{\perp}$.

(3) **3 pts.** Decidir si las siguientes afirmaciones son **verdaderas** o **falsas**. En cada caso **justificar**.
   (a) Existe una funcional lineal $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}$ cuyo núcleo tiene dimensión 3.
   (b) Si $v$ y $w$ son dos vectores linealmente dependientes en $\mathbb{R}^3$, entonces $v \times w = 0$.
   (c) Sea $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $B^2 = 0$. Si $c \in \mathbb{R}$ es un autovalor de $B$, entonces $c = 0$.
   (d) Existe una base $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ del espacio vectorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ de matrices $2\times 2$, tal que $\det A_i = 1$ para todo $i = 1, \dots, 4$.

**Ejercicio para libres:**

Calcule la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

9

Apellido y Nombre: Condición: Carrera:

| P1 | P2 | P3 | P4 | TOTAL | T1 | T2 | T3 | TOTAL | NOTA |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | |

**ÁLGEBRA y ÁLGEBRA II**

**Examen Final: 19/12/06**

**PARTE PRÁCTICA.** Para aprobar hay que sumar por lo menos 5 puntos en esta parte.

(1) **2,5 pts.** Sea $\pi$ el plano de $\mathbb{R}^3$ que pasa por los puntos $A = (1,0,1)$, $B = (-1,2,0)$, $C = (1,1,-1)$.

(a) Determinar las ecuaciones implícita y paramétrica de $\pi$.
(b) Calcular la distancia entre $\pi$ y el punto $P = (1,2,-5)$.
(c) Calcular el volumen del tetraedro con vértices $P$, $A$, $B$ y $C$.

(2) **3,5pts.** Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal cuya matriz en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ respectivamente es:

$$[T]_{C_4}^{C_3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) Dar una base de $\mathrm{Nu}\,(T)$.
(b) Describir implícitamente $\mathrm{Im}\,(T)$ y dar una base de este subespacio.
(c) Sea $U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal cuya matriz en las bases $\mathcal{B}_3 = \{(1,1,0),(0,1,-1),(0,0,1)\}$ y $\mathcal{B}_4 = \{(1,0,0,1),(0,1,0,0),(1,0,1,0),(0,2,0,1)\}$ es:

$$[U]_{\mathcal{B}_4}^{\mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Determinar $U(x,y,z)$ para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(d) Dar una base de $\mathrm{Nu}\,(U)$.
(e) Describir implícitamente $\mathrm{Im}\,(U)$ y dar una base de este subespacio.

(3) **1,5pts.** Calcular los autovalores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Decidir si esta matriz es semejante a una matriz diagonal.

(4) **2,5pts.** Para $\alpha = (x_1, x_2)$ y $\beta = (y_1, y_2)$ en $\mathbb{R}^2$, se define

$$(\alpha, \beta) = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 4x_2y_2.$$

(a) Probar que $(\,,\,)$ es un producto interno en $\mathbb{R}^2$.
(b) Sea $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a,b) \neq (0,0)$, y sea $W$ el subespacio generado por $(a,b)$. Encontrar $W^\perp$ usando este producto interno.
(c) Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, según este producto interno.