ALGEBRA II

EXAMEN FINAL 12/2/2015

NOMBRE Y APELLIDO:

CONDICIÓN *(libre o regular)*:

CARRERA:

Justificar todas las respuestas.

PARTE PRÁCTICA

Ejercicio 1. (a) Hallar una matriz 4×4, A, con $\det(A) = 24$ y tal que sus autovectores formen una base de $\mathbb{R}^4$.

(b) Encontrar todos los números complejos z que satisfacen

$$z^5 = -i - 1.$$

(c) Encontrar para qué valores de a y b el siguiente sistema homogéneo tiene infinitas soluciones.

$$\begin{aligned} by + az &= 0 \\ x + ay &= 0 \\ x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

Ejercicio 2. Sean

$$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x+y+z = 0 \text{ y } z+w = 0\}, \quad W = < (1,0,1,0), (0,0,1,1), (0,1,1,1) > .$$

(a) Demostrar que V es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$.

(b) Dar una base B de $V \cap W$.

(c) Completar B a una base de $\mathbb{R}^4$.

Ejercicio 3. Sea $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que:

$$S(e_1) = (1,3,2), \; S(e_2) = (2,2,0) \text{ y } S(e_1 + e_3) = (2,6,4),$$

donde $\{e_1, e_2, e_3\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(a) Describir el conjunto de vectores que pertenecen a $\mathrm{Im}(S)$.

(b) Dar una base de $\mathrm{Im}(S)$ y determinar su dimensión.

(c) Calcular la dimensión de $\mathrm{Nu}(S)$.

(d) Determinar si 0 es un autovalor de S^{17}.

(e) Calcular $[S]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, para la base ordenada $\mathcal{B} = \{e_3, 2e_2, e_1\}$.

Ejercicio 4. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando claramente todas sus respuestas.

(a) Si S y T son transformaciones lineales tales que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ entonces 0 es un autovalor de $T \circ S$.

(b) Sea $\mathcal{P}^n$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor que n. Existe una transformación lineal $T : \mathcal{P}^3 \to \mathcal{P}^2$ tal que

$$T(1 + x) = x, \quad T(1 + x^2) = 1 \text{ y } T(x - x^2) = x.$$

(c) Si A y B son matrices $n \times n$ tales que $\det AB = 1$ entonces $B = A^{-1}$.

(d) Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Entonces V es isomorfo a su dual.