Apellido y Nombre: Carrera y comisión:

1	2	3	4	5	6	1	2	TOTAL	NOTA

ÁLGEBRA y ÁLGEBRA II
Examen Final-Tema A
(6/12/2007)

1. Sea $T : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$ la transformacion lineal tal que

$$T(E_1) = e_1 + e_3 \quad T(E_2) = e_2 + 2e_3 \quad T(E_3) = 2e_1 + 2e_2 + 2e_3 \quad T(E_4) = e_1 + 2e_2 + 5e_3$$

donde $\beta = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ y $\beta' = \{e_1, e_2, e_3\}$ son las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

(a) Calcular la dimensión y dar una base del núcleo de T.

(b) Calcular la dimensión y dar una base de la imagen de T.

(c) Si denotamos por A a la matriz de T con respecto a las bases ordenadas β y β', describir paramétricamente del conjunto de soluciones del sistema $AX = (1, 0, 1)$. ¿Qué relación tiene con el núcleo de T?

2. Sea $\alpha = (1, -1, 2)$

(a) Determinar el conjunto $W = \{\beta \in \mathbb{R}^3 :< \alpha, \beta >= 0\}$. Demostrar que W es un espacio vectorial con la suma y el producto usual de $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinar el conjunto de los $\beta \in \mathbb{R}^3$ tales que $< \alpha, \beta >= 2$. Determinar si es o no un subespacio de R^3. ¿Qué relación tiene con W?

3. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando claramente su respuesta.

(a) Sea $T : \mathbb{R}^5 \mapsto \mathbb{R}^5$ es una transformación lineal suryectiva entonces $\det T \neq 0$. ✓

(b) Existen dos matrices $A \in \mathbb{R}(2 \times 3)$ y $B \in \mathbb{R}(3 \times 2)$ tales que $\det AB \neq 0$. V

(c) Si V es un espacio vectorial real y $S, T : V \mapsto V$ son transformaciones lineales tales que $T \circ S = Id_V$ entonces $ST = Id_V$ V

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (x - y, x + y + z, y - z)$ y sea $C = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica de $\mathbb{R}^3$.

(a) Dar la matriz de cambio de base de β a β'

(b) Dar la matriz de T con respecto a las bases ordenadas

$$\beta = \{e_2, e_3, e_1\} \quad \text{y} \quad \beta' = \{2e_2, -e_3, 3e_1\}.$$

(c) Calcular $\det[T]$

5. Sean V y W espacios vectoriales y sea $T : V \mapsto W$ una transformación lineal. Demostrar que

$$\dim V = \dim \mathrm{Nu}T + \dim \mathrm{Im}T.$$

3

6. Sea V un espacio vectorial real.

   (a) Definir independencia lineal.

   (b) Definir cuando un conjunto se dice que genera el espacio vectorial V.

   (c) Sean $\beta_1, \ldots, \beta_n \in V$ un conjunto de generadores, demostrar que todo conjunto linealmente independiente en V tiene menor o igual cantidad de elmentos. Es decir que si $V = < \beta_1, \ldots, \beta_n >$, y $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ son linealmente independientes, entonces $r \leq n$.

Ejercicios (solo) para alumnos libres:

1. Calcular el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. Si $A \in \mathbb{R}(n \times n)$ es una matriz inversible, demostrar que existen dos bases de $\mathbb{R}^n$, β y β' tales que $A = [Id]_{\beta}^{\beta'}$, donde Id es la transformación identidad de $\mathbb{R}^n$ en sí mismo.