Apellido y Nombre: [illegible]

Carrera: [illegible]

P1	P2	P3	P4	TOTAL	T1	T2	T3	TOTAL	NOTA
0	2	2,5	0	4,5	2	2,5	0	4,5	4 cuatro

10

ÁLGEBRA LINEAL y ÁLGEBRA II

Examen Final: (16/02/2007)

PARTE PRÁCTICA: Para aprobar hay que sumar por lo menos 5 puntos en esta parte.

(1) 1,5 pts. Considere los puntos $A = (3,2,1)$ y $B = (-1,2,3)$. Encuentre todos los puntos P que se encuentran sobre la recta $\{(x,y,z) : (x,y,z) = (2,1,2) + t(1,1,5),\ t \in \mathbb{R}\}$ tal que el triángulo ABP sea recto en P.

(2) 3,5 pts. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal definida por

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \\ -x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \end{pmatrix}.$$

(a) Dar una base de $\mathrm{Nu}\,(T)$.
(b) Describir implícitamente y dar una base de $\mathrm{Im}\,(T)$.
(c) Dar la matriz $[T]_B^B$ de T con respecto a la base de $\mathbb{R}^4$

$$B = \{(1,0,0,1), (0,0,1,1), (0,1,0,0), (-1,0,0,1)\}.$$

(d) Dar una base de $\mathrm{Nu}\,(T) \cap \mathrm{Im}\,(T)$ y de $\mathrm{Nu}\,(T) + \mathrm{Im}\,(T)$.

(3) 3 pts.
(a) Para que valores de c la siguiente matriz es invertible:

$$\begin{pmatrix} 0 & c & -c \\ -1 & 2 & -1 \\ c & -c & c \end{pmatrix}$$

(b) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal dada por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 4x_3,\ 8x_2,\ 4x_1 + 2x_3).$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ [illegible] & 8 & [illegible] \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Encuentre una base B en el cual $[T]_B^B$ sea una matriz diagonal e indicar la matriz que realiza el cambio de base.

(4) 2 pts. Considere P_2 (el espacio de todos los polinomios de grado menor o igual a dos) con el producto interno

$$(p, q) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

y encuentre $d(p,q)$ (la distancia entre p y q) cuando $p = -1$ y $q = x^2$.

PARTE TEÓRICA: Para aprobar hay que sumar por lo menos 5 puntos en esta parte.

(1) 3 pts. Sea V un espacio vectorial y sean W_1 y W_2 subespacios de V.

(a) Definir el subespacio $W_1 + W_2$.

(b) Demostrar que $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$.

(2) 4 pts.

(a) Sea V un espacio vectorial con producto interno $(,)$ sobre $\mathbb{C}$ y sea $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ un conjunto linealmente independiente en V. Demostrar que se pueden construir vectores ortogonales $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ en V tales que para todo $k = 1, 2, \dots n$ el conjunto $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ es base del espacio generado por $\beta_1, \dots, \beta_k$.

(b) Mostrar que todo espacio con producto interno de dimensión finita tiene una base ortonormal.

(3) 3 pts. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando sus respuestas.

(a) Sea V un espacio vectorial real y sea $T : V \to V$ una transformación lineal con la propiedad que $T(T(\alpha)) = -\alpha$ para todo $\alpha \in V$. Entonces $\{\alpha, T(\alpha)\}$ es linealmente independiente para todo $\alpha \neq 0$.

F (b) Sea U un subespacio vectorial de V y suponga que $V = U \oplus W_1$ y $V = U + W_2$. Entonces $\dim W_1 = \dim W_2$.

(c) Sea A una matriz $n \times n$. Entonces $A^2 = A$ si y solo si $B = I - 2A$ es una matriz tal que $B^{-1} = B$.

Ejercicio para Libres

Calcule la inversa de

Libre

$a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n = b^n$

$n \geq k$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$n = \dim V = \dim(U + W_1) = \dim U + \dim W_1 - \dim(U \cap W_1)$

$n = \dim = \dim(U + W_2) = \dim U + \dim W_2 - \dim(U \cap W_2)$

$0 = \dim W_1 - \dim W_2 - \dim(U \cap W_1) +$

$\dim W_1 + \dim(U \cap W_1) = \dim W_2 + \dim(U \cap W_2)$

$\dim W_1 = \dim W_2 \iff \dim(U \cap W_1) = \dim(U \cap W_2)$

$V = \mathbb{R}^2$ $U = (1,0)$, $W_1 = (0,1)$, $\dim(U \cap W_1) = 0$; $U = (1,0)$, $W_2 = (1,0), (0,1)$ $\Rightarrow \dim(U \cap W_2) = 1$