(14)

Apellido y Nombre: **Carrera y comisión:**

1	2	3	4	5	6	1	2	TOTAL	NOTA

ÁLGEBRA y ÁLGEBRA II

Examen Final-Tema A

(19/2/2008)

1. Sean $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{R}^4$ los subespacios de soluciones de los siguientes sistemas homogéneos:

$$W_1 : \begin{cases} x - y + z = 0, \\ -x - y + t = 0, \end{cases} \qquad W_2 : \begin{cases} x = 0, \\ -2y + z + t = 0. \end{cases}$$

   (a) Hallar bases de $W_1 \cap W_2$ y de $W_1 + W_2$.

   (b) Describir implícitamente $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$.

   (c) ¿Es $\mathbb{R}^4 = W_1 + W_2$?

2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal definida en la forma

$$T(x, y, z) = (x + z, 2x + y + 3z, -y - z, -x - z).$$

   (a) Dar una base del núcleo de T y calcular su dimensión.

   (b) Dar una base de la imagen de T y calcular su dimensión.

   (c) Determinar la matriz de T con respecto a las bases ordenadas $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$, respectivamente, donde

$$\mathcal{B} = \{(0,1,0), (1,0,0), (0,0,1)\}, \quad \mathcal{B}' = \{(0,1,-1,0), (1,0,1,0), (0,1,0,1), (1,1,0,1)\}.$$

3. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdadedar o falsas:

   (a) Si $T : V \to V$ es una transformación lineal tal que $T^2 = 0$, entonces $\operatorname{Im} T \subseteq \operatorname{Nu} T$. V

   (b) Sea U un espacio vectorial de dimensión finita. Si V, W son subespacios de U tales que $\dim V + \dim W \geq \dim U$, entonces $U = V + W$. F

   (c) Sea $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ un espacio con producto interno. Si $\alpha \in V$ es tal que $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \gamma \rangle$, para todos $\beta, \gamma \in V$, entonces $\alpha = 0$. V

4. Sea $(U, +, \cdot)$ un espacio vectotorial real de dimensión n, V un conjunto y sea $I : U \mapsto V$ una biyección.

   (a) Demostrar que con las siguientes operaciones $(V, \oplus, \odot)$ es un espacio vectorial real.

   $\oplus : V \times V \mapsto V$

$$v_1 \oplus v_2 = I(I^{-1}(v_1) + I^{-1}(v_2))$$

   $\odot : \mathbb{R} \times V \mapsto V$

$$c \odot v_1 = I(c \cdot I^{-1}(v_1)).$$

   (b) ¿Es $I : (U, +, \cdot) \mapsto (V, \oplus, \odot)$ un isomorfismo?

   (c) ¿Cuál es la dimensión de $(V, \oplus, \odot)$?

$c \odot [v_1] \oplus I$

$c \odot v_1 + \oplus v_2$

$I(c \odot v_1 \oplus v_2) = I(I(c)^{-1}$

$I(c u_1 + u_2)$

5. Sea $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$.

(a) ¿Existen valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los que $A : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ no sea inversible? Justificar

(b) ¿Existen valores de $\lambda \in \mathbb{C}$ para los que $A : \mathbb{C}^2 \mapsto \mathbb{C}^2$ no sea inversible?. Justificar

6. Sea V un espacio vectorial real, $\dim V = n$. Demostrar las siguientes afirmaciones.

   (a) Si $S = \{\alpha_1, \dots \alpha_m\}$ es un conjunto linealmente independiente de V, entonces existen $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n \in V$ tales que $\beta = \{\alpha_1, \dots \alpha_m, \alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n\}$ es una base de V.

   (b) Sea A un conjunto finito tal que $< A >= V$. Entonces existe $w_1, \dots w_k \in A$ tales que $\beta' = \{w_1, \dots w_k\}$ es una base de V.

LIBRES.

1. Hallar la matriz de cambio de base de la base ordenada canónica de $\mathbb{R}^3$ a la base ordenada B, donde $B = \{(0,0,1), (1,0,-1), (1,1,0)\}$.

2. Sea V un espacio vectorial de dimensión n. $T : V \mapsto V$ una transformación lineal. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   (a) T es inyectiva

   (b) T es sobre

   (c) T es un isomorfismo

   (d) Si $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V entonces $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$ tambien es una base de V.