Segundo cuatrimestre de 2016

ALGEBRA y ALGEBRA II

EXAMEN FINAL - 16 DE FEBRERO

NOMBRE	1	2	3	4	5	6	Total

PARTE PRÁCTICA

1. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Dar la matriz escalón reducida por filas equivalente por filas a A.
   (b) Dar una base del espacio fila de A y una base del espacio columna de A.
   (c) Calcular los autovalores de A y el autoespacio asociado a cada autovalor.
   (d) Determinar si A es diagonalizable y calcular el determinante de A.

2. Sean $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y - z = 0\}$ y $W = < (1,0,0,2), (1,0,-1,1), (1,1,0,-1) >$.
   (a) Mostrar que V es un subespacio de $\mathbb{R}^4$ y que el subespacio $V \cap W$ es no nulo y de dimensión igual a 2.
   (b) Calcular el complemento ortogonal de W.
   (c) Dar, si es posible, una transformación lineal T de $\mathbb{R}^4$ tal que $\mathrm{Nu}\, T = V$ y $\mathrm{Im}\, T = W$. Si no es posible, explicar porqué no es posible.

3. (a) Sea T la reflexión del plano con respecto a la diagonal principal, es decir $T(x, y) = (y, x)$. Dar las coordenadas de T respecto de la base $\{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ del espacio de todas las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, donde

$$T_1(x, y) = (x, x), \quad T_2(x, y) = (y, y), \quad T_3(x, y) = (-x, y), \quad T_4(x, y) = (x, y).$$

   (b) Sea $(,)$ el producto interno en $\mathbb{R}^3$ dado por: $((a, b, c), (x, y, z)) = ax + by + 2cz$. ¿Son $v = (1,1,1)$ y $w = (1,1,-1)$ ortogonales con respecto a este producto interno?. ¿Son ortogonales con respecto al producto interno usual de $\mathbb{R}^3$?

   Exhibir, si es posible, un vector u que sea ortogonal a v y a w respecto a ambos productos internos; si no es posible, explicar porqué.

   (c) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por: $T(x, y, z) = (2x, x + y - z, z - y)$.
      i. Mostrar que para cualquier funcional lineal f, $T^*(f)(0, 1, 1) = 0$.
      ii. Mostrar que la funcional $f \in (\mathbb{R}^3)^*$, dada por $f(x, y, z) = x - 2(y + z)$ está en núcleo de T^*.

4. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.
   (a) Si T es una transformación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$ tal que $T(1,1,1,1) = (0,1,1,1)$ y $T(1,1,1,0) = (0,-1,-1,-1)$, entonces la dimensión de la imagen de T es la sumo 3.
   (b) Si $v, w \in \mathbb{R}^3$ son linealmente independientes y u no está en el plano generado por v y w, entonces $\{u, v, w\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

(c) Si A y B son dos matrices $n \times n$ inversibles, entonces $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.

Parte Teórica

5. Definiciones y propiedades.

   (a) Definir base de un espacio vectorial, espacio vectorial de dimensión finita y dimensión de un espacio vectorial de dimensión finita.

   (b) Definir autovector y autoespacio de una transformación lineal.

   (c) Mostrar que si el sistema no homogéneo $AX = Y$ tiene una solución X_0, entonces toda otra es de la forma $X_0 + X$ donde X es una solución del sistema homogéneo asociado.

   (d) Mostrar que una transformación lineal $T : V \to V$ es inyectiva si y sólo si su determinante es no nulo.

6. Enunciados y demostraciones.

   (a) Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita y sea $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ una base de V. Probar que dados $\beta_1 \ldots, \beta_n$ vectores en W, existe una única transformación lineal T tal que $T(\alpha_i) = \beta_i$ para $i = 1, \ldots, n$

   (b) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con un producto interno. Probar que todo subespacio W de V tiene un complemento ortogonal.