24

EXAMEN FINAL - PARTE TEORICA

27 de junio

Apellido y nombre	1	2	3	4	5	Total

- Tiempo disponible: 2 horas.
- Justificar todas las respuestas.

Ejercicio 1. [10 ptos] Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sean V y W dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$.

(a) Definir que es una transformación lineal T de V en W y definir $\operatorname{Nu} T$ e $\operatorname{Im} T$.

(b) Probar que si V es de dimensión finita, entonces $\dim V = \dim \operatorname{Nu} T + \dim \operatorname{Im} T$.

Ejercicio 2. [10 ptos] Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno.

(a) Definir la norma de un vector y el ángulo entre dos vectores, destacando qué hace falta para que el mismo esté bien definido.

(b) Enunciar y probar la desigualdad triangular. (Se puede usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz sin probarla.)

Ejercicio 3. [10 ptos] Sea V el espacio de matrices $n \times n$ con entradas en un cuerpo $\mathbb{K}$.

(a) Definir la función determinante de V en $\mathbb{K}$.

(b) Probar que una matriz $A \in V$ es inversible si y solo si $\det A \neq 0$.

Ejercicio 4. [10 ptos] Sea V un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y sea T una transformación lineal de V en V tal que $T^k = 0$ para algún k.

(a) Probar que todos los autovalores de T son nulos.

(b) Probar que si $T \neq 0$, entonces T no es diagonalizable.

$T(\alpha) = c\alpha$

$\Rightarrow T(T(\alpha)) = T(c\alpha) =$

en general $T^k\alpha$

cero T^k

$\Rightarrow c^k\alpha = 0$

como $\alpha \neq 0$

$\|w\|$

$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$

5. Sea V un espacio vectorial de dimensión n, y sean W_1, W_2 subespacios de V. Demostrar que

   (a) $\dim W_1 \leq n$.

   (b) $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$.

Ejercicios (solo) para alumnos libres:

Sea V un espacio vectorial real de dimensión 3, y $<,>$ un producto interno en V.Demostrar que si $v, w \in V$ tales que $< v, w >= 0$ entonces los vectores v y w son linealmente independientes. Demostrar que V es isomorfo a $\mathbb{R}^3$. Sea $v_0 \in V$ y $W = \{v \in V : < v, v_0 >= 0\}$, demostrar que W es un subespacio vectorial de V. >Es $W = \{v \in V : < v, v_0 >= c\}$, con $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$ un subespacio de V?