(B)

Apellido y Nombre: Carrera y comisión:

1	2	3	4	5	1	2	TOTAL	NOTA

ÁLGEBRA y ÁLGEBRA II

Examen Final-Tema A

(18/12/2007)

1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$T(e_1) = e_1 + e_2 + e_3, \quad T(e_2) = -2e_1 + 2e_3, \quad T(e_3) = 5e_2 + 10e_3,$$

donde $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Dar una base del núcleo de T.

   (b) Dar una base de la imagen de T.

   (c) Dar la matriz de T con respecto a las bases ordenandas β y $\beta' = \{2e_3, -e_1, 3e_2\}$.

   (d) Calcular $\det[T]$.

2. Sea V un espacio vectorial real con producto interno $(,)$ y sea $|| \; ||$ la correspondiente norma definida por $(,)$.

   (a) Demostrar que $(v, w) \leq ||v||.||w||$.

   (b) Si v, w son vectores no nulos de V tales que $(v, w) = 0$, demostrar que $\{v, w\}$ es un conjunto linealmente independiente.

   (c) Sea V es el espacio de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ de grado menor o igual que 4. Decidir si

$$(g, h) = g(0)h(0)$$

define (o no) un producto interno en V. Justifique.

3. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando claramente su respuesta.

   (a) Si $A \in \mathbb{R}(n \times n)$ es una matriz inversible, entonces existen dos bases de $\mathbb{R}^n$, β y β' tales que A es la matriz de cambio de base de β a β'. Verdadero

   (b) Existe una transformación lineal no nula, $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, que no es sobre. Falsa

   (c) Si V es un espacio vectorial de dimensión n entonces todo conjunto linealmente independiente de n vectores es una base. Verdadero

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal, β y β' dos bases de $\mathbb{R}^3$, tales que

$$[Id]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [T]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Encontrar $[T]_{\beta}^{\beta}$.

   (b) Si β es la base canónica de $\mathbb{R}^3$ ¿puede dar explícitamente la base β'?

   (c) ¿Es T un isomorfismo? Si lo es, encuentre $[T^{-1}]_{\beta}^{\beta}$. con respuesta (b)?

5. (a) Determinar para qué valores de t la siguiente matriz tiene inversa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t \\ 0 & t & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   (b) Determinar para qué valores de c el siguiente conjunto de vectores puede extenderse a una base de $\mathbb{R}^4$. Justifique.

$$\beta = \{(1,0,c,0); (0,c,1,0), (-1,0,1,0)\}.$$

   (c) Dar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ cuya imagen sea el subespacio generado por β.

Ejercicios (sólo) para alumnos libres:

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $T : V \mapsto V$ una transformación lineal. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   (a) T es inyectiva
   (b) T es sobre
   (c) T es un isomorfismo
   (d) Si $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de V, entonces $\{Tv_1, \ldots, Tv_n\}$ también es una base de V.

2. Dar la matriz escalón reducida por filas equivalente a

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$