Álgebra / Álgebra II
Examen Final 29/06/2015

Nombre y Apellido: **Justifique todas sus respuestas.**

1. (15 pts.) Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por el conjunto $B = \{(1,-1,1,2),(2,2,-1,-1),(0,1,0,-2)\}$ y sea
$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y-z+2t = 0\}.$$
   a) Dar una descripción implícita y una base del subespacio $W \cap U$.
   b) Probar que B es una base de W y determinar las coordenadas de un vector $(x,y,z,t) \in W$ en la base ordenada B.
   c) Hallar un subespacio W' de $\mathbb{R}^4$ tal que $\mathbb{R}^4 = W \oplus W'$.

2. (15 pts.) Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida en la forma
$$T(x,y,z,t) = (x-y, z-t, x-y+z-t).$$
   a) Dar una descripción implícita de $\operatorname{Nu} T$, calcular su dimensión y mostrar una base.
   b) Dar una descripción implícita de $\operatorname{Im} T$, calcular su dimensión y mostrar una base.
   c) Hallar $[T]_{B_1}^{B_2}$, donde B_1 y B_2 son las bases ordenadas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$ dadas, respectivamente, por
$$B_1 = \{(1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1),(1,-1,1,1)\}, \qquad B_2 = \{(0,1,0),(-1,0,-1),(1,0,-1)\}.$$

3. (15 pts.) Sea $A(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & -z & 0 \\ z & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.
   a) Calcular el determinante de $A(z)$.

$B_1 = \{(1,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1),(1,-1,1,1)\}$,

3. (15 pts.) Sea $A(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & -z & 0 \\ z & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.
   a) Calcular el determinante de $A(z)$.
   b) Probar que $A(2)$ es inversible y determinar su inversa.
   c) Hallar todos los valores de $z \in \mathbb{C}$ tal que $A(z)$ sea inversible.

4. (15 pts.) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
   a) Existe una matriz $A \in \mathbb{C}^{5\times 3}$ tal que las filas de A son linealmente independientes.
   b) Existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $(1,-1)$ es un vector propio de T de valor propio -2 y $(1,1)$ es un vector propio de T de valor propio 0.
   c) Si U y W son subespacios de un espacio vectorial V tales que $\dim V = 5$ y $\dim U = \dim W = 3$, entonces $U \cap W \neq \{0\}$.

Parte Teórica

5. (20 pts.) Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo F generado por un conjunto finito de vectores $\{\beta_1, \dots, \beta_m\}$. Probar que todo subconjunto linealmente independiente de V es finito y no tiene más de m elementos.

6. (20 pts.) Sean V, W espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo F y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Demostrar que $\dim V = \dim \operatorname{Nu} T + \dim \operatorname{Im} T$.

Parte práctica	1	2	3	4	Total